Puppe の補題

hiray

Puppe の補題とは、「位相空間対 (X, A) にたいし、$X \times 0 \cup A \times I$ が $X \times I$ のレトラクトであれば、$X \times 0 \cup A \times I$ は包含写像 $1_X^A : A \subset X$ の写像柱である」のことである。1967 年 Puppe, D. [1]、の脚注に書かれた。証明は、翌 1968 年 Strøm, A. [2] にでた。ここでは、閉集合を用いた証明を書いてみた。

1　貼り合わせ

位相空間 Z が部分空間 A, B の貼り合わせであるとは、$Z = A \cup B$ で Z の位相が包含写像 $1_Z^A : A \subset Z, 1_X^B : B \subset Z$ による終位相に一致することとする。すなわち、

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cap"] & B \arrow[d, "\cap"] \\ A \arrow[r, "\subset"] & Z \end{tikzcd}$$

が押し出しであることである。

例　(1) A, B が Z の閉集合であるならば、貼り合わせである。

(2) $Z - B \subset F_1 \subset A, Z - A \subset F_2 \subset B$ をみたす閉集合 F_1, F_2 が存在するならば、貼り合わせである。（条件は、$Z - B \subset O_1 \subset A, Z - A \subset O_2 \subset B$ をみたす開集合 O_1, O_2 の存在と同値である。また、$Z - B \subset \operatorname{Int} A, Z - A \subset \operatorname{Int} B$ とも同値で、成書にはこの形が多い。）

終位相は 1_Z^A, 1_Z^B が連続になるような Z の位相のうち一番強い位相であるから、一般的にはもとの Z の位相より強い。したがって（元の位相での閉集合は終位相による閉集合であるから）、Z が部分空間 A, B の貼り合わせであることを示すには、終位相での任意の閉集合 C（$C \cap A$ が A の閉集合であり、$C \cap B$ が B の閉集合であるような C）が元の位相で閉集合であることを示せばよい。たとえば、（Z の元の位相での）閉包の増分 $\mathbf{C}\ell C - C$ が空集合であることを示せばよい。

補題 1.1　　$Z = F \cup B$ で F は Z の閉集合とする。C は、$F \cap C$ が F の（したがって Z の）閉集合でありかつ $B \cap C$ が B の閉集合であるような Z の部分集合とする。この

とき、

$$\mathbf{C}\ell C = C \cup \{\mathbf{C}\ell(C-F) \cap (F-B)\}$$

がなりたつ。

証明　$C = (C \cap F) \cup (C-F)$ と $C \cap F$ が閉集合であることにより $\mathbf{C}\ell C = \mathbf{C}\ell(C \cap F) \cup \mathbf{C}\ell(C-F) = (C \cap F) \cup \mathbf{C}\ell(C-F) = C \cup \mathbf{C}\ell(C-F)$ である。さらに、$\mathbf{C}\ell C = C \cup \{\mathbf{C}\ell(C-F) \cap (F-B)\} \cup \{\mathbf{C}\ell(C-F) \cap B\}$ となるが、$\mathbf{C}\ell(C-F) \cap B = \mathbf{C}\ell_B(C-F) \subset \mathbf{C}\ell_B(C \cap B) = C \cap B \subset C$ により、$\mathbf{C}\ell C = C \cup \{\mathbf{C}\ell(C-F) \cap (F-B)\}$ となる。

註 補題を大雑把にとらえれば、$\mathbf{C}\ell C - C \subset F - B$ であり、「C の閉包の増分は B にはない」ということになる。

例 2 の証明　C は、$A \cap C$ が A の閉集合でありかつ $B \cap C$ が B の閉集合であるような Z の部分集合とする。$Z - B \subset F_1 \subset A$ より、$F_1 \cup B = Z$ であり、$F_1 \cap C = F_1 \cap A \cap C$ は F_1 の閉集合である。補題により、$\mathbf{C}\ell C - C \subset F_1 - B = A - B$ である。

