

レトラクションについて

1 レトラクション

$f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$, $f(A) \subset B$ であるとき、(実体は f と同じ)写像 $a \mapsto f(a)$, $a \in A$, $f(a) \in B$ を $f_B^A: A \rightarrow B$ と書く。 f_Y^A , f_B^X , f_A^A (が定義されるとき、これら) を f^A , f_B , $f|_A$ と略記する。くり返すが、あくまで写像としての実体は f である。

〈これらの記号は数学者のコミュニティに認められているものではない。大学院入試などで当然のように用いてはならない。〉

この記号を厳密に適用すれば、うるさいことになる。よって、普段は適当にやっ必要なときにこういう記号を用いるというのが妥当である。次のような公式を作ってみた。

- $g_C^B \circ f_B^A = (g \circ f)_C^A$ とくに、 $f \circ 1_X^A = f^A$, $1_{B_1}^B \circ f_B^A = f_{B_1}^A$, $1_Y^B \circ f_B^A = f^A$, $1_Y^B \circ f_B = f$, $\dots$
- $(g \circ f)_C^A$ が定義されるとき ($\Leftrightarrow f(A) \subset g^{-1}C$)、 $f(A) \subset \forall B \subset g^{-1}C$ にたいし $(g \circ f)_C^A = g_C^B \circ f_B^A$
- $(f_B^A)^{-1}(B_1) = A \cap f^{-1}(B_1)$

補題 1.1 (整形補題) $A \subset X$, $B \subset Y$, $f: A \rightarrow B$, $g: Y \rightarrow X$, $g \circ f = 1_X^A$ とする。このとき、 $f(A) \subset B \cap g^{-1}A$, $g(B \cap g^{-1}A) \subset A$ である。すなわち、 $g \circ f = 1_A$ 。

註 1.2 $g(f(a)) = a$ なのだが、源(定義域)と的(値域)にずれがあってもややもやとしている。この補題は、 f の源はそのまま f の的の評価をやり直して小さく取り替えることができ、 g の源をそこに縮小すれば、ほんとうの意味で g が f の左逆写像になっていると、主張している。つまらない主張だが、これに足をすくわれた本(や教科書)は多い。

証明 $g(f(A)) = A$ より $f(A) \subset g^{-1}A$ である。 $f(A) \subset B$ とあわせて、 $f(A) \subset B \cap g^{-1}A$ がえられる。 $g(B \cap g^{-1}A) \subset g(g^{-1}A) \subset A$ は自明。

ここまでは、集合と(集合のあいだの)写像の言葉で記述したが、以下は位相空間と連続写像の言葉で記述する。すべてのことは、どちらでも成り立つから翻訳して読めばよい。もちろんユークリッド空間の図形と滑らかな写像(C^∞ -級の写像)にも翻訳できる。

定義 1.3 連続写像 $s: X \rightarrow Y$, $r: Y \rightarrow X$ が $r \circ s = 1_X$ をみたすとき、 r を s の左逆写像、 s を r の右逆写像という。位相幾何の言葉では、 X は Y のレトラクトであるといい、 r をレトラクションという。

命題 1.4 $s_{\text{Im } s} : X \rightarrow \text{Im } s$ は同相で、 $r^{\text{Im } s}$ が逆写像である。

証明 s は (連続) 単射である。したがって、標準分解 $s = 1_Y^{\text{Im } s} \circ s_{\text{Im } s}$ において $s_{\text{Im } s}$ は連続全単射であるが、 $1_X = r \circ s = r \circ (1_Y^{\text{Im } s} \circ s_{\text{Im } s}) = (r \circ 1_Y^{\text{Im } s}) \circ s_{\text{Im } s} = r^{\text{Im } s} \circ s_{\text{Im } s}$ であるから、 $r^{\text{Im } s}$ が $s_{\text{Im } s}$ の左逆写像になっている。集合の圏で、全 (単) 射の左逆写像は逆写像であるから証明終り、としてもよいのだが次のように、 $r^{\text{Im } s}$ が $s_{\text{Im } s}$ の右逆写像でもあることを直接に示すことができる。

