

Puppe の補題

hiray

Puppe の補題とは、「位相空間対 (X, A) にたいし、 $X \times 0 \cup A \times I$ が $X \times I$ のレトラクトであれば、 $X \times 0 \cup A \times I$ は包含写像 $1_X^A : A \subset X$ の写像柱である」のことである。1967 年 Puppe, D. [1]、の脚注に書かれた。証明は、翌 1968 年 Strøm, A. [2] にでた。ここでは、閉集合を用いた証明を書いてみた。

1 貼り合わせ

位相空間 Z が部分空間 A, B の貼り合わせであるとは、 $Z = A \cup B$ で Z の位相が包含写像 $1_Z^A : A \subset Z, 1_Z^B : B \subset Z$ による終位相に一致することとする。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{\subset} & B \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ A & \xrightarrow{\subset} & Z \end{array}$$

が押し出しであることである。

例 (1) A, B が Z の閉集合であるならば、貼り合わせである。

(2) $Z - B \subset F_1 \subset A, Z - A \subset F_2 \subset B$ をみたす閉集合 F_1, F_2 が存在するならば、貼り合わせである。(条件は、 $Z - B \subset O_1 \subset A, Z - A \subset O_2 \subset B$ をみたす開集合 O_1, O_2 の存在と同値である。また、 $Z - B \subset \text{Int } A, Z - A \subset \text{Int } B$ とも同値で、成書にはこの形が多い。)

終位相は $1_Z^A, 1_Z^B$ が連続になるような Z の位相のうち一番強い位相であるから、一般的にはもとの Z の位相より強い。したがって (元の位相での開集合は終位相による開集合であるから)、 Z が部分空間 A, B の貼り合わせであることを示すには、終位相での任意の閉集合 C ($C \cap A$ が A の閉集合であり、 $C \cap B$ が B の閉集合であるような C) が元の位相で開集合であることを示せばよい。たとえば、(Z の元の位相での) 閉包の増分 $\text{Cl}C - C$ が空集合であることを示せばよい。

補題 1.1 $Z = F \cup B$ で F は Z の閉集合とする。 C は、 $F \cap C$ が F の (したがって Z の) 閉集合でありかつ $B \cap C$ が B の閉集合であるような Z の部分集合とする。この

とき、

$$\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}(C - F) \cap (F - B)\}$$

がなりたつ。

証明 $C = (C \cap F) \cup (C - F)$ と $C \cap F$ が閉集合であることにより $\mathbf{Cl}C = \mathbf{Cl}(C \cap F) \cup \mathbf{Cl}(C - F) = (C \cap F) \cup \mathbf{Cl}(C - F) = C \cup \mathbf{Cl}(C - F)$ である。さらに、 $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}(C - F) \cap (F - B)\} \cup \{\mathbf{Cl}(C - F) \cap B\}$ となるが、 $\mathbf{Cl}(C - F) \cap B = \mathbf{Cl}_B(C - F) \subset \mathbf{Cl}_B(C \cap B) = C \cap B \subset C$ により、 $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}(C - F) \cap (F - B)\}$ となる。

註 補題を大雑把にとらえれば、 $\mathbf{Cl}C - C \subset F - B$ であり、「 C の閉包の増分は B にはない」ということになる。

例 2 の証明 C は、 $A \cap C$ が A の閉集合でありかつ $B \cap C$ が B の閉集合であるような Z の部分集合とする。 $Z - B \subset F_1 \subset A$ より、 $F_1 \cup B = Z$ であり、 $F_1 \cap C = F_1 \cap A \cap C$ は F_1 の閉集合である。補題により、 $\mathbf{Cl}C - C \subset F_1 - B \subset A - B$ である。

もう一つの条件より、対称的に $\mathbf{Cl}C - C \subset F_2 - A \subset B - A$ である。したがって、 $\mathbf{Cl}C - C \subset (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ である。

2 ホモトピー拡張性質

$I = [0, 1]$ と表記し、(X の如何を問わず) $\varepsilon_t : X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, t)$ と表記する。

位相空間対 (X, A) が位相空間 Y にたいしホモトピー拡張性質 (**HEP**) をみたすとは、 $h \circ \varepsilon_0 = f^A$ をみたす任意のホモトピー $h : A \times I \rightarrow Y$ と任意の連続写像 $f : X \rightarrow Y$ にたいし、 $H \circ \varepsilon_0 = f, H^{A \times I} = h$ をみたすようなホモトピー $H : X \times I \rightarrow Y$ が存在することとする。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varepsilon_0} & A \times I \\
 \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
 X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I \\
 & \searrow f & \nearrow h \\
 & & Y
 \end{array}$$

(The diagram shows a commutative square with a diagonal arrow. The top-left node is A , the top-right is $A \times I$, the bottom-left is X , and the bottom-right is Y . Arrows: $A \xrightarrow{\varepsilon_0} A \times I$, $A \times I \xrightarrow{h} Y$, $X \xrightarrow{\varepsilon_0} X \times I$, $X \times I \xrightarrow{H} Y$, $X \xrightarrow{f} Y$. Vertical arrows from A to X and from $A \times I$ to $X \times I$ are labeled $\cap$. A dashed arrow connects $X \times I$ to Y labeled H .)