もう一つの条件より、対称的に $\mathbf{C}\ell C - C \subset F_2 - A = B - A$ である。したがって、$\mathbf{C}\ell C - C \subset (A-B) \cap (B-A) = \emptyset$ である。

2　Puppe の補題の証明

補題 **1.1** と同様 $Z = F \cup B$ で F は Z の閉集合とする。$C \subset Z$ は $F \cap C$ が閉で $B \cap C$ が B の閉集合とする。次のような記号を導入する。

$$B_0 = B \cap F, B_+ = B - F, C_0 = C \cap F, C_+ = C - F$$

「$\mathbf{C}\ell C = C \cup (\mathbf{C}\ell C_+ \cap (F-B))$」であった。$F$ が閉であるから、$B_0 \subset \mathbf{C}\ell B_0 \subset F$ である。これから、分割 $F - B = (F - B_0 =)(F - \mathbf{C}\ell B_0) \amalg (\mathbf{C}\ell B_0 - B_0)$ がえられる。よって、補題 **1.1** は

$$\mathbf{C}\ell C = C \cup (\mathbf{C}\ell C_+ \cap (F - \mathbf{C}\ell B_0)) \cup (\mathbf{C}\ell C_+ \cap (\mathbf{C}\ell B_0 - B_0))$$

となる。

補題 2.1　　補題 **1.1** と同じ条件の下で、

(1) $F - \mathbf{C}\ell B_0$ が Z の開集合であれば、$\mathbf{C}\ell C = C \cup \{\mathbf{C}\ell C_+ \cap (\mathbf{C}\ell B_0 - B_0)\}$ である。

(2) $F - \mathbf{C}\ell B_0$ が X の開集合で、任意の $x \in \mathbf{C}\ell C_+ \cap (\mathbf{C}\ell B_0 - B_0)$ にたいして、部分集合 W_x が存在して $x \in \mathbf{C}\ell W_x, W_x \subset \mathbf{C}\ell C_+ \cap B_0$ がなりたてば、$\mathbf{C}\ell \mathrm{C} = C$、すなわち Z は F と B の貼り合わせである。

証明 (1) $F-\mathbf{C}\ell B_0$ が開集合であることから $C_+\cap(F-\mathbf{C}\ell B_0)=\emptyset$ より $\mathbf{C}\ell C_+\cap(F-\mathbf{C}\ell B_0)=\emptyset$ となる。よって、$\mathbf{C}\ell C=C\cup\{\mathbf{C}\ell C_+\cap(\mathbf{C}\ell B_0-B_0)\}$ である。

(2) $\mathbf{C}\ell \mathrm{C}_+\cap B\subset C$ であった（「C の閉包の増分は B にはない」)。両辺に $F\cap$ をほどこせば、$\mathbf{C}\ell C_+\cap B_0\subset C_0$ で $C_0=F\cap C$ は閉である。

任意に $x\in\mathbf{C}\ell C_+\cap(\mathbf{C}\ell B_0-B_0)$ をとる。$W_x\subset\mathbf{C}\ell C_+\cap B_0\subset C_0$ より、$x\in\mathbf{C}\ell W_x\subset C_0$ である。したがって、$\mathbf{C}\ell C_+\cap(\mathbf{C}\ell B_0-B_0)\subset C_0\subset C$ である。(3) がえられた。

註 この補題は、貼り合わせに関する一般的な補題ではない。「(1) のあまり一般的とはいえない条件があれば、C の閉包の増分 $\mathbf{C}\ell C-C$ の存在範囲が狭まる。(2) で、狭まった増分（にみえる）各点にたいし妙な集合が存在するならば、その各点は、C に属する。したがって増分は空である。」これは、Puppe の補題の証明のしかけを、一般的な枠組みで述べたものである。次の証明を読めば、分節化された理解が得られると思う。

Puppe の補題の証明 $Z=X\times 0\cup A\times I$ において、$F=X\times 0$ は Z の閉集合である。$C\subset Z$ は $C_0=C\cap(X\times 0),C\cap(A\times I)$ がそれぞれ $X\times 0,A\times I$ の閉集合であるような集合とする。補題 **1.1** での $C-F$ はここでは $C_+=C\cap(A\times(0,1])$ である。

