単体的複体と被覆のホモトピー余極限

hiray

1. $K=(V,S)$ が単体的複体であるとは、S が V の空でない有限部分集合の集合で、条件 (1) $\forall v\,(v\in V \Rightarrow \{v\}\in S)$，(2) $t\subset s \wedge s\in S \Rightarrow t\in S$ をみたすこととする。V の要素は頂点とよばれ、S の要素は単体とよばれる。単体 s の次元を、$\dim s=\sharp s-1$ で定義する。$S^n=\{s\,|\,\dim s \leqq n\}$ とすれば、$K^n=(V,S^n)$ は単体的複体である。

単体的複体 $K=(V,S)$ は、S を対象の集合とし、$(s\supset t):t\to s$ を射とする小圏とみなされる。$t\subset s$ ならば $K(t,s)=\{(s\supset t)\}$、そのほかの場合は空集合である。

2. 関手 $\Delta:K\to\mathcal{T}op$ は、$\Delta(s)=\{\tau\in[0,1]^V\,|\,(v\notin s\Rightarrow\tau(v)=0)\wedge\Sigma\tau(v)=1\}$, $(s\supset t)_*:\Delta(t)\subset\Delta(s)$ $((s\supset t)_*\tau=(s\supset t)\tau=\tau)$ で定義される。

註 厳密な表記をしたほうが明解になる場合、$\tau\in\Delta(s)$ を強調して τ^s と表記する。上の定義は、「$(s\supset t)_*\tau^t=(s\supset t)\tau^t=\tau^s$ 」のように書けばよい。

2.（続き） 常識に従って簡便に済ますところだが、気が変わったので衒学的な（！？）記述をくわえる。

任意の空間 Z にかんし $\mathcal{T}op\,(K,Z)$ に適当な位相を入れた $M(K,Z)$ で、任意の空間 X（と任意の空間 Z）にかんして指数写像 $e:\mathcal{T}op\,(X\times K,Z)\to\mathcal{T}op\,(X,M(K,Z))$, $F\mapsto e(F)=[x\mapsto F(x,-)]$ が全単射になる（指数法則がなりたつ）ときに K を指数化可能空間とかデカルト的空間といい、$M(K,Z)$ の位相を指数的位相という。指数法則を全面的に用いれば、以下のようなことがなりたつ。

- $ev:M(K,Z)\times K\to Z$, $(f,k)\mapsto f(k)$ は連続である。
- 指数的位相は一意的に定まる。K が局所コンパクトであれば指数化可能空間であり、そのときの指数的位相はコンパクト開位相に一致する。
- 指数化可能空間の積は指数化可能空間である。
- $B\subset Y$ が埋め込みならば、$M(K,B)\to M(K,Y)$ も埋め込みである。
- $M(K,Y)\times M(K,Z)\to M(K,Y\times Z)$, $(f,g)\mapsto[k\mapsto(f(k),g(k))]$ は同相である。
- $M(K,\mathbb{R})$ は（位相）ヴェクトル空間である。
  たとえば、$M(K,\mathbb{R})\times M(K,\mathbb{R})\times K\to\mathbb{R}$, $(f,g,k)\mapsto(f,k,g,k)\mapsto(f(k),g(k))\mapsto f(k)+g(k)$ は連続でその随伴 $+:M(K,\mathbb{R})\times M(K,\mathbb{R})\to M(K,\mathbb{R})$ も連続である。ス

カラー倍についても同様。

- K が離散空間なら局所コンパクトで、したがって指数化可能空間である。任意の $F: X\times K \to Z$ にたいし
$$\begin{tikzcd} X\times K \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g\times 1_Z"'] & Z \\ M(K,Z)\times K \arrow[ur, "ev"'] & \end{tikzcd}$$
が可換になるような g は $g = e(F)$ で唯一である。これを読みかえれば $M(K,Z)$ は $(ev(-,k): M(K,Z)\to Z)_{k\in K}$ が射影であるような Z の K 個の”直積”であることのカテゴリー論的な表現になっている。このような場合 $M(K,Z) = Z^K$ と書くことにする。このばあい、Z がハウスドルフなら $M(K,Z) = Z^K$ はハウスドルフである。
- Z がハウスドルフならば、指数化可能空間 K について $M(K,Z)$ はハウスドルフである。

V に離散位相を入れておく。$\Delta(s)\subset[0,1]^V$ はヴェクトル空間 $\mathbb{R}^V$ のコンパクト ハウスドルフ 部分空間である。$\Delta(s)$, $[0,1]^V$ は凸集合である。

$\Delta(s)^\circ, \partial\Delta(s)$ を $\Delta(s)^\circ = \{\tau \mid \forall v\in s\,(\tau(v)>0)\}$, $\partial\Delta(s) = \{\tau\mid\exists v\in s\,(\tau(v)=0)\}$ と定義する。それぞれ、コンパクト ハウスドルフ空間 $\Delta(s)$ の開集合、閉集合である。