位相空間対 (X, A) がコファイバード対であるとは、任意の空間 Y にたいし **HEP** がなりたつこととする。

次の命題は、現地調達ということで略証を後ろにぶら下げておく。

命題 2.1 (X, A) がコファイバード対であるための必要十分条件は、次のふたつの条件がなりたつことである。

- (1) 包含写像 $Z = X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ に左逆写像 (レトラクション) $r : X \times I \rightarrow Z$, $r \circ 1_{X \times I}^Z = 1_Z$ が存在し、かつ
- (2) Z は $X \times 0$, $A \times I$ の貼り合わせである。

註 (1) は、 $X \times 0 \cup A \times I$ は $X \times I$ のレトラクトであるといわれる。

(2) は Z が包含写像 $A \subset X$ の写像柱であることを意味する。

命題 2.2 (Puppe の補題) $X \times 0 \cup A \times I$ が $X \times I$ のレトラクトならば、 $X \times 0 \cup A \times I$ は $X \times 0$, $A \times I$ の貼り合わせである。

によって上の命題は過剰条件である。

系 2.3 (X, A) がコファイバード対であるための必要十分条件は、 $X \times 0 \cup A \times I$ が $X \times I$ のレトラクトであることである。

3 Puppe の補題の証明

補題 1.1 と同様 $Z = F \cup B$ で F は Z の閉集合とする。 $C \subset Z$ は $F \cap C$ が閉で $B \cap C$ が B の閉集合とする。次のような記号を導入する。

$$B_0 = B \cap F, B_+ = B - F, C_0 = C \cap F, C_+ = C - F$$

「 $\mathbf{Cl}C = C \cup (\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - B))$ 」であった。 F が閉であるから、 $B_0 \subset \mathbf{Cl}B_0 \subset F$ である。これから、分割 $F - B = (F - B_0) \amalg (F - \mathbf{Cl}B_0) \amalg (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)$ がえられる。よって、補題 1.1 は

$$\mathbf{Cl}C = C \cup (\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - \mathbf{Cl}B_0)) \cup (\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0))$$

となる。

補題 3.1 補題 1.1 と同じ条件の下で、

- (1) $F - \mathbf{Cl}B_0$ が Z の開集合であれば、 $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)\}$ である。
- (2) $F - \mathbf{Cl}B_0$ が X の開集合で、任意の $x \in \mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)$ にたいして、部分集合 W_x が存在して $x \in \mathbf{Cl}W_x$, $W_x \subset \mathbf{Cl}C_+ \cap B_0$ がなりたてば、 $\mathbf{Cl}C = C$ 、すなわち Z は F と B の貼り合わせである。

証明 (1) $F - \mathbf{Cl}B_0$ が開集合であることから $C_+ \cap (F - \mathbf{Cl}B_0) = \emptyset$ より $\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - \mathbf{Cl}B_0) = \emptyset$ となる。よって、 $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)\}$ である。

(2) $\mathbf{Cl}C_+ \cap B \subset C$ であった (「 C の閉包の増分は B にはない」)。両辺に $F \cap$ をほどこせば、 $\mathbf{Cl}C_+ \cap B_0 \subset C_0$ で $C_0 = F \cap C$ は閉である。

任意に $x \in \mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)$ をとる。 $W_x \subset \mathbf{Cl}C_+ \cap B_0 \subset C_0$ より、 $x \in \mathbf{Cl}W_x \subset C_0$ である。したがって、 $\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0) \subset C_0 \subset C$ である。(3) がえられた。

註 この補題は、貼り合わせに関する一般的な補題ではない。「(1) のあまり一般的とはいえない条件があれば、 C の閉包の増分 $\mathbf{Cl}C - C$ の存在範囲が狭まる。(2) で、狭まった増分 (にみえる) 各点にたいし妙な集合が存在するならば、その各点は、 C に属する。したがって増分は空である。」これは、Puppe の補題の証明のしかけを、一般的な枠組みで述べたものである。次の証明を読めば、分節化された理解が得られると思う。

