

プッシュアウトについて

hiray

位相空間の位相を忘れると集合が得られる。忘却関手である。この忘却関手は余極限を創出する (creates colimits)。このことを前提に、位相空間の押し出し (push outs) 等の構成を簡略に定義するのが普通である。簡略はいいが何が本質的に効いているのか不明である。もやもやとした気分ではよくない。ここでは、少し後戻りしてみることにした。

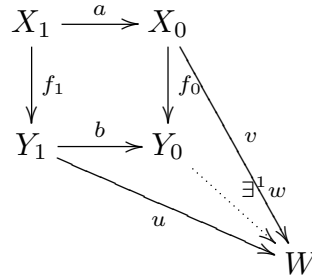
ただ、あくまで集合の圏や位相空間の圏の話である。

ついでに、相対全単射、準相対同相についてまとめておく。付録に充満部分集合のまとめも加えた。

0.1 後戻り

源を同じくする二つの射 $Y_1 \xleftarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{a} X_0$ にたいし、的を同じくする二つの射 $Y_1 \xrightarrow{b} Y_0 \xleftarrow{f_0} X_0$ が押し出し (push out) であるとは、 $b \circ f_1 = f_0 \circ a$ が可換であり、かつ、いかなる射の可換図式 $u \circ f_1 = v \circ a$ にたいしても $w \circ b = u, w \circ f_0 = v$ となるような射 w が一意的に存在すること、と定義する。略して、可換図式 $b \circ f_1 = f_0 \circ a$ は押し出しであるという。

射 w を押し出し $b \circ f_1 = f_0 \circ a$ の u, v に関する普遍解という。



命題を二つ書いておく。

命題 0.1 $b \circ f_1 = f_0 \circ a$ と $b' \circ f_1 = f'_0 \circ a$ の両方が共に押し出しであれば、 $\ell \circ b = b', \ell \circ f_0 = f'_0$ となるような同型射 ℓ が一意的に存在する。

命題 0.2 可換図式 $X_2 \xrightarrow{a_1} X_1 \xrightarrow{a_0} X_0$ において、 $b_1 \circ f_2 = f_1 \circ a_1$ が押し出

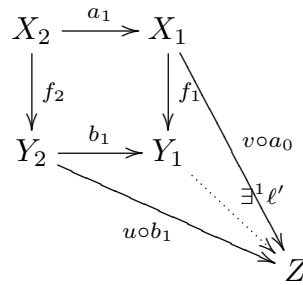
$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightarrow{a_1} & X_1 & \xrightarrow{a_0} & X_0 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ Y_2 & \xrightarrow{b_1} & Y_1 & \xrightarrow{b_0} & Y_0 \end{array}$$

しであるとする。このとき、

$$b_0 \circ f_1 = f_0 \circ a_0 \text{ が押し出し} \Leftrightarrow (b_0 \circ b_1) \circ f_2 = f_0 \circ (a_0 \circ a_1) \text{ が押し出し}$$

が成り立つ。

証明 $[\Rightarrow]$ はどこかに書いてあるので省略。 $[\Leftarrow]$ を書いておく。 $u \circ f_1 = v \circ a_0$ をみたす $u : Y_1 \rightarrow Z, v : X_0 \rightarrow Z$ をとる。 $(u \circ b_1) \circ f_2 = (u \circ (b_1 \circ f_2)) = u \circ (f_1 \circ a_1) = (u \circ f_1) \circ a_1 = (v \circ a_0) \circ a_1 = v \circ (a_0 \circ a_1)$ と $(b_0 \circ b_1) \circ f_2 = f_0 \circ (a_0 \circ a_1)$ が押し出しであることから、 $\ell \circ (b_0 \circ b_1) = u \circ b_1, \ell \circ f_0 = v$ をみたす $\ell : y_0 \rightarrow Z$ が唯一つつ存在する。先ほどの、 $(u \circ b_1) \circ f_2 = v \circ (a_0 \circ a_1)$ を $(u \circ b_1) \circ f_2 = (v \circ a_0) \circ a_1$ とよみ、 $b_1 \circ f_2 = f_1 \circ a_1$ が押し出しであることを思い出せば、 $\ell' \circ b_1 = u \circ b_1, \ell' \circ f_1 = v \circ a_0$ をみたすような $\ell' : Y_1 \rightarrow Z$ が唯一つつ存在するのだが、



ℓ' に u を代入してみれば $\ell' = u$ であることがわかる。さらに、 $\ell \circ b_0$ を代入してみればこれも $\ell' \circ b_1 = u \circ b_1, \ell' \circ f_1 = v \circ a_0$ をみたすことがわかる。したがって、 ℓ' が唯一つつしか存在しないことから $u = \ell \circ b_0$ である。