「 $y \in \text{Im } s \Leftrightarrow s(r(y)) = y$ 」より、任意の $y \in \text{Im } s$ にたいして $s_{\text{Im } s} \circ r^{\text{Im } s}(y) = y$ となる。

註 ”” 全射の左逆写像は逆写像である” の証明。 $g \circ f = 1$ で f が全射とする。 $(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ 1 = f = 1 \circ f$ 、ここで f が全射であることから $f \circ g = 1$ となる。

補題 1.5 (レトラクションの縮小) $M \subset Y$ とし、 $W \subset Y$ は開集合、 $s : U \rightarrow W, r : W \rightarrow U$ は連続で、 $r \circ s = 1_U$, $s(U) = M \cap W$ をみたすものとする。この時、任意の開集合 $W' \subset Y$ にたいし $U_0 = s^{-1}W'$ とおけば、 $s(U_0) \subset W_0 \subset r^{-1}U_0$ をみたす任意の開集合 $W_0 \subset Y$ にたいし、次が成り立つ。

- (1) $s(U_0) = M \cap W_0 = M \cap W \cap W'$ 、
- (2) $s : U_0 \rightarrow W_0, r : W_0 \rightarrow U_0, r \circ s = 1_{U_0}$ 。

証明

- そもそも一般的に、任意の開集合 $U_0 \subset U, W' \subset Y$ にたいし、 $s^{-1}W' = U_0$ がなりたてば $s(U_0) = s(s^{-1}W') = s(U) \cap W' = M \cap W \cap W'$ となる。したがってまた、任意の開集合 $U_0 \subset U$ にたいし $s(U_0) \subset W_0 \subset r^{-1}U_0$ をみたす任意の開集合 $W_0 \subset Y$ をとれば、 $U_0 \subset s^{-1}W_0 \subset s^{-1}r^{-1}U_0 = U_0$ がなりたつことから $s(U_0) = M \cap W_0$ となる。(1) の証明終わり。($s(U_0) \subset W_0 \subset r^{-1}U_0 \cap W'$ である W_0 をとることは妨げられない (としたければそうすればよい)。)
- 整形するまでもなく、 $s : U_0 \rightarrow r^{-1}U_0, r : r^{-1}U_0 \rightarrow U_0, r \circ s = 1_{U_0}$ となる。 $s(U_0) \subset W_0 \subset r^{-1}U_0$ ならば、 s の的と r の源を W_0 に縮小して、 $s : U_0 \rightarrow W_0, r : W_0 \rightarrow U_0, r \circ s = 1_{U_0}$ が得られる。(2) の証明終わり。

系 1.6 補題と同じ前提の下で、任意の開集合 $U_0 \subset U$ と $s(U_0) \subset W_0 \subset r^{-1}U_0$ をみたす開集合 $W_0 \subset Y$ にたいし $s : U_0 \rightarrow W_0, r : W_0 \rightarrow U_0, r \circ s = 1_{U_0}, s(U_0) = M \cap W_0$ が成り立つ。

証明 補題の証明で示したように、 $r^{-1}U_0 = W'$ とおけば $s^{-1}W' = s^{-1}r^{-1}U_0 = U_0$ がなりたつ。この W' に補題を適用すればよい。

系 1.7 Y, U_1, U_2 を位相空間とし、 $M \subset Y$ を Y の部分空間、 $W_1, W_2 \subset Y$ を Y の開集合とする。 $U_i \xrightarrow{s_i} W_i, W_i \xrightarrow{r_i} U_i$ は $r_i \circ s_i = 1_{U_i}, s(U_i) = M \cap W_i$ をみたす連続写像とする。

この時、 $s_i : U_{i0} \rightarrow W_0, r_i : W_0 \rightarrow U_{i0}, r_i \circ s_i = 1_{U_{i0}}, s_i(U_{i0}) = M \cap W_0 = M \cap W \cap W'$ をみたす開集合 $U_{i0} \subset U_i, W_0 \subset W_1 \cap W_2$ が存在する。

