プッシュアウトについて（裏口編）

hiray

位相空間の圏におけるプッシュアウトというものはこういうものだと、端的に書いたものを読んだことがない。プッシュアウトの存在を同値関係を用いてやろうとする。余等置者（子）のときはすっきりしてたのに、同じことをやっているだけなのにプッシュアウトの場合はなんだかしっくりこない。これは駄目だとすぐにわかる。学生が辛抱強くやっているうちに、ああこうだったのか「わかった」というのには不向きなやり方である。

つまりは、じぶんも理解をすっ飛ばしていたのだ。

1 $\mathcal{S}et$ におけるプッシュアウトの存在と構造

プッシュアウト図式の一般的な（圏に依存しない）定義、性質については、[1]「プッシュアウトについて」の定義、命題 0.1 （プッシュアウトの本質的唯一性）、命題 0.2 （プリズム型の可換図式とプッシュアウトの関係として、[2]「プッシュアウトについて（実践編）」で書き直した）を前提とする（つまり、使いまくる）。

まずは、集合の圏での議論である。

定義から直接証明できる例を挙げておく。

例 1 以下の左可換図式において、h, f が全単射であればこの可換図式はプッシュアウト図式である。なぜなら、余錐 $u : B \to Z, v : X \to Z$（$u \circ h = v \circ i : A \to Z$ は省略）に対し、$v \circ f^{-1} : Y \to Z$ が解で、その他の解はない（すなわち普遍解である）。

例 2 右下図式はプッシュアウト図式である。例 1 と同様、余錐 $u : Y \to Z, v = \langle v_1, v_2 \rangle : X \amalg S \to Z$ について、普遍解は $\langle u, v_2 \rangle$ である。例 1 を考慮に入れれば、1_S を任意の全単射に取り換えてもよい。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X \amalg \emptyset"] \arrow[d, "f"'] & X \amalg S \arrow[d, "f \amalg 1_S"] \\ Y \arrow[r, "1_Y \amalg \emptyset"] & Y \amalg S \end{tikzcd}$$

次の補題はよく知られている。

補題 1.1 $i : A \to X$ と $g : A \to Y$ は集合の写像で、i は全射とする。それぞれの写像にかんする同値関係、$R_i = \{\, (a, a') \mid i(a) = i(a') \,\}, R_g = \{\, (a_1, a'_1) \mid g(a_1) = g(a'_1) \,\} \subset A^2$ にかんし、$R_i \subset R_g$ ならば、$g = f \circ i$ となるような $f : X \to Y$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & X \\ B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\pi_R"] & X \arrow[d, dotted, "f"] \\ B \arrow[r, dotted, "j"] & A / R \end{tikzcd}$$

上の左の図式が与えられたとき、「i, h が全射であれば」上の右図式を構成することにより（右下方向への射影 π_R を消去すれば)、プッシュアウト図式が得られる：ふたつの同値関係 $R_i,\ R_h = \{(a_2, a_2') \,|\, h(a_2) = h(a_2')\}$ から生成された同値関係を R とし、射影を $\pi_R : A \to A\,/\,R$ とする。i, h が全射であることと $R_i, R_h \subset R$ より、ふたつの三角形を可換にする射 $j,\ f$ が（それぞれ唯一つ）えられる。

任意の余錐 $u : B \to Z,\ v : X \to Z,\ u \circ h = v \circ i$ にたいし、$R_h \subset R_{u \circ h},\ R_i \subset R_{v \circ i},\ R_{u \circ h} = R_{v \circ i}$ により、$R \subset R_{u \circ h} = R_{v \circ i}$ となる。補題により、$w \circ \pi_R = u \circ h = v \circ i$ であるような $w : A/\,R \to Z$ がただ一つ定まる。$w \circ j \circ h = w \circ \pi_R = u \circ h, w \circ f \circ i = w \circ \pi_R = v \circ i$ と $h,\ i$ がエピ射（全射）であることから $w \circ j = u,\ w \circ f = v$ となる。f がエピ射であるから、$w \circ f = v$ をみたす w は唯一つしかない。

次の命題が証明された。

命題 1.2　$i : A \to X,\ h : A \to B$ が全射であれば、プッシュアウト図式 $f \circ i = j \circ h$ が存在する。

[1]「プッシュアウトについて」命題 0.2 と例 1、 例 2 を用いれば、次の補題も得られる。たとえば、以下の補題の一番右側の可換図式がプッシュアウトであることは、次の可換図式の左右の前側面がプッシュアウトであることから結論される。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & X \amalg S \arrow[dd] \\
& X \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \amalg T \\
& Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

