

第6講 抽象機械

林 恒俊

抽象機械と言語

- **抽象機械** (abstract machine) あるいは自動機械は計算を自律的に行う過程を形式的に取扱うために考えられた数学的モデルである。このようなモデルではその部品を変更したり部品を追加削除することにより処理能力を設計することができる。また入力や出力対象を記号列と見なすことができるので言語の要素を判定したり生成したりできる。いわゆる**計算** (computation) を実現する具体的なモデルとして非常に重要な意味を持っている。
- またこれらの自動機械は現実に存在する計算機 (あるいはプログラム) の形式的なモデルと見なすこともできる。計算機やプログラムの動作を数学的形式的に取扱うために自動機械を考えその動作で検証することができる。
- 形式的に記号列が言語の要素かどうか判定する手段としてこのような抽象機械を利用する。また判断する機械の複雑さにより言語の複雑さを考察することも可能である。
- これらの抽象機械には次のような種類が考えられている。
 - **有限状態機械** (finite state automaton, FSA)
 - **プッシュダウン機械** (push down automaton, PDA)
 - **チューリング機械** (Turing machine, TM)

これらの機械はこの順序に構成が複雑になり機能が高くなっている。本講ではこれらの機械をできるだけ統一的に取扱うように試みるがテキストによっては必ずしもそのようになっていない。

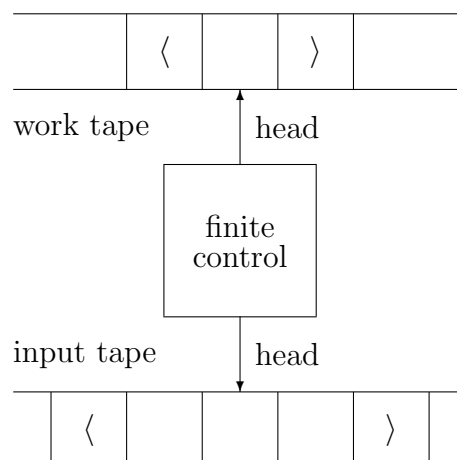
機械構成

- これらのすべての機械は**有限制御機構 (finite control)** と外部記憶装置から構成されている。制御機構が有限であるとは制御機構が備えている記憶容量が有限である、すなわち有限の状態しかとれないことを意味している。有限でないデータ (入力記号列) を取扱うためには有限でない外部記憶が必要になる場合もある。
- 外部記憶には形式的な取扱いが容易なテープ記憶が通常用いられる。テープ記憶は読出し、書込み、前進後退などの操作を行うことができる。さらに記憶容量の制限がなく限りなく長いテープが存在するものと見なされる。
- 前記の抽象機械の構成は次のようになっている。PDA の作業テープはスタックとしてのみ利用するように制限されている。

種類	構成
FSA	制御部、入力テープ
PDA	制御部、入力テープ、制限付き作業テープ
TM	制御部、入力テープ、作業テープ

機械の図式表現

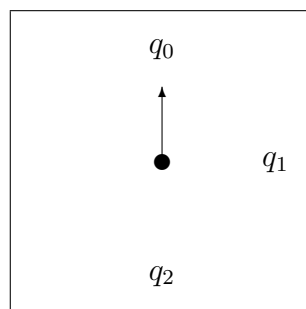
- 一般的に抽象機械は次のような図で考えることができる。すべての機械は入力テープを備えている。しかし機械の種類によっては**作業テープ (work tape)** を持たない場合がある。



- 機械に備わっている機能は次のようなものである。
 - 有限な制御部とテープを読書きするためのヘッドを各テープに対応して備えている
 - 読み書きデータとして有限な記号集合(アルファベット)が定義されている
 - テープにはアルファベットの記号に加えてテープの両端を示すための特別な記号(マーカ)が書き込まれる
 - テープ上の記号はヘッドによって常時参照可能になっている
- 抽象機械の動作は制御部の現在の状態とヘッドが参照するテープ上の記号を入力として決定される。どのように決定するかは次に説明するように機械の種類と定義に従う。