Puppe の補題の証明 $Z = X \times 0 \cup A \times I$ において、 $F = X \times 0$ は Z の閉集合である。 $C \subset Z$ は $C_0 = C \cap (X \times 0)$, $C \cap (A \times I)$ がそれぞれ $X \times 0$, $A \times I$ の閉集合であるような集合とする。補題 1.1 での $C - F$ はここでは $C_+ = C \cap (A \times (0, 1])$ である。

$F - \mathbf{Cl}B_0 = X \times 0 - \mathbf{Cl}_Z(A \times 0) = (X \times 0) \cap Z - \mathbf{Cl}_{X \times I}(A \times 0) \cap Z = (X \times 0 - (\mathbf{Cl}_X A \times 0)) \cap Z = (X - \mathbf{Cl}_X A) \times 0 = ((X - \mathbf{Cl}_X A) \times I) \cap Z$ で Z の開集合である。

よって補題 3.1 (1) より $\mathbf{Cl}C = C \cup (\mathbf{Cl}C_+ \cap ((\mathbf{Cl}_X A - A) \times 0))$ である。

包含写像 $\iota : Z \subset X \times I$ のレトラクションを $r : X \times I \rightarrow Z$ とする。 $\iota \circ r(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y))$ で $r_1 : X \times I \rightarrow X$, $r_2 : X \times I \rightarrow I$ を定義する。 r_1, r_2 は Z 上でそれぞれ第一射影、第二射影である。 $y_+ \in (0, 1]$ ならば、 $A \times y_+ (= (X \times y_+) \cap Z)$ は Z の閉集合である。よって、 $r(\mathbf{Cl}_X A \times y_+) = r(\mathbf{Cl}_{X \times I}(A \times y_+)) \subset \mathbf{Cl}_Z(A \times y_+) = A \times y_+$ となる。これを r_1, r_2 でかけば、 $r_1(p, y_+) \in A$, $r_2(p, y_+) = y_+$ ($p \in \mathbf{Cl}_X A$, $y_+ \in (0, 1]$) である。

$(p, 0) \in \mathbf{Cl}_Z C_+ \cap (\mathbf{Cl}_X A - A) \times 0$ にたいし、パス $f_{(p,0)} : I \rightarrow Z$ を $y \mapsto (r_1(p, y), 0)$ で定義する。 $f_{(p,0)}(0) = (p, 0)$, $y_+ \in (0, 1] \Rightarrow f_{(p,0)}(y_+) \in A \times 0$ である。

これをもちいて、補題 3.1 (2) の $W_{(p,0)}$ を $W_{(p,0)} = f_{(p,0)}((0, 1])$ とおく。まず、 $W_{(p,0)} \subset A \times 0$ がみたされる。 $(p, 0) = f_{(p,0)}(0) \in f_{(p,0)}(I) = f_{(p,0)}(\mathbf{Cl}_I((0, 1])) \subset \mathbf{Cl}_Z f((0, 1]) = \mathbf{Cl}_Z W_{(p,0)}$ もみたされる。あとは、 $W_{(p,0)} \subset \mathbf{Cl}_Z C_+$ がみたされることを確認すれば証明は終る。

その否定は、 $f_{(p,0)}(y_+) \notin \mathbf{Cl}_Z C_+$ であるような $y_+ \in (0, 1]$ の存在である。これを仮定してみる。 $(r_1(p, y_+), 0) \in U \times V$, $(U \times V) \cap Z \cap C_+ = \emptyset$ をみたす X の開集合 U と

I の開集合 V が存在する。 $C_+ = C \cap (A \times (0, 1])$ であったから、 $(U \times V) \cap Z \cap C_+ = \{(U \cap A) \times (V \cap (0, 1])\} \cap C_+$ であることに注意。 p における $r_1(-, y_+) : X \rightarrow X$ の連続性により、 $p \in U_0, r_1(U_0, y_+) \subset U$ をみたす X の開集合 U_0 が存在する。 $r_1(U_0 \cap A, y_+) = U_0 \cap A \subset U$ すなわち $U_0 \cap A \subset U \cap A$ である。 $(p, 0)$ を含む開集合 $(U_0 \times V) \cap Z$ をとる。 $(U_0 \times V) \cap Z \cap C_+ = \{(U_0 \cap A) \times (V \cap (0, 1])\} \cap C_+ \subset \{(U \cap A) \times (V \cap (0, 1])\} \cap C_+ = (U \times V) \cap Z \cap C_+ = \emptyset$ により $(p, 0) \notin \mathbf{Cl}_Z C_+$ が結論される。これは矛盾である。