$\mathrm{supp}\,\tau = \{v\mid\tau(v)>0\}$ として、$\tau^{\mathrm{supp}\,\tau}\in\Delta(\mathrm{supp}\,\tau)^\circ$ を τ^s の非退化表現ということにする（「厳密な表記」）。非退化表現は一意に定まり、$\tau^s = (s\supset\mathrm{supp}\,\tau)\tau^{\mathrm{supp}\,\tau}$ と一意に書かれる。

$v\in V$ について $\delta^v\in[0,1]^V$ を、$\delta^v(w) = 1\ (w=v),\ =0\ (w\neq v)$ で定義する。$\tau\in\Delta(s)$ は、$\tau = \sum_v \tau(v)\delta^v$ と書かれる。

3. $X: K^{op}\to\mathcal{T}op$ を反変関手とする。X の幾何学的実現 $|X|$ を $|X| = X\otimes_K\Delta$ で定義する。$X^n: (K^n)^{op}\subset K^{op}\to\mathcal{T}op$ とし $F_n = X^n\otimes_{K^n}\Delta$ とおけば、F_{n-1} は F_n の閉部分集合であり、相対同相 $(\amalg_{\dim s=n}X(s)\times\Delta(s),\ \amalg_{\dim s=n}X(s)\times\partial\Delta(s))\to(F_n,F_{n-1})$ が得られる。

証明の概略は、hiray ,「幾何学的実現について」に書いた。

以下の記述は、$\forall s\in S\ (X(s) = *)$ なる関手の幾何学的実現が単体的複体 K の幾何学的実現であることを述べている。

$\amalg_{s\in S}\Delta(s)$ において、関係 $(s\supset t)\alpha T\alpha$ によって定義された同値関係 R による商空間を K の幾何学的実現といい $|K|$ と表記する。包含写像 $1^{\Delta(s)}_{[0,1]^V}: \Delta(s)\subset[0,1]^V$ を用いて $<1^{\Delta(s)}_{[0,1]^V}>_s$: $\amalg_{s\in S}\Delta(s)\to[0,1]^V$ を定義すれば、$R = R_{<1^{\Delta(s)}_{[0,1]^V}>_s}$ であるから、$|K|$ は、集合としては $\cup_{s\in S}\Delta(s)$ と同一であり、位相を（ＣＷ複体の位相に）入れ替えたものに過ぎない。また、古典的な余極限の定義（余等置者を用いたやつ）と同値関係を比較してみれば、

$\mathrm{colim}_K\Delta = |K|$ でもある。

4. E を $n+1$- 要素の有限集合とする。空でない部分集合の全体を単体とする単体的複体 $K(E) = (E, \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\})$ の幾何学的実現は、$\Delta(E)$ であり（E は $K(E)$ の終対象）幾何学的な n- 単体である。

$K(E)$ の（圏としての）ナーヴ $NK(E)$ は、その非退化要素にフェイス オペレータを作用させても非退化となるので、ナーヴの非退化要素の全体 $NNK(E)$ は、前単体的集合と考えてよい。

$NNK(E)_n = \{E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_n\}$、$\mu \in \boldsymbol{M}([k],[n])$ にたいして、$(E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_n)\mu = (E_{\mu(0)} \supsetneq E_{\mu(1)} \supsetneq \cdots \supsetneq E_{\mu(k)})$

註 $NNK(E)$ の二番目の N は小圏に対するナーヴ、前の N は非退化要素の全体のつもり。同じ記号では都合が悪いが、このままにしておく。

命題 0.1　$|NNK(E)| = NNK(E) \otimes_{\boldsymbol{M}} \Delta^*$ は、$\Delta(E)$ の重心細分と同相である。

