

無重力下のコマの運動＜ポアンソ(Poinsot)の表現＞

まえがき

無重力下のコマには力のモーメントが作用しない。

だからコマは動かないと考えるのは誤りである。

コマの歳差運動の角速度は $\dot{\theta} = \frac{1}{I \sin^2 \theta} (L_z - L_3 \cos \theta)$ (2.1)式で表され、

L_z は $L_z = L_3 \cos \theta_1 + L_a$ (2.16)式であるから $\dot{\theta} = \frac{L_a}{I \sin^2 \theta}$ (6.1)式となる。

ここで、 L_a は $L_3 \cos \theta_1$ に対する付加的な角運動量である。

つまり、 $L_a \neq 0$ であればコマは動くことになら。

ここでは、この付加的な角運動量に焦点をあてて検討する。

1 運動の基本原則

無重力下のコマの動きは力のモーメントが作用しない時のオイラーの運動方程式

(6.2), (6.3), (6.4)式を解くことにより求められる。

ここでは座標の表現をコマ（剛体）に固定した座標系を回転座標（非慣性座標）、そのコマが置かれている空間の座標系を静止座標（慣性座標）と呼ぶことにする。

回転座標はコマの上に乗った観測者から見れば静止しているが、静止空間から見れば回転していることになる。

オイラー角の取り方や数式の記号等の基本的事項については丁寧な説明のある末尾の参考文献1に合わせた。その他については参考文献2～5を参照願いたい。

$$I \dot{\omega}_1 - (I - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (6.2) \text{式}$$

$$I \dot{\omega}_2 - (I_3 - I) \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (6.3) \text{式}$$

$$\dot{\omega}_3 = 0 \quad (6.4) \text{式}$$

ここで $\Omega = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 = \frac{I_3 - I}{I} \cos \alpha \cdot \omega$ (一定) (6.5)式とおくと

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0 \quad (6.6) \text{式} \quad \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \quad (6.7) \text{式となる。}$$

次に(6.7)式に虚数 i を掛け(6.6)式を足して、 $\tilde{\omega} = \omega_1 + i \omega_2$ (6.8)式とおくと

次の変数分離形微分方程式が導ける。

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = i\Omega \tilde{\omega} \quad (6.9) \text{式} \quad \text{これを解いて} \tilde{\omega} = A e^{i(\Omega t + \delta)} \quad (6.10) \text{式となる。}$$

これをオイラーの公式に従って展開すると、 A を振幅、 δ を初期位相として

$$\omega_1 = A \cos(\Omega t + \delta) \quad (6.11) \text{式} \quad \omega_2 = A \sin(\Omega t + \delta) \quad (6.12) \text{式となる。}$$

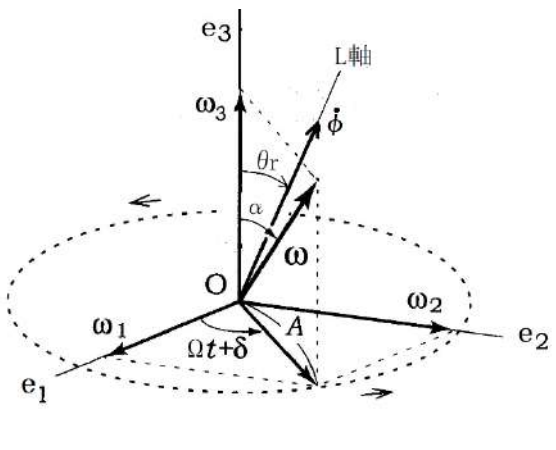
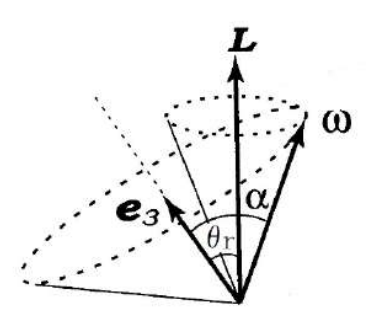
	 物体円錐 (e₃を回転軸とする大円) 空間円錐 (Lを回転軸とする小円) ポワンソンの作図法
図 6.1 回転座標系 (対称軸 e₃) から見る 角速度ベクトル ω の動き	図 6.2 物体円錐と空間円錐の関係 $I_3 > I$ ($\alpha > \theta_r$) のケース