補題 1.3　下左図式がプッシュアウト図式であるならば、残りの二つもプッシュアウト図式である。ただし、$\alpha : P \to Q, \beta : S \to T$ は全単射とする。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "j"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\emptyset \amalg h"'] & X \arrow[d, "\emptyset \amalg f"] \\
P \amalg B \arrow[r, "\alpha \amalg j"] & Q \amalg Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i \amalg \emptyset"] \arrow[d, "h"'] & X \amalg S \arrow[d, "f \amalg \beta"] \\
B \arrow[r, "j \amalg \emptyset"] & Y \amalg T
\end{tikzcd}
$$

命題 1.4　任意の $i : A \to X,\ h : A \to B$ にたいし、プッシュアウト図式 $f \circ i = j \circ h$ が存在する。

証明 (1) $i = \langle i_0, \emptyset \rangle : A \to X_0 \amalg (X - X_0),\ h = \langle \emptyset, h_0 \rangle : A \to (B - B_0) \amalg B_0$ とする。ただし、$X_0 = i(A),\ B_0 = h(A),\ i_0 = i_{i(A)} : A \to X_0,\ h_0 = h_{h(A)} : A \to B_0$ である。

命題 1.2 により、下左図のプッシュアウト図式が存在する。プッシュアウトの一般性質と例 1, 2 あるいは補題 1.3 により、下図中の可換図式がえられるが、九つの長方形図式のすべてがプッ

シュアウト図式である。一番外側の四角（下右図式）が求めるプッシュアウト図式である。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "h_0"] & X_0 \arrow[d, "f'_0"] \\
B_0 \arrow[r, "j'_0"] & {}_0P_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "h_0"] & X_0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f'_0"] & X_0 \amalg (X - X_0) \arrow[d] \\
B_0 \arrow[r, "j'_0"] \arrow[d, "\cap"] & {}_0P_0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & ({}_0P_0) \amalg (X - X_0) \arrow[d, "\cap"] \\
(B - B_0) \amalg B_0 \arrow[r] & (B - B_0) \amalg ({}_0P_0) \arrow[r, "\subset"] & (B - B_0) \amalg ({}_0P_0) \amalg (X - X_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "j'"] & {}_BP_X
\end{tikzcd}
$$

上の真ん中の図式については、$i(A) = X_0 \subset X_1 \subset X$, $h(A) = B_0 \subset B_1 \subset B$ をみたす任意の X_1, B_1 に取り換えたものが構成される。

証明は容易である。

まず、上中の図式の二行目と三行目のあいだに、$(B_1 - B_0) \amalg$ 二行目 を挿入した可換図式をつくる。この操作で、すべての四角がプッシュアウト図式であるという性質が保たれることは明らかである（プッシュアウトの一般性質と例 1, 2 によって）。さらに、四行三列の図式の二列目と三列目のあいだに 二列目 $\amalg (X_1 - X_0)$ を挿入する。こうして最初の三行三列の可換図式の細分であるような四行四列の可換図式がえられる。最後に、この細分から二行目と二列目を削除する。以下の、九つの長方形のすべてがプッシュアウト図式であるような、可換図式がえられた。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "h_1"] & X_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f'_1"] & X \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r, "j'_1"] \arrow[d, "\cap"] & {}_1P_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & {}_1P \arrow[d, "\cap"] \\
B \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\subset"] & {}_BP_X
\end{tikzcd}
$$

註 ${}_1P_1 = j'(B_1) \cup f'(X_1)$, ${}_1P = j'(B_1) \cup f'(X)$, $P_1 = j'(B) \cup f'(X_1)$ であることを確認せよ。

ダイアグラム $B \overset{h}{\leftarrow} A \overset{f}{\rightarrow} X$ にたいし、構成したプッシュアウト図式（下左）と任意のプッシュアウト図式（下中）をとる。「プッシュアウトについて」命題 0.1 により全単射 $\ell :_B P_X \to Y$ が存在し、縦矢印が全て全単射であるような下右の六面体の可換図式がえられる。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "j'"] & {}_BP_X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "j"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "="] & & X \arrow[dl, "f'"] \arrow[dd, "="] \\
B \arrow[rr, "j'"] \arrow[dd, "="] & & {}_BP_X \arrow[dd, "\ell"] & \\
& A \arrow[rr] \arrow[dl] & & X \arrow[dl, "f"] \\
B \arrow[rr, "j"] & & Y &
\end{tikzcd}
$$