- $h : \amalg_{0\leq n} NNK(E)_n \times \Delta^n \to \Delta(E)$ を、$h(e,t) = t_0 b(E_0) + t_1 b(E_1) + \cdots + t_n b(E_n)$ で定義する。ただし、$e = (E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_n)$, $t = (t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \Delta^n$, $b(E_i) = \dfrac{1}{\sharp E_i} \sum_{v\in E_i} \delta^v$ である。$\Delta(E)$ は凸であるから $h(e,t) \in \Delta(E)$ であり、うまく定義されている。
  $\amalg_{0\leq n} NNK(E)_n \times \Delta^n$ はコンパクト ハウスドルフで、$\Delta(E)$ がハウスドルフであるから、h はコンパクトである（すぐに示すように h は全射であるから閉全射、よって等化写像である）。
- $h(e\mu, t) = \sum_{0\leq i\leq m} t_i b(E_{\mu(i)}) = \sum_{0\leq j\leq n} (\mu t)_j b(E_j) = h(e, \mu t)$ が成り立つ（$(\mu t)_j = 0\ (j \neq \mu(i)), = t_i\ (j = \mu(i))$ をもちいている）。したがって、h により $\tilde{h} : |NNK(E)| \to \Delta(E)$ が導かれる。
- 可換図式
$$\begin{tikzcd} \amalg_{0\leq n} NNK(E)_n \times (\Delta^n)^\circ \arrow[r, "\subset"] & \amalg_{0\leq n} NNK(E)_n \times \Delta^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h"] & {|NNK(E)|} \arrow[dl, "\tilde{h}"] \\ & \Delta(E) & \end{tikzcd}$$
  において、h の $\amalg_{0\leq n} NNK(E)_n \times (\Delta^n)^\circ$ への制限が全単射であることを示せば $\tilde{h}$ は同相写像になる。なぜなら、π の $\amalg_{0\leq n} NNK(E)_n \times (\Delta^n)^\circ$ への制限も全単射であるから $\tilde{h}$ は全単射で、h が等化写像であるから。
- （全射） 任意の $\tau \in \Delta(E)$ をとる（$\tau = \sum_{v\in E} \tau(v)\delta^v$）。
  $\mathrm{supp}\,\tau = \{v \,|\, \tau(v) > 0\}$, $\{\tau(v) \,|\, \tau(v) > 0\} = \{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$ $(t_0 < t_1 < \cdots < t_k)$, $G_i = \{v \,|\, \tau(v) = t_i\}$ $(\sharp G_i = m_i)$ とし、さらに $E_i = \amalg_{i\leq j\leq k} G_j$ とおく。$E_0 = \mathrm{supp}\,\tau, E_k = G_k$

である。$p_i = \sum_{i\le j\le k} m_i$ としておく。

$$\tau = \sum_{v\in E_0} \tau(v)\delta^v = t_0 \sum_{v\in G_0} \delta^v + t_1 \sum_{v\in G_1} \delta^v + \cdots + t_i \sum_{v\in G_i} \delta^v + \cdots + t_k \sum_{v\in G_k} \delta^v$$

であるが i-項を、$t_i \sum_{v\in G_i} \delta^v = t_0 \sum_{v\in G_i} \delta^v + (t_1 - t_0) \sum_{v\in G_i} \delta^v + \cdots + (t_i - t_{i-1}) \sum_{v\in G_i} \delta^v$ と書き換えて、$t_0,\, t_i - t_{i-1}$ でくくれば、

$$\tau = t_0 \sum_{v\in E_0} \delta^v + (t_1 - t_0) \sum_{v\in E_1} \delta^v + \cdots + (t_i - t_{i-1}) \sum_{v\in E_i} \delta^v + \cdots + (t_k - t_{k-1}) \sum_{v\in E_k} \delta^v$$

となる。

$$\tau = t_0 p_0 b(E_0) + (t_1 - t_0) p_1 b(E_1) + \cdots + (t_i - t_{i-1}) p_i b(E_i) + \cdots + (t_k - t_{k-1}) p_k b(E_k)$$

が得られた。$E_0 = \operatorname{supp}\tau = \amalg G_j$ により $1 = \sum_{v\in E_0} \tau(v) = \sum_{0\le i\le k} t_i m_i$ であった。これを、上とまったく同様に $t_i m_i = t_0 m_i + (t_1 - t_0) m_i + \cdots (t_i - t_{i-1}) m_i$ とおいて $t_0,\, t_i - t_{i-1}$ でくくれば、$t_0 p_0 + \sum_{1\le i\le k} (t_i - t_{i-1}) p_i = 1$ が得られる。$t_0 p_0,\, (t_i - t_{i-1}) p_i > 0$ は自明。$s = (s_0, \cdots, s_i, \cdots, s_k) = (t_0 p_0, \cdots, (t_i - t_{i-1}) p_i, \cdots, (t_k - t_{k-1}) p_k)$ とおけば、$\tau = h(e, s)$ である。

- （単射）$\tau = h(e', u)$, $e' = (F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_\ell)$, $u = (u_0, u_1, \cdots, u_\ell) \in (\Delta^\ell)^\circ$ とする。$\sharp F_i = q_i, H_i = F_i - F_{i-1}, H_\ell = F_\ell$ とおけば、$F_i = \amalg_{i\le j\le \ell} H_j$ である。

$$\begin{aligned}\tau &= u_0 b(F_0) + \cdots + u_\ell b(F_\ell) \\ &= \frac{u_0}{q_0} \sum_{v\in F_0} \delta^v + \cdots + \frac{u_i}{q_i} \sum_{v\in F_i} \delta^v + \cdots + \frac{u_\ell}{p_\ell} \sum_{v\in F_\ell} \delta^v \\ &= \frac{u_0}{q_0} \sum_{v\in H_0} \delta^v + \cdots + \left(\frac{u_0}{q_0} + \cdots + \frac{u_i}{q_i}\right) \sum_{v\in H_i} \delta^v + \cdots + \left(\frac{u_0}{q_0} + \cdots + \frac{u_\ell}{q_\ell}\right) \sum_{v\in H_\ell} \delta^v\end{aligned}$$