図 6.1 において ω の e_1 - e_2 軸平面上の合成成分 $A = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ (6.13)式 は e_3 軸 (対称軸) を中心として一定の角速度 Ω で回転する。

$$\tan \alpha = A / \omega_3 \quad (6.14) \text{ 式} \quad \omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 \quad (6.15) \text{ 式}$$

図 6.2 において e_3 軸を中心とする頂角 α の円錐が物体円錐である。

また L は、力のモーメントが作用しないから $L=0$ (一定) である。

$$L = I\omega_1 e_1 + I\omega_2 e_2 + I_3\omega_3 e_3 = I\omega + (I_3 - I)\omega_3 e_3 \quad (6.16) \text{ 式} \quad \text{なので、}$$

L は ω と e_3 によって張られる平面にある。

これは、静止座標系から見た ω と対称軸 e_3 が L のまわりを同一角速度で回転していることを示している。 ω が L のまわりにつくる円錐が空間円錐である。(図 6.2)

L と対称軸 e_3 との角度を θ_r とすると、(6.14) 式より

$$\tan \theta_r = \frac{IA}{I_3\omega_3} = \frac{L_r}{L_3} = R_L = \frac{I}{I_3} \tan \alpha \quad (6.17) \text{ 式となる。}$$

L_r は図 6.1 の回転半径 A の角速度に対応した角運動量で $L_r = IA$ で定義される。

R_L は L_r の L_3 に対する比で L_r / L_3 である。

次の、図 6.3 は対称軸 e_3 が L を中心として円軌道を回る時の回転半径 θ_r を示している。 R_L は L_r の L_3 に対する比で $R_L = L_r / L_3$ である。

つまり、回転半径 θ_r は $\theta_r = \tan^{-1} R_L$ (6.18) 式で表される。

R_L が 0 の時、即ち L_r が 0 の時は回転半径 θ_r も 0 で、コマは眠りゴマのような静止状態にある。 R_L が増大するにつれ回転半径 θ_r も増大し、 $R_L = 1$ の時 $\theta_r = 45^\circ$ となる。