「 $u \circ f_1 = v \circ a_0$ をみたす $u : Y_1 \rightarrow Z, v : X_0 \rightarrow Z$ にたいし、 $\ell \circ b_0 = u, \ell \circ f_0 = v$ をみたす ℓ が存在する」 ことになる。「そのような写像は唯一つつ」をいう必要があるが、そのような写像は、押し出し $(b_0 \circ b_1) \circ f_2 = f_0 \circ (a_0 \circ a_1)$ の $u \circ b_1, v$ に関する普遍解でもあることから唯一つつでなければならない。

系 0.3 余積のあるような圏において、 $j \circ g = f \circ i$ が押し出しであることと、 $j \circ \langle 1_B, g \rangle = \langle j, f \rangle \circ (1_B \amalg i)$ が押し出しであることは同値である。

証明 $A \longrightarrow B \amalg A$ が押し出しであるから。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \amalg A \\ \downarrow i & & \downarrow 1_B \amalg i \\ X & \longrightarrow & B \amalg X \end{array}$$

集合の圏や位相空間の圏には余積がある。押し出しを余等置射という概念に翻訳できる。

平行射 $X \xrightarrow[f]{g} Y$ にたいして、 $q : Y \rightarrow C$ が余等置射 (coequalizer) であるとは、 $q \circ f = q \circ g$ をみたし、かつ $h \circ f = h \circ g$ を満たすいかなる射 h にたいし $k \circ q = h$ となるような射 k が一意的に存在すること、と定義する。省略して、 $X \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{q} C$ は余等置射であるという。

余積があるような圏において、源を同じくする二つの射 $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$, $a : X_1 \rightarrow X_0$ にかんし、平行射 $f_{1I} : X_1 \rightarrow Y_1 \subset Y_1 \amalg X_0$, $a_{II} : X_1 \rightarrow X_0 \subset Y_1 \amalg X_0$ をとる。次がなりたつ。

命題 0.4 余積があるような圏において、二つの射 $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$, $a : X_1 \rightarrow X_0$ にかんし、ふたつの射 $b : Y_1 \rightarrow Y_0$, $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ が押し出しであることと $\langle b, f_0 \rangle : Y_1 \amalg X_0 \rightarrow Y_0$ が平行射 f_{1I} , $a_{II} : X_1 \rightarrow Y_1 \amalg X_0$ に関する余等置射であることは同値である。

圏の射 $f : X \rightarrow Y$ が epi 射であるとは、任意のふたつの射 s, t について $s \circ f = t \circ f$ から $s = t$ が帰結されることとする。

命題 0.5 平行射にたいする余等置射は、epi 射である。

系 0.6 余積があるような圏では、 $j \circ g = f \circ i$ が押し出しであるならば $\langle j, f \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ は epi 射である。

命題 0.7 $j \circ g = f \circ i$ は押し出しであるとする。このとき g が epi 射であるなら f も epi 射である。

0.2 集合の圏と位相空間の圏

さて、次がなりたつ。

命題 0.8 集合の圏では、epi 射であることと全射であることは同値である。

命題 0.9 連続写像について、それが epi 射であることと位相を忘れて集合の圏で epi 射であることは、同値である。言い換えれば、連続写像について、epi 射であることと全射であることは同値である。

命題 0.10 $X \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{q} C$ を連続写像の可換図式 ($q \circ f = q \circ g$) とする。この図式が余等置射であることと、 q が等化写像であり、かつ (位相を忘れて) 集合の圏の図式として余等置射であること、とは同値である。

系 0.11 $j \circ g = f \circ i$ を可換図式とする。この図式が位相空間の押し出しであることと、 $\langle j, f \rangle$ が等化写像であり、かつ集合の圏の押し出しであることは、同値である。

註 忘却関手 $U : Top \rightarrow Set$ は余等置射を (したがって押し出しを) 創出する。

定理 0.12 集合の圏 (や位相空間の圏) では、任意の平行射に対し余等置者が存在する。

0.3 相対全単射、準相対同相

集合の圏では、余等置者という概念は同値関係と相性がいいが（上の定理の証明を書いてみればすぐわかる）、押し出しは余等置射を媒介に定義されるのでなんとなく相性がよろしくない。

位相幾何で登場する押し出しは、一方の写像が包含写像であることが多い。その場合は同値関係のお世話にならずに済む。準相対同相という概念である。集合論でそれに対応するのが相対全単射である（造語）。半世紀前に習ったブルバキの充満部分集合というのが、ここで役にたった。