この六面体の天井は下左可換図式に分解され、床は下右のように分解される。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "h_1"] & X_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f_1'"] & X \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r, "j_1'"] \arrow[d, "\cap"] & {}_1P_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & {}_1P \arrow[d, "\cap"] \\
B \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\subset"] & {}_BP_X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "h_1"] & X_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f_1"] & X \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\cap"] & j(B_1) \cup f(X_1) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & j(B_1) \cup f(X) \arrow[d, "\cap"] \\
B \arrow[r] & j(B) \cup f(X_1) \arrow[r, "\subset"] & Y
\end{tikzcd}
$$

全単射 ℓ は全単射 ${}_1P_1 \to j(B_1) \cup f(X_1)$, ${}_0P \to j(B_1) \cup f(X)$, $j(B) \cup f(X_1)$ をみちびき、恒等写像 1_A, 1_{X_1}, 1_X, $1_{B_1}, 1_B$, ℓ とあわせて天井の各空間から下へこれらの全単射を書き入れて、$\ell \circ j' = j, \ell \circ f' = f$ を考慮すれば、六面体は四つの可換六面体に分割される。たとえば、${}_1Y_1 = j(B_1) \cup f(X_1)$, ${}_1Y = j(B_1) \cup f(X)$, $Y_1 = j(B) \cup f(X_1)$ と略記すれば次の可換立方体がえられる。

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "="] & & X \arrow[dl] \arrow[dd, "="] \\
{}_1P_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "="] & & {}_1P \arrow[dd] & \\
 & X_1 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dl] & & X \arrow[dl] \\
{}_1Y_1 \arrow[rr, "j"] & & {}_1Y &
\end{tikzcd}
$$

この六面体の上面はプッシュアウトであり、側面はすべて例 1 によりプッシュアウトである。『プッシュアウトについて（実践編）」1.3 により（条件は過剰になっているが）床もプッシュアウトになる。したがって、下右の可換図式の右上の四角はプッシュアウトである。残り三つについても同様。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "j"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "h_1"] & X_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f_1"] & X \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\cap"] & j(B_1) \cup f(X_1) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & j(B_1) \cup f(X) \arrow[d, "\cap"] \\
B \arrow[r] & j(B) \cup f(X_1) \arrow[r, "\subset"] & Y
\end{tikzcd}
$$

命題 1.5　$f \circ i = j \circ h$ がプッシュアウト図式であるとする。このとき、$i(A) \subset X_1 \subset X$, $h(A) \subset B_1 \subset B$ であるようなすべての X_1, B_1 について、上左図式は上右図式のように、九つの長方形図式がすべてプッシュアウト図式であるように分解される。

2 $\mathcal{T}op$ におけるプッシュアウト

命題 1.5 は位相空間の圏でも成り立つことはほとんど明らかである。

連続写像のダイアグラム $B \overset{h}{\leftarrow} A \overset{f}{\rightarrow} X$ にたいし、集合の圏で構成したプッシュアウト図式の ${}_BP_X$ に全射 $\langle j', f' \rangle : B \amalg X \to {}_BP_X$ によって等価位相を入れれば、$\mathcal{T}op$ におけるプッシュアウト図式（下左）がえられる。任意に下中のプッシュアウト図式（下中）をとれば、同相写像 $\ell : {}_BP_X \to Y$ が存在し、縦矢印が全て同相であるような下右の六面体の $\mathcal{T}op$ における可換図式がえられる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "j'"] & {}_BP_X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & A \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "="] & & X \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "="] \\ B \arrow[rr, "j'"] \arrow[dd, "="] & & {}_BP_X \arrow[dd, "\ell"] & \\ & A \arrow[rr] \arrow[dl] & & X \arrow[dl, "f"] \\ B \arrow[rr, "j"] & & Y & \end{tikzcd}$$

$\ell \circ \langle j', f' \rangle = \langle j, f \rangle$ であり、一見しただけで $h(A) \amalg i(A) = B_0 \amalg X_0 \subset B \amalg X = (B - B_0) \amalg B_0 \amalg X_0 \amalg (X - X_0)$ は $\langle j', f' \rangle : (B - B_0) \amalg B_0 \amalg X_0 \amalg (X - X_0) \to (B - B_0) \amalg_0 P_0 \amalg (X - X_0)$ に関し充満（「プッシュアウトについて」参照）であることがわかる。また、$B_0 \amalg X_0$ の補集合 $(B - B_0) \amalg (X - X_0)$ 上で $\langle j', f' \rangle$ は単射である。したがって、$\langle j, f \rangle$ にについても同じことがなりたつ。すなわち、$h(A) \amalg i(A)$ は $\langle j, f \rangle$ に関し充満で、$\langle j, f \rangle$ は $h(A) \amalg i(A)$ の補集合上で単射である。「プッシュアウトについて」命題 0.24 により、$h(A) \subset B_1, i(A) \subset X_1$ をみたす任意の $B_1 \amalg X_1$ についても同じことがなりたつ。「プッシュアウトについて」命題 0.17 により $\langle j, f \rangle^{B_1 \amalg X_1}_{j(B_1) \cup f(X_1)} : B_1 \amalg X_1 \to j(B_1) \cup f(X_1)$ は等化写像である。下右図式の左上四角が、集合の圏におけるプッシュアウト図式であることを考慮すれば、この四角は $\mathcal{T}op$ におけるプッシュアウト図式である $\cdots(1)$。