しかしながら、 R_L がいくら増大しても (6.18) 式から $\theta_r = 90^\circ$ を越えることはない。

つまり、回転半径 θ_r の範囲は $0 \sim 90^\circ$ であることがわかる。

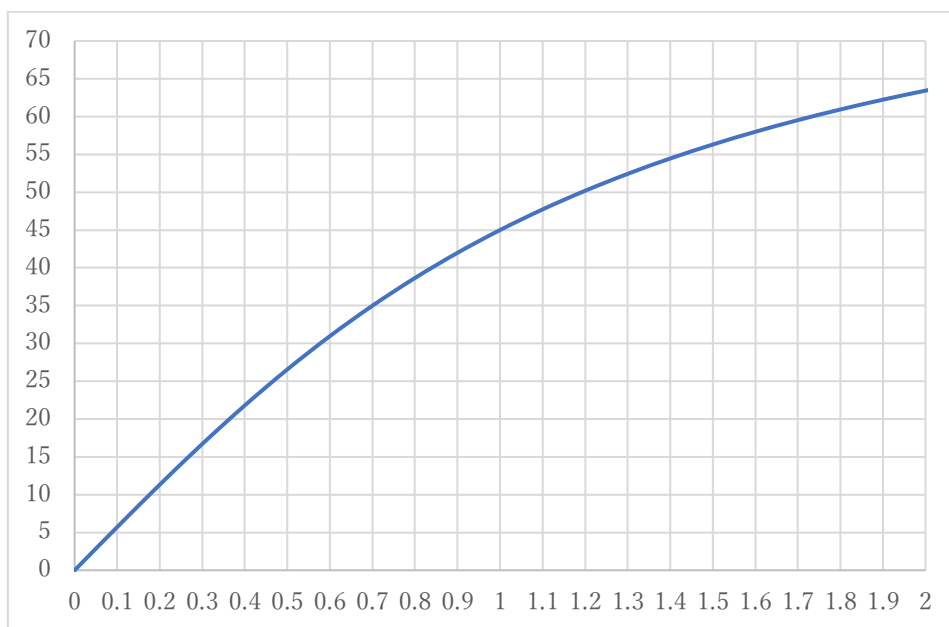


図 6.3 対称軸 e_3 が L を回る時の円軌道の回転半径 θ_r 度 $\theta_r = \tan^{-1} R_L$ (6.18) 式
縦軸 角度 θ_r 度 横軸 $R_L = L_r / L_3$

物体円錐と空間円錐の関係は、 $I_3 > I$ のケースでは $\alpha > \theta_r$ となり図 6.2 のようになる。

($I_3 < I$ のケースについては後述)

図 6.2 の空間円錐と物体円錐の半径を r_s , r_b として、その比 n を求めると

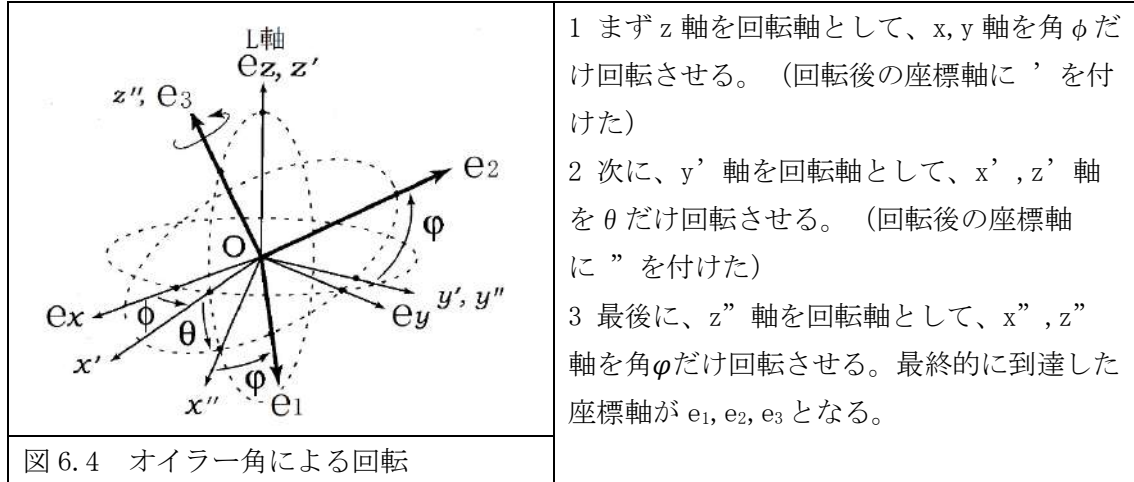
$$\omega \text{ の大きさを } 1 \text{ として } n = r_s / r_b = \left| \frac{\sin \alpha \cos \theta_r - \cos \alpha \sin \theta_r}{\sin \alpha} \right| = \left| \cos \theta_r - \frac{\sin \theta_r}{\tan \alpha} \right|$$

ここで(6.17)式より $\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{I}{I_3 \tan \theta_r}$ であるから $r_s / r_b = \left[\frac{I_3 - I}{I_3} \cos \theta_r \right]$ (6.19) 式となる。

2 e_3 が L の回りを回転するときの角速度 $\dot{\phi}$ を求める

ここではゴールドスタイン等の教科書的な解法（文献 3～5）について解説する。

図 6.4 は e_x, e_y, e_z 系（慣性座標）をオイラー角 $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \varphi$ により e_1, e_2, e_3 系（回転座標）に変換する説明図である。