$F-\mathbf{C}\ell B_0=X\times 0-\mathbf{C}\ell_Z(A\times 0)=(X\times 0)\cap Z-\mathbf{C}\ell_{X\times I}(A\times 0)\cap Z=(X\times 0-(\mathbf{C}\ell_X A\times 0))\cap Z=(X-\mathbf{C}\ell_X A)\times 0=((X-\mathbf{C}\ell_X A)\times I)\cap Z$ で Z の開集合である。

よって補題 **3.1** (1) より $\mathbf{C}\ell C=C\cup(\mathbf{C}\ell C_+\cap((\mathbf{C}\ell_X A-A)\times 0))$ である。

包含写像 $\iota:Z\subset X\times I$ のレトラクションを $r:X\times I\to Z$ とする。$\iota\circ r(x,y)=(r_1(x,y),r_2(x,y))$ で $r_1:X\times I\to X,r_2:X\times I\to I$ を定義する。$y_+\in(0,1]$ ならば、$A\times y_+(=(X\times y_+)\cap Z)$ は Z の閉集合である。よって、$r(\mathbf{C}\ell_X A\times y_+)=r(\mathbf{C}\ell_{X\times I}(A\times y_+))\subset\mathbf{C}\ell_Z(A\times y_+)=A\times y_+$ となる。これを r_1,r_2 でかけば、$r_1(p,y_+)\in A,r_2(p,y_+)=y_+$ ($p\in\mathbf{C}\ell_X A,y_+\in(0,1]$) である。

$(p,0)\in\mathbf{C}\ell_Z C_+\cap(\mathbf{C}\ell_X A-A)\times 0$ にたいし、パス $f_{(p,0)}:I\to Z$ を $y\mapsto(r_1(p,y),0)$ で定義する。$f_{(p,b)}(0)=(p,0)$, $y_+\in(0,1]\Rightarrow f_{(p,0)}(y_+)\in A\times 0$ である。

これをもちいて、補題 **3.1** (2) の $W_{(p,0)}$ を $W_{(p,0)}=f_{(p,0)}((0,1])$ とおく。まず、$W_{(p,0)}\subset A\times 0$ がみたされる。$(p,0)=f_{(p,0)}(0)\in f_{(p,0)}(I)=f_{(p,0)}(\mathbf{C}\ell_I((0,1]))\subset\mathbf{C}\ell_Z f((0,1])=\mathbf{C}\ell_Z W_{(p,0)}$ もみたされる。あとは、$W_{(p,0)}\subset\mathbf{C}\ell_Z C_+$ がみたされることを確認すれば証明は終る。

その否定は、$f_{(p,0)}(y_+)\notin\mathbf{C}\ell_Z C_+$ であるような $y_+\in(0,1]$ の存在である。これを仮定してみる。$(r_1(p,y_+),0)\in U\times V,(U\times V)\cap Z\cap C_+=\emptyset$ をみたす X の開集合 U と I の開集合 V が存在する。$C_+=C\cap(A\times(0,1])$ であったから、$(U\times V)\cap Z\cap C_+=$

$\{(U\cap A)\times(V\cap(0,1])\}\cap C_+$ であることにに注意。p における $r_1(-,y_+):X\to X$ の連続性により、$p\in U_0, r_1(U_0,y_+)\subset U$ をみたす X の開集合 U_0 が存在する。$r_1(U_0\cap A,y_+)=U_0\cap A\subset U$ すなわち $U_0\cap A\subset U\cap A$ である。$(p,0)$ を含む開集合 $(U_0\times V)\cap Z$ をとる。$(U_0\times V)\cap Z\cap C_+=\{(U_0\cap A)\times(V\cap(0,1])\}\cap C_+\subset\{(U\cap A)\times(V\cap(0,1])\}\cap C_+=(U\times V)\cap Z\cap C_+=\emptyset$ により $(p,0)\notin \mathbf{C}\ell_Z C_+$ が結論される。これは矛盾である。