$\tau = \sum_{v\in E} \tau(v)\delta^v$ であるから、$\{\, \tau(v) \mid \tau(v) > 0 \,\} = \{\, \tau(v) \mid v \in E_0 \,\} = \{\, \tau(v) \mid v \in F_0 \,\}$ であり、具体的には

$$(t_0, \cdots, t_i, \cdots, t_k) = \left(\frac{u_0}{q_0}, \cdots, \left(\frac{u_0}{q_0} + \cdots + \frac{u_i}{q_i}\right), \cdots, \left(\frac{u_0}{q_0} + \cdots + \frac{u_\ell}{q_\ell}\right)\right)$$

でなければならない。したがって、$k = \ell$, $E_0 = F_0$ であり、$\{\, v \mid \tau(v) = t_i \,\} = G_i = H_i$ である。ゆえに、$e = e'$ となる。$t_i = \frac{u_0}{q_0} + \cdots + \frac{u_i}{q_i}$, $p_i = q_i$ より、$s_i = (t_i - t_{i-1}) p_i = \frac{u_i}{q_i} p_i = u_i$ となり、$s = u$ である。

- $F \subset E$ ならば、次は可換である。h の定義を書き下せばすぐにわかる。

$$
\begin{array}{ccc}
\amalg_{0\le n} NNK(F)_n \times \Delta^n & \xrightarrow{h} & \Delta(F) \\
\downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
\amalg_{0\le n} NNK(E)_n \times \Delta^n & \xrightarrow{h} & \Delta(E)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
|NNK(F)| & \xrightarrow{\tilde{h}} & \Delta(F) \\
\downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
|NNK(E)| & \xrightarrow{\tilde{h}} & \Delta(E)
\end{array}
$$

5. 単体複体 $K = (V, S)$ の単体は、$s, t \in S$ と表記してきたが、幾何学的単体の重心座標の表現や、ホモトピーのパラメータなどと紛らわしいので $E, F \in S$ などで表わすことにする。

K の単体 E の幾何学的実現は $\Delta(E)$ であった。対応する重心細分はコンマ圏 $(K \downarrow E)$ をもちいて、$\tilde{h} : |NN(K \downarrow E)| \to \Delta(E)$ とすればよい。$e = (E \supset E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n) \in NN(K \downarrow E)_n$, $t = (t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \Delta^n$ として、$h(e, t) = t_0 b(E_0) + t_1 b(E_1) + \cdots + t_n b(E_n)$ で定義する。前命題の最後の註により、自然変換の同型 $\tilde{h} : |NN(K \downarrow \cdot)| \to \Delta(\cdot)$ が与えられていると考えてよい。

$X : K^{op} \to \mathcal{T}op$ に対し、その幾何学的実現(ホモトピー余極限)$X \otimes_K \Delta$ が定義された。$X \otimes_K |NN(K \downarrow \cdot)| \cong X \otimes_K \Delta$ は同相である。

$X = *$ の場合、右辺は単体複体 K の幾何学的実現 $|K|$ であり左辺がその重心細分である。

$X \otimes_K |NN(K \downarrow \cdot)| = X \otimes_K (NN(K \downarrow \cdot) \otimes_{\boldsymbol{M}} \Delta^*)$ であるが、コエンドの結合律が成り立つ。なぜなら、h がコンパクト写像であったから $\amalg_{0\le n} NN(K \downarrow E)_n \times \Delta^n \to NN(K \downarrow E) \otimes_{\boldsymbol{M}} \Delta^*$ もコンパクトで $X(E) \times \amalg_{0\le n} NN(K \downarrow E)_n \times \Delta^n \to X(E) \times (NN(K \downarrow E) \otimes_{\boldsymbol{M}} \Delta^*)$ が閉写像で等化となり、したがって辺々に $\amalg_{E\in S}$ としても等化写像であるからである。

註 集合の圏に値をとるコエンドの結合律については Gelfand-Manin , Method of Homological algebra の最初の部分に書いてある。その解説は、hiray,「単体的空間、単体的集合、三角形分割空間」(未定稿)(位相空間の圏に値をとる関手を意識した記述をしている)にある。

6. 前単体的空間 $X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot)$ の構造を調べる。

- $W = \amalg_{0\le n} \amalg_{E\in S} X(E) \times NN(K \downarrow E)_n$ とおき、$x \in X(E)$, $e = (F \supset F_0 \supsetneqq F_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq F_n) \in NN(K \downarrow F)_n$ につき関係 $(x(E \supset F), e) T (x, (E \supset F)e)$ を定義し($(E \supset F)e = (E \supset F_0 \supsetneqq F_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq F_n) \in NN(K \downarrow E)_n$)、その生成する同値関係を R とする。$X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot) = W/R$ と定義される。
- ところが、関係 T は n を横断せず、$W(n) = \amalg_{E\in S} X(E) \times NN(K \downarrow E)_n$ 上の関係 $T(n)$(と書いておく)の和 $\amalg_{0\le n} T(n)$ である。当然、$R = \amalg_{0\le n} R(n)$ である。したがって、