証明 $s = s_1, r = r_1, W' = W_2, U_{10} = s_1^{-1}W_2$ として補題を適用し、 $s_1 : U_{10} \rightarrow r_1^{-1}U_{10}, r_1 : r_1^{-1}U_{10} \rightarrow U_{10}, r_1 \circ s_1 = 1_{U_{10}}, s_1(U_{10}) = M \cap r_1^{-1}U_{10} = M \cap W_1 \cap W_2$ をえる。同様に $s = s_2, r = r_2, W' = W_1, U_{20} = s_2^{-1}W_1$ として補題を適用し、 $s_2 : U_{20} \rightarrow r_2^{-1}U_{20}, r_2 : r_2^{-1}U_{20} \rightarrow U_{20}, r_2 \circ s_2 = 1_{U_{20}}, s_2(U_{20}) = M \cap r_2^{-1}U_{20} = M \cap W_1 \cap W_2$ を得る。

$W_0 = r_1^{-1}U_{10} \cap r_2^{-1}U_{20}$ とおけば、 $s_i(U_{i0}) \subset W_0 \subset r_1^{-1}U_{10}, r_2^{-1}U_{20}$ となり結論を得る。 W_0 は $s_i(U_{i0}) \subset W_0 \subset r_1^{-1}U_{10} \cap r_2^{-1}U_{20}$ と小さく取り替えてもよい。

2 正則部分多様体

命題 2.1 X, Y はそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N$ の開集合とし、滑らかな写像 $s : X \rightarrow Y, r : Y \rightarrow X$ が $r \circ s = 1_X$ をみたすものとする。このとき、 $s(X)$ は $\mathbb{R}^N$ の正則部分多様体である。

証明 簡単のため $n = 2, N = 3$ の場合を書く。一般の場合も同様にすればよい。 $p = s(a) \in s(X)$ を任意にとる。 3×2 -行列

$$s'(a) = \begin{pmatrix} s_{1u_1}(a) & s_{1u_2}(a) \\ s_{2u_1}(a) & s_{2u_2}(a) \\ s_{3u_1}(a) & s_{3u_2}(a) \end{pmatrix}$$

の階数が 2 である (2×3 -行列 $r'(p)$ を左から掛ければ単位行列) であることから、 $s'(a)$ から一行を取り去った 2×2 行列のうち可逆 (正則) 行列になるものがある。取り去る行が、たとえば、第 2 行であるとする。そのときは、

$$(s'(a), \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} s_{1u_1}(a) & s_{1u_2}(a) & 0 \\ s_{2u_1}(a) & s_{2u_2}(a) & 1 \\ s_{3u_1}(a) & s_{3u_2}(a) & 0 \end{pmatrix}$$

が可逆行列になる。 $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\Phi \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} = s(u) + t\mathbf{e}_2$ で定義する。

$\Phi' \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = (s'(a), \mathbf{e}_2)$ であり、これが可逆であることから、逆写像定理を用いることができる。

すなわち、 $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ を含む開集合と $\Phi \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = s(a) = p$ を含む開集合が存在して、それらが微分同型であるようにすることができる。これらの開集合は任意に小さく取り直すことができることから、 a をふくむ開集合 $U, V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ で $U \times V \subset X \times \mathbb{R}$ をみたすものと、 p を含む開集合 $W \subset Y$ が存在して $\varphi = \Phi_W^{U \times V} : U \times V \rightarrow W$ が微分同相になる。 $\varphi(U \times 0) = s(U) \subset W$ であることから、 $s(U) \subset W \cap r^{-1}U \subset r^{-1}U$ と系 1.6 の条件がみたされレトラクションの縮小 $s : U \rightarrow W \cap r^{-1}U, r : W \cap r^{-1}U \rightarrow U, r \circ s = 1_U, s(U) = W \cap r^{-1}U \cap s(X)$ がえられる。