集合対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対全単射であるとは、 $f(X - A) \subset Y - B$ で、 $f_{Y-B}^{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$ が全単射であること、と定義する。

$i = 1_X^A : A \subset X, j = 1_Y^B : B \subset Y$ と略記する。

命題 0.13 集合対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対全単射であることと $j \circ f_B^A = f \circ i$ が押し出しであること、とは同値である。

証明 f が相対全単射であるとする。 $u \circ f_B^A = v \circ i$ をみたす u, v にたいし、普遍解 w は $w^B = u, w^{Y-B} = v \circ (f_{Y-B}^{X-A})^{-1}$ で唯一つ定まる。

$j \circ f_B^A = f \circ i$ が押し出しであるとする。 $u : B \rightarrow B \amalg (X - A), v : X \rightarrow B \amalg (X - A)$ を、 $u(b) = b, v^A(a) = u(f(a)), v^{X-A}(x) = x$ で定義する。この u, v は $u \circ f_B^A = v \circ i$ をみたす。したがって、普遍解 $w : Y \rightarrow B \amalg (X - A)$ が存在する。 $w \circ f = v$ であるが、 v^{X-A} が単射であることから f^{X-A} も単射で $f_{f(X-A)}^{X-A}$ は全単射である。また、 $\langle j, f \rangle$ が全射より $Y = B \cup f(X) = B \cup f(A) \cup f(X - A) = B \cup f(X - A)$ となる。もし、 $B \cap f(X - A) \neq \emptyset$ ならば $y_0 \in B \cap f(X - A)$ にたいし $w(y_0) \in B \cap (X - A) = \emptyset$ となり矛盾である。よって、 $f(X - A) = Y - B$ である。 f は相対全単射である。

系 0.14 集合対 (X, A) と写像 $g : A \rightarrow B$ にたいし、 B が部分集合となる集合 Y と写像 $f : X \rightarrow Y$ で $f_B^A = g$ をみたすようなものが存在する。

略証 前命題の証明に書かれている。

位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相であるとは、 f が相対全単射でありかつ $\langle j, f \rangle$ が等化写像であること、と定義する。これは、 $j \circ f_B^A = f \circ i$ が位相空間の圏で押し出しであることを意味する。ぎゃくに、位相空間対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ について、 $j \circ f_B^A = f \circ i$ が押し出しであれば必然的に f は準相対同相である。

準相対同相 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ にかんし、 A が X の閉集合であることと B が Y の閉集合であることは同値である。この条件を満たす準相対同相を相対同相という。

準コンパクトとコンパクトの関係と同様に、準相対同相を相対同相とよぶのが順当だとは思いますが、習慣を勝手に触るのははばかられる。

以下のようなことも成り立つ。もちろん、準相対同相を相対同相で置き換えてもよい。

- 相対全単射 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ にかんし、 g が相対全単射であることと、 $g \circ f : (X, A) \rightarrow (Z, C)$ が相対全単射であることは同値である。
- 準相対同相 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ にかんし、 g が準相対同相であることと、 $g \circ f : (X, A) \rightarrow (Z, C)$ が準相対同相であることは同値である。

命題 0.15 位相空間対 (X, A) と連続写像 $g : A \rightarrow B$ にたいし、 B が部分空間となる Y と準相対同相 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ で $f_B^A = g$ をみたすようなものが存在する。

補題 0.16 等化写像 $f : X \rightarrow Y$ と部分空間 $B \subset Y$ にかんし、 $f^{X-f^{-1}B}$ が単射であるならば $f_B^{f^{-1}B} : f^{-1}B \rightarrow B$ は等化写像である。

証明 $f^{-1}C$ が $f^{-1}B$ の閉集合であるような $C \subset B$ をとる。 X の閉集合で $F \cap f^{-1}B = f^{-1}C$ であるようなものが存在する。 $F = f^{-1}C \cup (F \cap f^{-1}(Y-B))$ であるが、 $f^{f^{-1}(Y-B)}$ は (f に関して充満であるような $f^{-1}(Y-B)$ 上で) 単射であるから $F \cap f^{-1}(Y-B)$ も充満であり、充満集合の和集合も充満であるから F も f に関し充満である。ゆえに、 $f(F)$ は X の閉集合である。 $C = f(f^{-1}C) = f(F \cap f^{-1}B) = f(F) \cap B$ により、 C は B の閉集合である。