（注）オイラー角の取り方はどの軸を回転させるかに任意性があり、全部で 12 通りの表現法がある。良く使われる方式で、 y' 軸でなく x' 軸を回転させるものもある。

その場合には、回転の変換行列やそれから得られる座標軸の角速度成分が異なるので注意が必要である。

図 6.4 の回転 $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$ (6.20) 式 による変換行列 A は次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\varphi - \sin\phi\sin\varphi & \cos\phi\cos\theta\sin\varphi + \sin\phi\cos\varphi & -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\theta\cos\varphi - \cos\phi\sin\varphi & -\sin\phi\cos\theta\sin\varphi + \cos\phi\cos\varphi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (6.21) \text{ 式}$$

また、回転座標系と静止座標系の角速度 ω の成分は下表の通りとなる。

直交行列において A^{-1} （逆行列）は ${}^t A$ （転置行列）となるので、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は次式で算出できる。

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (6.22) \text{ 式}$$

表 6.1 回転座標系と静止座標系の座標軸の角速度（文献 4, 5）

回転座標系 e_1, e_2, e_3	静止座標系 e_x, e_y, e_z
$\omega_1 = -\dot{\phi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\varphi$ (6.23) 式	$\omega_x = \dot{\phi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi$ (6.26) 式
$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi$ (6.24) 式	$\omega_y = \dot{\phi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi$ (6.27) 式
$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi}$ (6.25) 式	$\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi}$ (6.28) 式

角運動量ベクトル L は静止座標系で眺めれば定ベクトルであるから、これを図 6.4 のように z 軸に設定すると $L = L e_z$ である。この L を、 e_1, e_2, e_3 系で表現すると

$$L = L e_z = L(-\cos\varphi \sin\theta e_1 + \sin\varphi \sin\theta e_2 + \cos\theta e_3) \quad (6.29) \text{式となる。}$$

単位ベクトル e_z は、上記の変換行列 A の z 成分（第 3 列）を抜き出したものである。

ここで (6.16) 式に上記の $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を代入して (6.29) 式と見比べると

$$I\omega_1 e_1 = I(-\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\varphi) e_1 = -L \cos\varphi \sin\theta e_1 \quad (6.30) \text{式}$$

$$I\omega_2 e_2 = I(\dot{\varphi} \sin\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\varphi) e_2 = L \sin\varphi \sin\theta e_2 \quad (6.31) \text{式}$$

$$I_3 \omega_3 e_3 = I_3 (\dot{\theta} \cos\theta + \dot{\varphi}) e_3 = L \cos\theta e_3 \quad (6.32) \text{式}$$

(6.30) 式 $\times \cos\varphi$ - (6.31) 式 $\times \sin\varphi$ より $\dot{\varphi} = L/I$ (6.33) 式 である。また、 $\dot{\theta} = 0$ (θ 一定) となる。

ここで (6.15) 式から $\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ を求めて (6.16) 式に代入し、(6.5) 式の $\Omega = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3$ と

(6.33) 式の $\dot{\varphi} = L/I$ を用いると $\omega = \dot{\varphi} e_z - \Omega e_3$ (6.34) 式が成り立つことがわかる。

ここで注意すべきは、静止座標系から見ると図 6.1 の回転座標系における Ω の方向が逆になっていることである。図 6.1 の角速度 ω の動きは、コマが右回転している結果として現れていることがわかる。

$$\text{上式はさらに } \dot{\varphi} = \frac{L}{I} = \frac{L \cos\theta}{I \cos\theta} = \frac{I_3 \omega_3}{I \cos\theta} = \left(\frac{I_3}{I}\right) \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\right) \omega \quad (6.35) \text{式となる。}$$

(6.35) 式、(6.5) 式、(6.19) 式の関係から $|\dot{\varphi} r_s| = |\Omega r_b|$ (6.36) 式の関係が導かれる。