有限制御機構

- 制御部はあらかじめ定義された有限の**状態 (state)** のいずれかをとる。この機械がとりうる状態全体は機械の定義の一部であり**状態集合 (state set)** と呼ばれる。通常 $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$ などと表される。
- 機械がある状態をとるとは、例えば機械の中に回転スイッチがありスイッチの方向が状態に対応するものと考えればよい。機械の状態を決めるためにはスイッチを回転して対応する状態の方向に向ければよい。



- すなわち機械は一時に1状態だけとり同時に2状態以上はとれないことを示している。

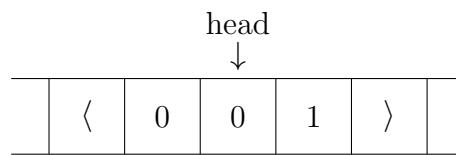
- 機械の動作とは機械の状態と入力情報すなわちテープから読出された入力記号により状態を変化させたりテープを操作させたりすることである。
 - 機械は利用可能な情報を使って順序を追って動作する。
 - 利用可能な情報は機械自身の現在の状態とヘッドから読出すテープ上の記号である。
 - 機械はこれらの情報から出力として次状態やテープ操作などを決定する。
 - 決定に従って状態を変化させたりテープを操作する。これが動作の**1段階 (step)** になっている。
 - 機械は1段階の動作が完了すると再び次の動作を開始する。
 - 機械は一定の状態になるか次状態が定義されていないため動作が継続できなくなると停止する。
 - 停止時の状態やテープ構成により様々な判定が行われる。
 - 機械の定義には1段階の動作を定義する表 (あるいは関数) が含まれている。
- 与えられた機械に関する情報からその機械の動作がユニーク (一意的) に決められる場合を
 - **決定的 (deterministic)**
といい、そうでない場合を
 - **非決定的 (nondeterministic)**
という。非決定的な機械の実装は決定的な機械より複雑である。

テープ構成

- 機械が取扱うアルファベットを Σ とするとテープ上にはテープアルファベット $\Sigma_T = \Sigma \cup \{ \langle, \rangle \}$ という記号集合が記入される。ただし

“<”と“>”は Σ に含まれないテープの両端を示すための特別な記号(マーカ)である。

- テープおよびヘッドの状態を表示するために**テープ構成 (tape configuration)**を定義する。テープの状態を記述するためにはテープに記入されている記号列とその記号列上のヘッドの現在位置が判別できればよい。テープ上の記号列が x 、ヘッドの位置が記号列の左端から p の位置にある場合式 $[p, x]$ でテープ構成を表現する。



この状態のテープ構成は $[2, 001]$ と表現される。

- 当然 $0 \leq p \leq |x| + 1$ でなければならない
- もし $p = 0$ ならヘッドは左側マーカ記号“<”を指している
- もし $p = |x| + 1$ ならヘッドは右側マーカ記号“>”を指している
- それ以外の場合ヘッドの指示している記号は $x(p)$ である
- 機械は常にヘッドの位置の記号を参照することができる。

テープ操作

- 機械はテープを1区切り前進させたり、後進させたり、記号を記入したりできる。
- テープを前進や後退させた場合、操作前のテープ構成を $[p, x]$ とするとテープ構成は p の値に依存して次のようになる。

p の値	前進後テープ構成	後退後テープ構成
$1 \leq p \leq x $	$[p + 1, x]$	$[p - 1, x]$
$p = 0$	$[1, x]$	操作不可
$p = x + 1$	操作不可	$[x , x]$

- 書込み可能なテープにはアルファベットの記号に加えて “ \langle ” と “ \rangle ” のマーカも書込むことができる。アルファベット $\sigma \in \Sigma$ または “ \langle ” や “ \rangle ” を書込むとヘッドの位置に応じて書込み後のテープ構成は次のように変化する。なお “ \langle ” と “ \rangle ” を互いに書換えることはできない。書込み前のテープ構成を $[p, x]$ とすると