$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ を含む開集合 $U \times V$ を $U_0 \times V_0 \subset \varphi^{-1}(W \cap r^{-1}U)$ をみたすように小さく取り替え $W_0 = \varphi(U_0 \times V_0) \subset W \cap r^{-1}U$ とおけば、 $\varphi = \varphi_{W_0}^{U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \rightarrow W_0$ が微分同相になる。 $W_0 \cap s(X) = \varphi(U_0 \times 0)$ を示せば証明は終る。単射が共通部分を保つことから以下の通り、容易にえられる。

$$\varphi(U_0 \times 0) = \varphi((U_0 \times V_0) \cap (U \times 0)) = \varphi(U_0 \times V_0) \cap \varphi(U \times 0) = W_0 \cap W \cap r^{-1}U \cap s(X) = W_0 \cap s(X)$$

初心者向けの曲面論で用いる曲面の定義を書いておく。陰関数の定理にすぐつながるのでこれを採用している。これは、ミルナーによる多様体の定義 (Differential viewpoint ...) の書き直しである (後ろを参照)。**命題 2.1** は、ミルナーの多様体が $\mathbb{R}^N$ の正則部分多様体であることの証明の例である。ミルナーの定義は一見やさしそうだが、初心者向けにそのままやると手こずる。親切心を出して説明すればするほど、窮してごまかしに終わることになる。我々のやり方はごまかさないための工夫であるが、レトラクションの縮小やレトラクションの共存など、この稿の最初に書いた部分をまじめにやると、だれもついてこないということになる。つまりは、手こずるのは仕方がないということか。

定義 2.2 図形 $M \subset \mathbb{R}^3$ が曲面であるとは、任意の $p \in M$ にたいして p を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合 W 、 $\mathbb{R}^2$ の開集合 U と滑らかな写像 $s : U \rightarrow W, r : W \rightarrow U$ で $r \circ s = 1_U, s(U) = M \cap W$ となるものが存在することである。

この (U, W, s, r) を p の周りの (a chart) 地図という。曲面の各点 p に p を含む曲面 M の開集合 $M \cap W$ と $\mathbb{R}^2$ の開集合 U が存在して微分同相になっているからである ($s_{s(U)} : U \rightarrow M \cap W$ が微分同相)。

多様体のミルナーによる定義は次の通り。

$M \subset \mathbb{R}^N$ が滑らかな m -次元多様体であるとは、任意の $x \in M$ にたいし、開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ 、 x をふくむ開集合 $W \subset \mathbb{R}^N$ と $h(U) = M \cap W$ をみたす滑らかな写像 $h : U \rightarrow W$ が存在し、 $h_{M \cap W}$ が微分同相となることである。

最後の条件は、滑らかな写像 $g : M \cap W \rightarrow U$ が存在して、 $g \circ h_{M \cap W} = 1_U, h_{M \cap W} \circ g = 1_{M \cap W}$ が成り立つことである。ここで、定義域が開ではない g が滑らかとは、任意の $p \in M \cap W$ をふくむ開集合 $W_1 \subset \mathbb{R}^N$ と滑らかな写像 $G : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ が存在して $g^{M \cap W \cap W_1} = G_U^{M \cap W \cap W_1}$ がなりたつこと、である。

$h^{-1}(W \cap W_1) = U_0$ とおけば、 $h(U_0) = h(U) \cap W \cap W_1 = M \cap W \cap W_1$ により $G \circ h^{U_0} = 1_{\mathbb{R}^m}^{U_0}$ となる。 $h_{W \cap W_1}^{U_0}$, G を整形すれば、 $h : U_0 \rightarrow W \cap G^{-1}U_0, G : W \cap G^{-1}U_0 \rightarrow U_0, G \circ h = 1_{U_0}$ がえられる。また、 $h(U_0) \subset W \cap G^{-1}U_0 \subset W \cap W_1$ に " $M \cap$ " すれば、 $h(U_0) = M \cap W \cap G^{-1}U_0 (= M \cap W \cap W_1)$ となる。 $s = h, r = G, W_0 = W \cap G^{-1}U_0$ とおけば、 (U_0, W_0, s, r) は (我々の意味での) p の周りの地図である。したがって、ミルナーの多様体は我々の意味での多様体である。逆は自明。