これは、物体円錐と空間円錐が接しながら滑らずに回転している様を示している。

また表 6.1 の諸式に $\dot{\theta} = 0, \varphi = \dot{\varphi} t, \varphi = \pi - \Omega t$ を代入すると、表 6.2 のような結果が得られる。

表 6.2 回転座標系と静止座標系の座標軸の角速度

回転座標系 e_1, e_2, e_3	静止座標系 e_x, e_y, e_z
$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\Omega t$ (6.37) 式	$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\dot{\varphi} t$ (6.40) 式
$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\Omega t$ (6.38) 式	$\omega_y = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\dot{\varphi} t$ (6.41) 式
$\omega_3 = \dot{\theta} \cos\theta + \dot{\varphi}$ (6.39) 式	$\omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\varphi}$ (6.42) 式

これから、回転座標系では e_3 を中心に $\dot{\varphi} \sin\theta$ の角速度ベクトルが Ω の角速度で左回転していることがわかる。図 6.1 はこの様子を示したもので、 $\dot{\varphi}$ と ω は同一平面にあり、 ω の成分である A は $\dot{\varphi}$ の成分 $\dot{\varphi} \sin\theta$ に等しくなる。

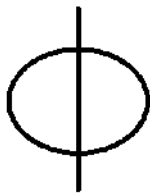
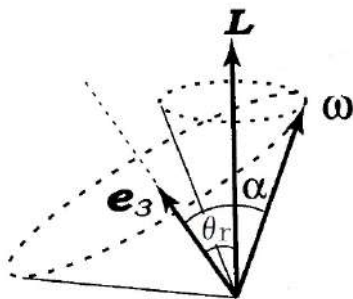
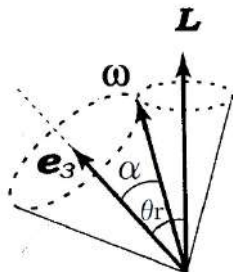
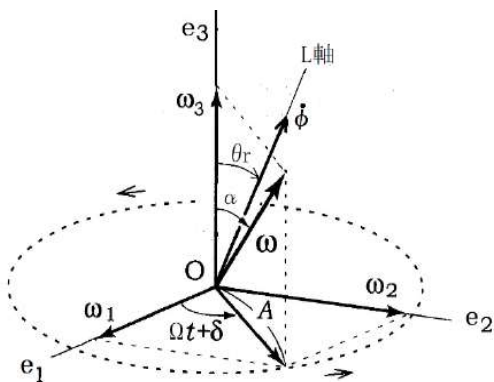
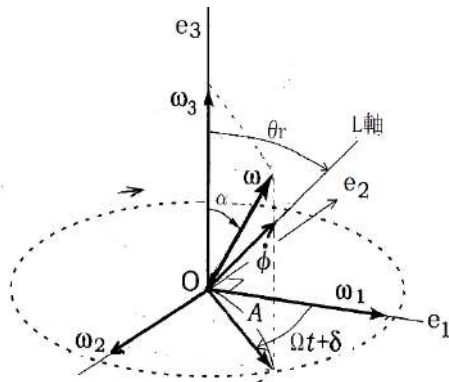
$$A = \omega \sin\alpha = \dot{\varphi} \sin\theta \quad (6.43) \text{ 式}$$

一方、静止座標系では z 軸を中心に $\dot{\varphi} \sin\theta$ の角速度ベクトルが $\dot{\varphi}$ の角速度で左回転していることがわかる。これを同時表現したものが、ポアンソ (Poinsot) の表現である。

3 無重力下のコマの運動の分類

表 6.3 にこれまでの検討結果をまとめとして示す。

表 6.3 無重力下のコマの運動の分類

慣性モーメント			
$I_3>I$ ($\alpha>\theta_r$)		$I_3<I$ ($\alpha<\theta_r$)	
コマのイメージ (質量の密度一様)			
	太胴タイプ		細胴タイプ
図 6. 5A		図 6. 5B	
空間円錐と物体円錐の関係			
			