- $1 \leq p \leq |x|$ の場合

書込み記号	書込み後テープ構成
σ	$[p, x(1) \cdots x(p-1)\sigma x(p+1) \cdots x(x)]$ ヘッドの位置の記号が書換えられる
\langle	$[0, x(p+1) \cdots x(x)]$ ヘッドの位置から左側の記号列が切捨てられる
\rangle	$[p, x(1) \cdots x(p-1)]$ ヘッドの位置から右側の記号列が切捨てられる

- $p = 0$ の場合

書込み記号	書込み後テープ構成
σ	$[1, \sigma x]$ 記号列の先頭に記号が追加されヘッドはこの記号を読む
\langle	$[0, x]$ 変化なし
\rangle	書込み不可

- $p = |x| + 1$ の場合

書込み記号	書込み後テープ構成
σ	$[x + 1, x\sigma]$ 記号列の最後尾に記号が追加されヘッドはこの記号を読む
\langle	書込み不可
\rangle	$[x + 1, x]$ 変化なし

- テープ書込みの例を次に示す。ただしアルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ とする。

書込み前の テープ構成	書込み記号			
	0	1	\langle	\rangle
\downarrow 1 0	\downarrow 0 0	\downarrow 1 0	\downarrow 0	\downarrow
\downarrow 1	\downarrow 0 1	\downarrow 1 1	\downarrow 1	不可
\downarrow 0	\downarrow 0 0	\downarrow 0 1	不可	\downarrow 0

テープ構成に関するいくつかの定義

- 入力テープの構成が
 - $[1, x]$ の時すなわちヘッドが記号列の先頭にある場合を**初期テープ構成 (initial tape configuration)** という。これを $\tau^{Initial}(x)$ と表示することがある。
 - $[|x| + 1, x]$ の時すなわちヘッドが記号列の次にある場合を**最終テープ構成 (final tape configuration)** という。これを $\tau^{Final}(x)$ と表示することがある。

これらの特別テープ構成が機械による判定の条件に含まれる場合がある。

- 式 $\sigma(p, x)$ で現在ヘッドが指している記号を示す。現在のテープ記号 (current tape symbol) という。当然

$$\sigma(p, x) = \begin{cases} \langle & p = 0 \\ x(p) & 1 \leq p \leq |x| \\ \rangle & p = |x| + 1 \end{cases}$$

である。

- 式 $\rho([p, x])$ でテープ構成 $[p, x]$ のヘッド以降のテープ記号列 (remaining tape) を示している。ただし “)” は除く。

$$\rho([p, x]) = \begin{cases} \langle x & p = 0 \\ x(p)x(p+1)\cdots x(|x|) & 1 \leq p \leq |x| \\ \Lambda & p = |x| + 1 \end{cases}$$

機械の定義

- 一般に抽象機械は以上のような考え方に基づいて定義される。すなわち基本的に (有限) 状態集合、(有限) 記号集合、動作ステップの定義である。さらに機械が動作を始める時の状態と停止したときの判定条件を定義する。
- 以上の点から抽象機械 M は次の5つ組 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ で定義される。ここで
 - Q は有限な状態の集合。
 - Σ はアルファベット。
 - δ は決定的機械の動作のステップを定義する関数で**状態遷移関数 (state transition function)** と呼ばれる。非決定的な機械の場合には大文字 Δ で表示され**状態遷移関係 (state transition relation)** と呼ばれる。
 - q_0 は Q の特定の要素 ($q_0 \in Q$) である。機械が動作を開始する時必ずこの状態から開始する。**初期状態 (initial state)** と呼ばれる。

- F は Q の部分集合 ($F \subseteq Q$) である。 F は**終了状態集合** (final state set) と呼ばれる。 F の要素を**終了状態** (final state) といい機械による言語要素判定に重要な意味を持っている。
- 機械が停止した時の状態が F の要素であればこの機械は入力記号列を**受理** (accept) したという。
- そうでなければ**拒否** (reject) したという。
- 状態遷移関数 (関係) は**状態遷移表** (state transition matrix) と呼ばれることもある。これについては機械の各種類ごとに説明する。