註 充満部分集合については付録を参照。

命題の証明 前命題により相対全単射 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が存在する。 $\langle j, f \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ により Y に等価位相をいれる。この位相に関する部分空間の位相を入れた B を B_0 としておく。 j は連続であるから 恒等写像 $j_{B_0} : B \rightarrow B_0$ は連続全単射である。 $\langle j, f \rangle^{-1}B_0 = B \amalg A$ であり、 $\langle j, f \rangle^{X-A}$ は単射であるから $B \amalg A \rightarrow B_0$ は補題により等化写像である。この写像は、 $\langle 1_B, f_B^A \rangle : B \amalg A \rightarrow B$ と j_{B_0} をもちいて、 $B \amalg A \rightarrow B \rightarrow B_0$ と分解される。したがって、 j_{B_0} は等化写像である。等価写像が全単射ならば同相写像である。

命題 0.17 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は準相対同相であるとする。 $f(A) \subset B_0 \subset B$, $A \subset X_0 \subset X$ であるような任意の B_0, X_0 について、 $Y_0 = B_0 \cup f(X_0)$ とおけば、 $f_{Y_0}^{X_0} : (X_0, A) \rightarrow (Y_0, B_0)$ は準相対同相である。したがって、 $B_0 = B$ の場合 $f : (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ も準相対同相である。

証明 $f(A) \amalg A$ は $\langle j, f \rangle$ に関し充満で、 $f(A) \amalg A$ の補集合上で $\langle j, f \rangle$ が単射であることから $(f(A) \amalg A \subset) B_0 \amalg X_0$ は充満である。その補集合上で単射である等化写像 $\langle j, f \rangle$ に

ついて、 $B_0 \amalg X_0 \rightarrow Y_0$ は等化写像である。また、 $B_0 \amalg A$ も $\langle j, f \rangle$ に関し充満であるから、 $f(X_0 - A) = \langle j, f \rangle((B_0 \amalg X_0) - (B_0 \amalg A)) = \langle j, f \rangle(B_0 \amalg X_0) - \langle j, f \rangle(B_0 \amalg A) = B_0 \cup f(X_0) - B_0$ であり、 $(X_0, A) \rightarrow (Y_0, B_0)$ は相対全単射である。したがって、準相対同相である。

$B_0 = B$ の場合、 $(X_0, A) \rightarrow (Y_0, B_0)$, $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相であるから、 $(X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ もそうである。

系 0.18 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は準相対同相であり、 $X = X_0 \amalg X_1$, $A_i = A \cap X_i$, $f = \langle f_0, f_1 \rangle$ とする。 $Y_0 = B \cup f(X_0)$ とおけば、 $f_0 : (X_0, A_0) \rightarrow (Y_0, B)$, $f_1 : (X_1, A_1) \rightarrow (Y, Y_0)$ は準相対同相である。

証明 命題により、 $\langle f_{0Y_0}, f_{1B}^{A_1} \rangle : (X_0 \amalg A_1, A) \rightarrow (Y_0, B)$, $f : (X, X_0 \amalg A_1) \rightarrow (Y, Y_0)$ は準相対同相である。 $(X_0, A_0) \subset (X_0 \amalg A_1, A)$, $(X_1, A_1) \subset (X, X_0 \amalg A_1)$ が準相対同相であることから結論を得る。

系 0.19 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対同相で、 X_0 は X の閉部分空間とする。 $A_0 = A \cap X_0$, $Y_0 = B \cup f(X_0)$ とおけば、 $f_{Y_0}^{X_0} : (X_0, A_0) \rightarrow (Y_0, B)$ は相対同相である。

略証 $1_{A \cup X_0}^{X_0} : (X_0, A_0) \subset (A \cup X_0, A)$ は閉集合の貼り合わせで、相対同相であるから。

補題 0.20 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は f が等化写像であるような相対同相とする。このとき、 $f_B^A : A \rightarrow B$ が閉写像なら f もそうである。

証明 $F \subset X$ を任意の閉部分集合とする。 $F \cap (X - A)$ は充満であるから、 $f^{-1}f(F) = f^{-1}f(F \cap A) \cup f^{-1}f(F \cap (X - A)) = f^{-1}f(F \cap A) \cup (F \cap (X - A)) \subset f^{-1}f(F \cap A) \cup F$ であり、逆の包含関係も自明である。したがって、 $f^{-1}f(F) = f^{-1}f(F \cap A) \cup F$ は X の閉集合である。よって、 $f(F)$ は Y の閉集合である。

命題 0.21 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対同相であるとする。

(1) $f^A : A \rightarrow Y$ が閉写像 ($\Leftrightarrow f_B^A : A \rightarrow B$ が閉写像) なら $f : X \rightarrow Y$ も閉写像である。