$X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot) = \amalg_{0 \le n} W(n)/R(n)$ である。積と違って、余積と同値関係は相性が良い。

$\pi(n) : W(n) \to W(n)/R(n) = X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot)_n$ とする。

- $X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot)_n$ を調べるのに幾何学的実現の手法が適用できる。
  $e = (E = E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n)$ の形の元を非退化元とよび その全体を $NN(K \downarrow E)_n^\circ$ と表記する。$N(n) = \amalg_{E \in S} X(E) \times NN(K \downarrow E)_n^\circ$ とする。$p : W(n) \to W(n)$ を $p(x,e) = (x(E \supset E_0), (E_0 = E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n)$ で定義すれば、$p^2 = p, \mathrm{Im} p = N(n)$ である。$\deg(x,e) = \sharp E - 1$ として、次のふたつの性質がみたされる。
  (A) $\forall (x,e) \, (\, p(x,e) T(n)(x,e) \, \wedge (\, p(x,e) \neq (x,e) \Rightarrow \deg p(x,e) < \deg(x,e)\,)\,)$
  (B) $\forall (x,e), (y,f) \, (\, (x,e) T(n)(y,f) \to p(x,e) = p(y,f)\,)$

命題 0.2　$\pi(n)^{N(n)} : N(n) \subset W(n) \to X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot)_n$ は同相写像である。

証明　性質 (A)、(B) により全単射である。$NN(K \downarrow E)_n$ は離散空間で、$(E \supset E_0)^* : X(E) \to X(E_0)$ は連続であるから、p は連続写像である。$p_{N(n)} : W(n) \to N(n)$ は $N(n) \subset W(n)$ のレトラクションであり、したがって等化写像である。次の可換図式により $\pi(n)^{N(n)}$ は同相である。

$$\begin{tikzcd} W(n) \arrow[r, "\pi(n)"] \arrow[d, "p_{N(n)}"'] & X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot)_n \\ N(n) \arrow[ur, "\pi(n)^{N(n)}"'] & \end{tikzcd}$$

- $p_X : \amalg_{E \in S} X(E) \to S$ は、$p^{X(E)} = c_E$ であるような連続関数とする。$q : NNK \to S$ は $(E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n) \mapsto E_0$ であるような連続関数とする。そのファイバー積を $X \square_S NNK_n$ とする。その次数つき位相空間を $X \square_S NNK = \amalg_{0 \le n} X \square_S NNK_n$ とし、$\mu \in \boldsymbol{M}([k],[n])$ による作用を $(x, (E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n))\mu = (x(E_0 \supset E_{\mu(0)}), (E_{\mu(0)} \supsetneqq E_{\mu(1)} \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_{\mu(k)})$ で定義すれば、$X \square_S NNK$ は前単体的空間になる。
  $(x, (E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n)) \mapsto (x, (E_0 = E_0 \supsetneqq E_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq E_n))$ は次数つき位相空間の同相 $X \square_S NNK \to \amalg_{0 \le n} N(n)$ を導く。次の証明は易しい。

命題 0.3　$X \square_S NNK \to W \to X \otimes_K NN(K \downarrow \cdot)$ は前単体的空間の同型を導く。

$|X \square_S NNK| \cong |X|$ が得られた。左辺をホモトピー余極限 $|X|$ の重心細分という。

7. $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ を位相空間 X の被覆とする。$\{\, j \,|\, U_j \neq \emptyset \,\}$ を頂点の集合とし、$\{\, E \,|\, \cap_{j \in E} U_j \neq \emptyset \,\}$ を単体とする単体複体が定まる。これを、$\mathcal{U}$ に関するナーヴといい $N\mathcal{U}$ と表記する（ま

たしても N)。$E \mapsto U_E = \cap_{j\in E} U_j$, $(E \supset F) \mapsto U_E \subset U_F$ により反変関手 $U_{\cdot} : N\mathcal{U} \to \mathcal{T}op$ が定まる。

X を被覆するのに空集合を用いるのはなんだか変なので、ここでは除外しておくことにする($N\mathcal{U}$ の頂点の集合は J)。

6. の結果により、$|U_{\cdot}\square_S NNN\mathcal{U}| \cong |U_{\cdot}|$ であるが、tom Dieck, T. , Algebraic topology で左辺(と同値なもの)を $B'(\mathcal{U})$、右辺を $B(\mathcal{U})$ としている。左辺は昔々 Segal, G. が導入したものである。$\mathcal{U}$ が numerable ならば、自然な写像 $|U_{\cdot}\square_S NNK| \to X$ がシュリンカブル(X 上ホモトピー同値)だ、とあったが証明がわからず難儀した。tom Dieck , chapter 13 に証明が書いてある。ネット上の膨大な訂正を見ながら読めばよい。1 の分解のところは錯綜して読みにくいようだが、意外にわかり易い。ただそのあと、そこで導入された $C(\mathcal{U})$ の定義の仕方がわかりにくく、また (13.2.2) Prop. の証明が了解できていない。