B_1, X_1 は条件 $h(A) \subset B_1, i(A) \subset X_1$ を満たしさえすればいいから、B_1, X や B, X_1 でもよい。すなわち、以下の右可換図式において上の四角を横につないだ長方形もプッシュアウトであり $\cdots(2)$、左四角を縦につないだ長方形も プッシュアウトである $\cdots(3)$ ことがわかる（すべて $\mathcal{T}op$ において）。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "h_1"] & X_1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "f_1"] & X \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\cap"] & j(B_1) \cup f(X_1) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & j(B_1) \cup f(X) \arrow[d, "\cap"] \\ B \arrow[r] & j(B) \cup f(X_1) \arrow[r, "\subset"] & Y \end{tikzcd}$$

(1) と (2) より（プッシュアウトの一般的性質を用いれば）上右図形の上右の四角がプッシュアウトになり $\cdots$(4)、(1) と (3) より左下四角もプッシュアウトになる $\cdots$(5)。また、(2) と 外側四角がプッシュアウトであることから、下二つの四角を横につないだ長方形もプッシュアウトであり $\cdots$(6)、(5) と (6) により右下四角がプッシュアウトになる $\cdots$(7)。

命題 2.1　上右可換図式 が $\mathcal{T}op$ におけるプッシュアウト図式であるとする。このとき、$i(A) \subset X_1 \subset X$, $h(A) \subset B_1 \subset B$ であるようなすべての X_1, B_1 について、上左図式は上右図式のように、九つの長方形図式がすべて $\mathcal{T}op$ におけるプッシュアウト図式であるように分解される。

位相空間の圏でのプッシュアウトというのはこういうものだと、知っておけばよい。

3　復習

位相空間対 (X, A) と連続写像 $h : A \to B$ にたいし、$i = 1_X^A : A \subset X$ として集合の圏で作った集合の圏でのプッシュアウトについては、作り方により $j' = 1_Y^B : B \subset Y$ となる。${}_BP_X$ に全射 $\langle j', f' \rangle : B \amalg X \to {}_BP_X$ によって等価位相を入れれば、$\mathcal{T}op$ のプッシュアウトがえられる（以下の左可換図式）。[1] 「プッシュアウトについて」の命題 0.15 により、位相空間の圏においても j' は包含写像 $1_{{}_BP_X}^B : B \subset {}_BP_X$ になり（下右可換図式） $h = f'^A_B$ である。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\subset} & X \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B & \xrightarrow{j'} & {}_BP_X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\subset} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'^A_B} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B & \xrightarrow{\subset} & {}_BP_X \end{array}$$

得られた位相空間対の写像 $f' : (X, A) \to ({}_BP_X, B)$ を準相対同相と呼んでいたが、いまは「位相空間対の写像 f' は余デカルト的である」とよぶことにしている。

つまり、「位相空間対 (X, A) と連続写像 $h : A \to B$ にたいし、必要ならばプッシュアウトは余デカルト的な対の写像として表現できる」わけである。

命題 2.1 を、余デカルト的な対の写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ に適用する場合、まずは $A = X_0, B = Y_0$ であり、$B = B_1, A \subset X_1 \subset X$ であるような任意の X_1 について、以下のようになっている。

$Y_1 = B \cup f(X_1)$ とすれば、余デカルト的な対の写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ は、余デカルト的な対の写像 $f_{Y_1}^{X_1} : (X_1, A) \to (Y_1, B)$, $f : (X, X_1) \to (Y, Y_1)$ によって、以下のように分解される。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\subset} & X_1 & \xrightarrow{\subset} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_B^A} & & \downarrow{\scriptstyle f_{Y_1}^{X_1}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{\subset} & Y_1 & \xrightarrow{\subset} & Y \end{array}$$

これが [1] 「プッシュアウトについて」の命題 0.18 である。

参考文献

[1] hiray, プッシュアウトについて, www.eonet.ne.jp/~hymath/

[2] hiray, プッシュアウトについて（実践編）, www.eonet.ne.jp/~hymath/

[3] Schubert, H., Categories, Springer, 1972