3 命題

命題 3.1 (X,A) がコファイバード対であるための必要十分条件は、$X\times 0\cup A\times I$ が $X\times I$ のレトラクトであることである。

証明 (X,A) はコファイバード対とする。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\cong} & A\times 0 & \xrightarrow{\subset} & A\times I \\ \downarrow\cap & & \cap\downarrow & & \cap\downarrow \\ X & \xrightarrow{\cong} & X\times 0 & \xrightarrow{\subset} & X\times I \end{array}$$

$1^{X\times 0}_{X\times 0\cup A\times I}:X\times 0\subset X\times 0\cup A\times I, 1^{A\times I}_{X\times 0\cup A\times I}:A\times I\subset X\times 0\cup A\times I$ に対しホモトピー拡張性質を用いれば、連続写像 $r:X\times I\to X\times 0\cup A\times I$ が存在して $r^{X\times 0}=1^{X\times 0}_{X\times 0\cup A\times I}, r^{A\times I}=1^{A\times I}_{X\times 0\cup A\times I}$ がみたされる。したがって、$r^{X\times 0\cup A\times I}=1_{X\times 0\cup A\times I}$ となる。r は $X\times 0\cup A\times I\subset X\times I$ のレトラクションである。

逆に r は $X\times 0\cup A\times I\subset X\times I$ のレトラクションであるとする。Puppe の補題により下可換図式がプッシュアウトになり、$X\times 0\cup A\times I$ は 1^A_X の写像柱 $Z(1^A_X)$ である。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\cong} & A\times 0 & \xrightarrow{\subset} & A\times I \\ \downarrow\cap & & \cap\downarrow & & \cap\downarrow \\ X & \xrightarrow{\cong} & X\times 0 & \xrightarrow{\subset} & X\times 0\cup A\times I \end{array}$$

このプッシュアウトの、余錐 $1^{X\times 0}_{X\times I}, 1^{A\times I}_{X\times I}$ にたいする普遍射（普遍解）は $X\times 0\cup A\times I\subset X\times I$ であり、r はそのレトラクションであることになる。したがって、コファイブレーションの写像柱による特徴づけにより、(X,A) はコファイバード対である。

4 貼り合わせ（続き）

位相空間 Z が、部分空間 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ の貼り合わせであるとは、$Z = \cup_{n=1}^{N} A_n$ でありかつ Z の位相が包含写像の族 $(1_Z^{A_n})_{n=1,2,\cdots,N}$ による終位相に一致することとする。

貼り合わせについて次がなりたつ。

命題 4.1 $Z = \cup_{n=1}^{N} F_n \cup B_0$ とする。すべての n について、F_n は閉部分空間でかつ $F_n \cup B_0$ は F_n と B_0 の貼り合わせであるとする。このとき Z は、$F_1, F_2, \cdots, F_N, B_0$ の貼り合わせである。

証明 $N = 2$ のとき。$A = F_1 \cup B_0, B = F_2 \cup B_0$ とすれば例 2 により、Z は A, B の貼り合わせである。終位相の推移性により結論を得る。

$n = M$ のとき命題がなりたつと仮定する。$A = \cup_{n=1}^{M} F_n \cup B_0, B = F_{M+1} \cup B_0$ として例 2 をもちいれば、Z は A, B の貼り合わせであり、これも終位相の推移性により結論を得る。

例 (X, A) がコファイバード対であるとき、$Z = (X \times 0 \times I) \cup (X \times 1 \times I) \cup (X \times I \times 0) \cup A \times I^2 \subset X \times I^2$ は、$X \times 0 \times I$, $X \times 1 \times I$, $X \times I \times 0$, $A \times I^2$ の貼り合わせである。

文献

[1] Puppe, D., Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. 18(1967), 81-88.

[2] Strøm, A., Note on cofibrations II. Math. Scand. 22(1968), 130-142.

[3] tom Dieck, T. Kamps, K. H. Puppe, D., Homotopietheorie. Springer. 1970.