以下に、勝手に修正を加えたものを書いておく。

「勝手にコレクション (correction)」: tom Dieck, T. , Algebraic topology, chapter 13

8. $B(\mathcal{U}) = |U_{\cdot}|$ に関して、$\amalg_E U_E \times \Delta(E)^\circ \subset \amalg_E U_E \times \Delta(E) \to B(\mathcal{U})$ は全単射である。また、$\iota_E : U_E \times \Delta(E) \subset X \times [0,1]^J$ を包含写像とし、$\langle\iota_E\rangle : \amalg_E U_E \times \Delta(E) \to X \times [0,1]^J$ とするとき、$(x(E \supset F), \tau)T(x, (E \supset F)\tau) \Rightarrow \langle\iota_E\rangle(x(E \supset F), \tau) = (x, \tau) = \langle\iota_E\rangle(x, (E \supset F)\tau)$ より、$\rho : B(\mathcal{U}) \to X \times [0,1]^J$ がみちびかれる。$proj_X \circ \rho : B(\mathcal{U}) \to X$ で X-上空間とする。$\mathrm{Im}\rho = \cup_E U_E \times \Delta(E)$ である。$C(\mathcal{U}) = \cup_E U_E \times \Delta(E)$ と表記する。これも、$C(\mathcal{U}) \subset X \times [0,1]^J \to X$ で X-上空間としておく。$(x,\tau) \in \amalg_E U_E \times \Delta(E)^\circ, (y,\sigma) \in \amalg_F U_E \times \Delta(F)^\circ$ とすれば、$\mathrm{supp}\,\tau = E, \mathrm{supp}\,\sigma = F$ である。もし、$\langle\iota_E\rangle(x,\tau) = \langle\iota_E\rangle(y,\sigma)$ ならば、$(x,\tau) = (y,\sigma) \in X \times [0,1]^J$ であるが、$\tau = \sigma$ より $E = F$ となるので $(x,\tau) = (y,\sigma) \in U_E \times \Delta(E)^\circ$ である。ゆえに、$\langle\iota_E\rangle$ の $\amalg_E U_E \times \Delta(E)^\circ$ への制限は単射である。これより、ρ は単射であり、(X-上)連続全単射 $\rho_{C(\mathcal{U})} : B(\mathcal{U}) \to C(\mathcal{U})$ が導かれる。

$$
\begin{tikzcd}
\amalg_E U_E \times \Delta(E)^\circ \arrow[r, "\subset"] & \amalg_E U_E \times \Delta(E) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\langle\iota_E\rangle"'] & B(\mathcal{U}) \arrow[d, "\rho"] \\
 & & X \times [0,1]^J
\end{tikzcd}
$$

9. $t_j : C(\mathcal{U}) \to [0,1]$, $(x,\tau) \mapsto \tau(j)$ は 1 の分解で、各点有限である。すなわち、$(x,\tau) \in C(\mathcal{U})$ を任意にとり固定すれば、$\sum_j t_j(x,\tau)$ が有限和で値は 1 である。各点有限ならば一般化された 1 の分解(総和可能)であり $(t_j^{-1}(0,1])_{j\in J}$ は a numerable covering である

((13.1.7) Lemma)。したがって、局所有限な 1 の分解 $(s_j)_{j\in J}$ で $C\ell s_j^{-1}(0,1] \subset t_j^{-1}(0,1]$ をみたすものが存在する。

$C(\mathcal{U})\times J \to [0,1]$, $((x,\tau),j) \mapsto s_j(x,\tau)$ の随伴 $\sigma : C(\mathcal{U}) \to [0,1]^J$ をもちいて、$(1_X,\sigma) : C(\mathcal{U}) \to X\times[0,1]^J$, $(x,\tau) \mapsto (x,\sigma(x,\tau))$ とする。任意の $(x,\tau) \in U_E\times\Delta(E)$ をとる。$s_j^{-1}(0,1] \subset C\ell s_j^{-1}(0,1] \subset t_j^{-1}(0,1]$ により、$s_j(x,\tau) \neq 0 \Rightarrow t_j(x,\tau) = \tau(j) \neq 0 \Rightarrow j \in E$ であることから $\sigma(x,\tau) \in \Delta(E)$ となり、$(1_X,\sigma)(U_E\times\Delta(E)) \subset U_E\times\Delta(E)$ が示された。したがって、$(1_X,\sigma)_{C(\mathcal{U})} : C(\mathcal{U}) \to C(\mathcal{U})$ である。そのリフト $\lambda : C(\mathcal{U}) \to B(\mathcal{U})$, $\rho\circ\lambda = (1_X,\sigma)_{C(\mathcal{U})}$ の存在を示したい。具体的には、任意の $(x_0,\tau_0) \in C(\mathcal{U})$ にたいし $(x_0,\tau_0) \in W$ かつ $(1_X,\sigma)(W) \subset U_E\times\Delta(E)$ となるような $C(\mathcal{U})$ の開集合 W が存在することを示せばよい。