図 6. 6A		図 6. 6B	
回転座標系で見た瞬間自転軸の動きとベクトル図			
			
図 6. 7A Ω は正で左回転		図 6. 7B Ω は負で右回転	
$\Omega = \frac{I_3-I}{I} \omega_3 = \frac{I_3-I}{I} \cos\alpha \cdot \omega \quad (\text{一定})$			
$\dot{\phi} = \frac{L}{I} = \frac{I_3 \omega_3}{I \cos\theta_r} = \left(\frac{I_3}{I}\right) \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \omega \quad (\text{一定})$			

[$I_3=I$ ($\alpha=\theta_r$) のケース]

コマのイメージは球体で、角運動量ベクトル L と角速度ベクトル ω は同相となり空間円錐は存在しない。コマの角速度 Ω は 0 となるので、地球上の ω の円運動は停止する。これは物体円錐が形成されないことを意味する。

[コマの瞬間自転軸が右回転のケース]

運動の回転方向がすべて反転する。

<参考 1>無重力下のコマの回転半径 θ と章動幅 ($\theta_1 \sim \theta_2$) の関係

前述の $\tan\theta = \frac{L_r}{L_3}$ (6. 17) 式は、第 2 章の章動幅 ($\theta_1 \sim \theta_2$) を求める式からも求められる。道中は長いが、内容は平易である。

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{(\cos\theta - \cos\theta_1)}{2L\sin^2\theta_1 \sin^2\theta} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2L_3^2 \sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g}\right) \cos^2\theta - (L_3^2 + L_Z^2 - 2L_3L_Z \cos\theta_1) \cos\theta \\ &- (L_3^2 + L_Z^2) \cos\theta_1 - \frac{2L_3^2 \sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g}\right) + 2L_3L_Z \end{aligned} \right\} \quad (2.15) \text{式}$$

まず上式 { } の部分において $g_z=0$ を代入し、その根 θ_2 を求めよう。

$$\cos\theta_2 = \frac{2L_3L_Z - (L_3^2 + L_Z^2)\cos\theta_1}{L_3^2 + L_Z^2 - 2L_3L_Z\cos\theta_1}$$

これから $\sin\theta_2$ を求めると

$$\sin\theta_2 = \frac{(L_3^2 - L_Z^2)\sin\theta_1}{L_3^2 + L_Z^2 - 2L_3L_Z\cos\theta_1}$$

$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1$ であるから

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{L_3^2 - L_Z^2 + 2L_3L_Z\cos\theta_1 - 2L_3^2\cos^2\theta_1}{L_3^2 + L_Z^2 - 2L_3L_Z\cos\theta_1}$$

$$\tan\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)}{1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)}} = \frac{L_Z - L_3\cos\theta_1}{L_3\sin\theta_1} = \frac{L_a}{L_3\sin\theta_1}$$

上式に $L_a=L_r\sin\theta$ を代入すると $\tan\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = \frac{L_a}{L_3\sin\theta_1} = \frac{L_r}{L_3}$ (6. 44) 式となる。