(2) $X_0 \subset X$ が閉で、 $A_0 = X_0 \cap A$ とする。 $f^{A_0} : A_0 \rightarrow Y$ が閉写像 ($\Leftrightarrow f_B^A : A_0 \rightarrow B$ が閉写像) なら $f^{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ も閉写像である。

証明 (1) $\langle j, f \rangle : (B \amalg X, B \amalg A) \rightarrow (Y, B)$ は等化写像であるような相対同相である。このとき、 $\langle j, f \rangle_B^{B \amalg A} = \langle 1_B, f_B^A \rangle : B \amalg A \rightarrow B$ は閉写像である。上の補題により $\langle j, f \rangle$ は閉写像で $X \subset B \amalg X$ が閉部分集合であることから $f : X \rightarrow Y$ も閉写像である。

(2) 前系により、 $(X_0, A_0) \rightarrow (B \cup f(X_0), B)$ は相対同相であった。

0.4 付録：充満部分集合 (saturated subsets)

定義 $A \subset X$ が写像 $f : X \rightarrow Y$ に関して充満であるとは、 $f(A) \cap f(X - A) = \emptyset$ が成り立つこととする。これは、 f の像が A の像と $X - A$ の像に分割されること ($f(X) = f(A) \amalg f(X - A)$) を意味している。したがってまた、 $f(X - A) = f(X) - f(A)$ がなりたつこと、としてもよい。

A が f に関して充満であることと $CA = X - A$ が f に関して充満であることは同値である。

命題 0.22 $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$ とする。次は同値である。

- (1) A は f に関して充満である。
- (2) $A = f^{-1}f(A)$ が成り立つ。
- (3) $A = f^{-1}B$ であるような $B \subset Y$ が存在する。
- (4) 任意の $P \subset X$ にたいして $f(P \cap A) = f(P) \cap f(A)$ がなりたつ。
- (5) 任意の $P \subset X$ にたいして $f(P - A) = f(P) - f(A)$ がなりたつ。

証明 [(1) $\Leftrightarrow$ (2)] $f(A) \cap f(CA) = \emptyset \Leftrightarrow f(CA) \subset Cf(A) \Leftrightarrow CA \subset f^{-1}Cf(A) = Cf^{-1}f(A) \Leftrightarrow A \supset f^{-1}f(A) \Leftrightarrow A = f^{-1}f(A)$

[(2) $\Leftrightarrow$ (3)] (2) $\Rightarrow$ (3) は自明。(3) $\Leftarrow$ (2) は以下の通り。 $f^{-1}f(A) = f^{-1}f(f^{-1}B) = f^{-1}(f(X) \cap B) = f^{-1}B = A$

[(1) $\Rightarrow$ (4), (5)] 任意に $P \subset X$ をとる。 $f(P) = f(P \cap A) \cup f(P \cap CA) = (f(P) \cap f(A)) \amalg (f(P) \cap f(CA))$, $f(P \cap A) \subset f(P) \cap f(A)$, $f(P \cap CA) \subset f(P) \cap f(CA)$ により、 $f(P \cap A) = f(P) \cap f(A)$, $f(P - A) = f(P \cap CA) = f(P) \cap f(CA) = f(P) \cap (f(X) - f(A)) = f(P) - f(A)$ とならざるを得ない。

[(1) $\Leftarrow$ (4)] $P = X - A$ とおけばよい。

[(1) $\Leftarrow$ (5)] $P = X$ とおけばよい。

$f : X \rightarrow Y$ が単射であるとき、 X の任意の部分集合は f に関し充満である。

$f : X \rightarrow Y$ が全射であるとき、 A が f にかんし充満であるならば、 $f(CA) = Cf(A)$ がなりたつ。

A_α がすべて f に関して充満ならば、 $\cup_\alpha A_\alpha$, $\cap_\alpha A_\alpha$ も充満である。なぜなら、 $\forall \alpha (A_\alpha = f^{-1}B_\alpha)$ により、 $\cup_\alpha A_\alpha = f^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha)$, $\cap_\alpha A_\alpha = f^{-1}(\cap_\alpha B_\alpha)$ となるから。

命題 0.23 A が $f : X \rightarrow Y$ にかんし充満であり、 C が f^A に関し充満であるならば、 C は f にかんし充満である。したがって、 f^A が単射であるならば、任意の A の部分集合は f にかんし充満である。したがってまた、 f^{X-A} が単射の場合は、 A を含む X の

任意の部分集合が f にかんし充満となる。

証明 $B, B_1 \subset Y$ が存在して、 $f^{-1}B = A, (f^A)^{-1}B_1 (= A \cap f^{-1}B_1) = C$ である。ゆえに、 $C = f^{-1}(B \cap B_1)$ である。