- $O, A \subset Y$ かつ O は開集合とする。「$O\cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow O\cap C\ell A \neq \emptyset$ 」である。
- 任意に $(x_0,\tau_0) \in C(\mathcal{U}) = \cup_E U_E\times\Delta(E)$ をとる。いま、$(x_0,\tau_0) \in U_E\times\Delta(E)$ としておく。

  $(s_j)_{j\in J}$ は局所有限な 1 の分解であるから、$\{\, j \,|\, W_0\cap s_j^{-1}(0,1] \neq \emptyset\}$ が有限集合でかつ $(x_0,\tau_0) \in W_0$ であるような開集合 $W_0 \subset C(\mathcal{U})$ が存在するが、さらに $W_0 \subset U_E\times[0,1]^J$ をみたすように小さくしておく。$J_0 = \{\, j \,|\, W_0\cap s_j^{-1}(0,1] \neq \emptyset\} = \{\, j \,|\, W_0\cap C\ell s_j^{-1}(0,1] \neq \emptyset\}$ と表記する。
- $E_0 = \{\, j \,|\, (x_0,\tau_0) \in C\ell s_j^{-1}(0,1]\}$ とおけば $E_0 \subset J_0$ であり、$E_0 \subset E$ もなりたつ。なぜなら、任意の $j \in E_0$ にたいし $(x_0,\tau_0) \in C\ell s_j^{-1}(0,1] \subset t_j^{-1}(0,1]$ であり、したがって $t_j(x_0,\tau_0) = \tau_0(j) > 0$ となり、$j \in E$ であるから。
- $W = W_0 - (\cup_{k\in J_0-E_0} C\ell s_k^{-1}(0,1])$ は $(x_0,\tau_0) \in W$ をみたす開集合である。

  任意に $(x,\tau) \in W$ をとる。まず、$x \in U_E$ である。$\sigma(x,\tau) \in \Delta(E)$ を示したい。

  $s_j(x,\tau) > 0$ は $(x,\tau) \in W_0\cap s_j^{-1}(0,1]$ を意味し、$j \in J_0$ である。* また任意の $k \in J_0 - E_0$ にたいし $s_k(x,\tau) = 0$ であるから、対偶をとってまとめれば、$\{\, j \,|\, s_j(x,\tau) > 0\} = \{\, j \,|\, \sigma(x,\tau)(j) \neq 0\} \subset E_0 \subset E$ となる。$\sigma(x,\tau) \in \Delta(E)$ が示された。$(1_X,\sigma)(x,\tau) \in U_E\times\Delta(E)$ となり、目的が達せられた。つぎの可換図式が得られた。

$$\begin{tikzcd} B(\mathcal{U}) \arrow[r, "\lambda\circ\rho"] \arrow[d, "\rho"] & B(\mathcal{U}) \arrow[d, "\rho"] \\ C(\mathcal{U}) \arrow[r, "\rho\circ\lambda"] & C(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

「*: $(x,\tau) \in W_0\cap C(\cup_{k\in J_0-E_0} C\ell s_k^{-1}(0,1]) \subset \cap_{k\in J_0-E_0} CC\ell s_k^{-1}(0,1] \subset \cap_{k\in J_0-E_0} Cs_k^{-1}(0,1]$ すなわち、$\forall k \in J_0 - E_0\,(\,s_k(x,\tau) = 0\,)$ 」

命題 0.4　ρ は X-上ホモトピー同値で、λ がホモトピー逆写像である。

- $C(\mathcal{U})\times I \to C(\mathcal{U})$, $((x,\tau),t) \mapsto (x, t\tau + (1-t)\sigma(x,\tau))$ が、$(1_X, \sigma)_{C(\mathcal{U})} = \rho\circ\lambda$ と $1_{C(\mathcal{U})}$ のホモトピー、で済ませば簡明であるがその度胸がない。
  $C(\mathcal{U})\times I\times J \to [0,1]$, $((x,\tau),t,j) \mapsto t\tau(j) + (1-t)s_j(x,\tau)$ の随伴 $C(\mathcal{U})\times I \to [0,1]^J$ をもちいて、連続写像 $C(\mathcal{U})\times I \to X\times[0,1]^J$
  $$((x,\tau),t) \mapsto (x, [j \mapsto t\tau(j) + (1-t)s_j(x,\tau)]) = (x, \sum_j \{t\tau(j) + (1-t)s_j(x,\tau)\}\delta^j)$$
  をつくる。$(x,\tau) \in U_E\times\Delta(E)$ であるような E と任意の $t\in I$ にたいし、$j\notin E$ ならば $t\tau(j) + (1-t)s_j(x,\tau) = 0$ でかつ $\sum_{j\in E} t\tau(j) + (1-t)s_j(x,\tau) = 1$ である。ゆえに、$(x, [j\mapsto t\tau(j) + (1-t)s_j(x,\tau)]) \in U_E\times\Delta(E) \subset C(\mathcal{U})$ である。求めるホモトピー $h: C(\mathcal{U})\times I \to C(\mathcal{U})$ が定義された。
- 前項により、次の可換図式が存在する。