これから、章動の変動幅の半分 $\theta=(\theta_2 - \theta_1)/2$ が L_r/L_3 になることがわかる。

無重力下のコマにおいては初期位置 θ_1 は意味をもたず、いずれに動いても一様であることがわかる。無重力下では方向性を待たないと言っても良いであろう。

つまり $\tan\theta_r = \frac{L_r}{L_3}$ (6. 17) 式の妥当性が証明されたことになる。

＜参考 2＞ 正距方位図の解説

正距方位図の数式は天文学で使われる赤道座標から次のように導かれる。

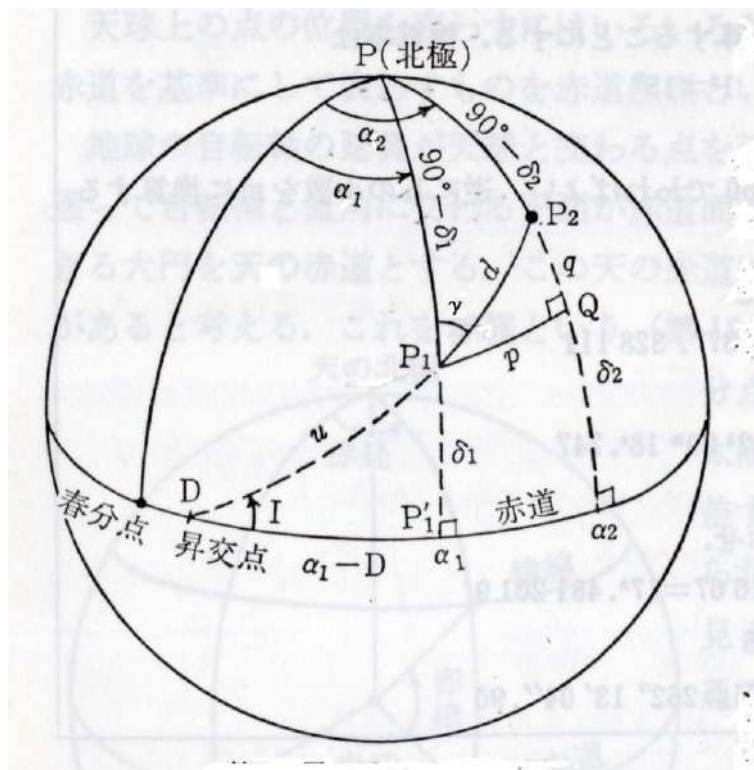


図 6.9 赤道座標 (α 赤経 δ 赤緯 d 距離 γ 緯線との角度) (文献 8)

上図において、北極と天球の中心を結ぶ線がコマの z 軸である。コマの傾斜角 θ は $90^\circ - \delta$ (赤緯)、歳差角 ϕ は α (赤経) となる。ここで、球面三角法をもちいて関係式を導くと

$$\cos d = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (6.45) \text{ 式}$$

$$\sin\gamma = \sin\theta_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) / \sin d \quad (6.46) \text{ 式}$$

図において、 $P_1(\phi_1, \theta_1)$ を基準点として $P_2(\phi_2, \theta_2)$ をコマの先端にとれば、 ϕ と θ の関係が 2 点間の距離 d と緯線との角度 γ の正距方位図として描ける。

(x, y 平面座標) $x=d \cdot \sin \gamma$ $y=d \cdot \cos \gamma$

(注) (6.45)式において分母に $\sin d$ があることに注目。

$d=0$ の時は計算ができないので、基準点 $P_1(\phi_1, \theta_1)$ と $P_2(\phi_2, \theta_2)$ が重ならないように基準点を選定すること。

参考文献

- 1 『自然は方程式で語る』 p258～263, P384～458 大島隆義 p387～393, p412～423
名古屋大学出版会 2012
- 2 『こまはなぜ倒れないか(物理学演習 One Point3)』 安井久一 p40～53 共立出版 1998
- 3 『演習詳解 力学』 江沢洋 中村孔一 山本義隆 p229, p259～263 日本評論社 2011
- 4 『古典力学(上)』 p198～205, p265～275, p446～451 ゴールドスタインほか
吉岡書店 2006
- 5 『古典力学問題のとき方(物理学叢書)』 -ゴールドスタインほか-原著第3版に基づいて-
p139～140, p157～160, p185～189, p446～451 瀬藤憲昭 吉岡書店 2009
- 6 『地球の物理学事典』 ステイシー, デイヴィス 訳 本多了 p96～99, p450 朝倉書店 2013
- 7 『現代天文学講座 1 地球回転』 若生康二郎 p109～132 p169～213 恒星社厚生閣 1979
- 8 『天文計算入門』 新装改訂 p26～27 長谷川一郎 恒星社厚生閣 2007