$$\begin{tikzcd} U_E\times\Delta(E)\times I \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & C(\mathcal{U})\times I \arrow[d, "h"] \\ U_E\times\Delta(E) \arrow[r, "\subset"] & C(\mathcal{U}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{\amalg_E U_E\times\Delta(E)\}\times I \arrow[r, "\langle\iota_E\rangle\times I"] \arrow[d] & C(\mathcal{U})\times I \arrow[d, "h"] \\ \amalg_E U_E\times\Delta(E) \arrow[r, "\langle\iota_E\rangle"] & C(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

  また、$\rho\circ\tilde{h} = h\circ\rho$ であるような集合としての写像 $\tilde{h}: B(\mathcal{U})\times I \cdots > B(\mathcal{U})$ が唯一つ定まり、$\rho\circ\pi = \langle\iota_E\rangle$ により、上の右側の可換図式は次のように分解される。

$$\begin{tikzcd} \{\amalg_E U_E\times\Delta(E)\}\times I \arrow[r, "\pi\times I"] \arrow[d] & B(\mathcal{U})\times I \arrow[r, "\rho\times I"] \arrow[d, dotted, "\tilde{h}"] & C(\mathcal{U})\times I \arrow[d, "h"] \\ \amalg_E U_E\times\Delta(E) \arrow[r, "\pi"] & B(\mathcal{U}) \arrow[r, "\rho"] & C(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

  左側の四角は可換であり、I が局所コンパクトであることから $\pi\times 1_I$ が等化写像である。したがって、$\tilde{h}$ は連続であり $\lambda\circ\rho$ と $1_{B(\mathcal{U})}$ のホモトピーである。

命題 0.5　X の被覆 $\mathcal{U}$ が numerable ならば、$C(\mathcal{U}) \to X$ は X-上ホモトピー同値（shrinkable）である。したがって、$B(\mathcal{U}) \to X$ もそうである。

- 条件により、X の局所有限な 1 の分解 $(u_j)_{j\in J}$ で $C\ell u_j^{-1}(0,1] \subset U_j$ となるものが存在する。すなわち、任意の $x\in X$ にたいし $x\in W_x\subset X$ をみたす開集合で $J_x = \{\, j \,|\, W_x\cap u_j^{-1}(0,1] \neq \emptyset\}$ が有限集合であるようなものが存在する。
  $F_x = \{\, j \,|\, x\in C\ell u^{-1}(0,1]\}$ とする。$F_x\subset J_x$, $x\in U_{F_x}$ がなりたつ。

- $X \times J \to [0,1], (x,j) \mapsto u_j(x)$ の随伴 $\upsilon : X \to [0,1]^J$ を用いて $s : X \to X \times [0,1]^J, x \mapsto (x, \upsilon(x))$ と定義する。前項により、$\upsilon(x)(j) = u_j(x) \neq 0 \Rightarrow x \in u_j^{-1}(0,1] \subset C\ell u^{-1}(0,1] \Rightarrow j \in F_x$ であることから $\upsilon(x) \in \Delta(F_x)$ であり、$s(x) = (x, \upsilon(x)) \in U_{F_x} \times \Delta(F_x) \subset C(\mathcal{U})$ となる。
- $C(\mathcal{U}) \times I \times J \to [0,1], ((x,\tau),t,j) \mapsto t\tau(j) + (1-t)u_j(x)$ の随伴を用いて、$C(\mathcal{U}) \times I \to X \times [0,1]^J, ((x,\tau),t) \mapsto (x, [j \mapsto t\tau(j) + (1-t)u_j(x)])$ とする。
  $(x,\tau) \in U_E \times \Delta(E) \subset C(\mathcal{U})$ であれば、$x \in U_E \cap U_{F_x} = U_{E \cup F_x}$ で $E \cup F_x$ は単体である。したがって、$\tau \in \Delta(E) \subset \Delta(E \cup F_x), \upsilon \in \Delta(F_x) \subset \Delta(E \cup F_x)$ である。$t\tau + (1-t)\upsilon = [j \mapsto t\tau(j) + (1-t)u_j(x)] \in \Delta(E \cup F_x)$ とかんがえられる。$(x, t\tau + (1-t)\upsilon) \in U_{E \cup F_x} \times \Delta(E \cup F_x) \subset C(\mathcal{U})$ であり、求める X-上ホモトピーが得られた。
- 前命題とあわせて、$B(\mathcal{U}) \to X$ も X-上ホモトピー同値（shrinkable）である。