4 貼り合わせ（続き）

位相空間 Z が、部分空間 $A_1, A_2, \dots, A_N$ の貼り合わせであるとは、 $Z = \bigcup_{n=1}^N A_n$ でありかつ Z の位相が包含写像の族 $(1_Z^{A_n})_{n=1,2,\dots,N}$ による終位相に一致することとする。
貼り合わせについて次がなりたつ。

命題 4.1 $Z = \bigcup_{n=1}^N F_n \cup B_0$ とする。すべての n について、 F_n は閉部分空間でかつ $F_n \cup B_0$ は F_n と B_0 の貼り合わせであるとする。このとき Z は、 $F_1, F_2, \dots, F_N, B_0$ の貼り合わせである。

証明 $N = 2$ のとき。 $A = F_1 \cup B_0, B = F_2 \cup B_0$ とすれば例 2 により、 Z は A, B の貼り合わせである。終位相の推移性により結論を得る。

$n = M$ のとき命題がなりたつと仮定する。 $A = \bigcup_{n=1}^M F_n \cup B_0, B = F_{M+1} \cup B_0$ として例 2 をもちいれば、 Z は A, B の貼り合わせであり、これも終位相の推移性により結論を得る。

例 (X, A) がコファイバード対であるとき、 $Z = (X \times 0 \times I) \cup (X \times 1 \times I) \cup (X \times I \times 0) \cup A \times I^2 \subset X \times I^2$ は、 $X \times 0 \times I, X \times 1 \times I, X \times I \times 0, A \times I^2$ の貼り合わせである。

文献

- [1] Puppe, D., Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. 18(1967), 81-88.
- [2] Strøm, A., Note on cofibrations II. Math. Scand. 22(1968), 130-142.
- [3] tom Dieck, T. Kamps, K. H. Puppe, D., Homotopietheorie. Springer. 1970.

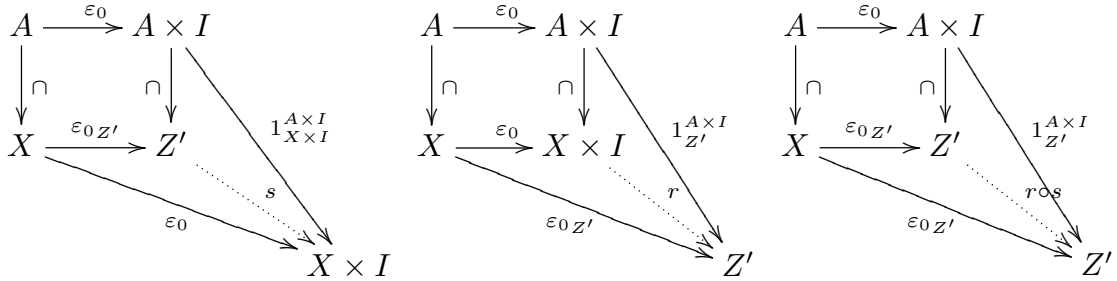
コファイバード対の特徴づけ：命題 2.1 の略証

相対全単射、準相対同相については、ノート「プッシュアウトについて」を参照のこと。

- (X, A) はコファイバード対とする。

$\varepsilon_{0Z} : (X, A) \rightarrow (Z, A \times I)$ が相対全単射であるから、 Z の位相を $\varepsilon_{0Z} : X \rightarrow Z, A \times I \subset Z$ による終位相に取り換えたものを Z' として、準相対同相 $\varepsilon_{0Z'} : (X, A) \rightarrow (Z', A \times I)$ を作ることができる。相対全単射（準相対同相）とは、対の写像を可換図式に書き換えたものが集合（位相空間）としてのプッシュアウトになるのであった。したがって、集合対の可換図式 $\varepsilon_0 : (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ に対する普遍解は包含写像 $1_{X \times I}^Z : Z = X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ である。これから、位相空間対の可換図式 $\varepsilon_{0Z'} : (X, A) \rightarrow (Z', A \times I)$ の普遍解 $s : Z' \rightarrow X \times I$ が得られるが、忘却関手は余極限を創出するから集合の写像としては $s = 1_{X \times I}^Z$ である（下図左）。 $s = 1_{X \times I}^Z \circ s_Z$ と標準分解を書いておく（もちろん、集合の写像としては $s_Z = 1_Z$ である）。

- ホモトピー拡張性質を、写像 $\varepsilon_{Z'} : X \rightarrow Z'$ とホモトピー $1_{Z'}^{A \times I} : A \times I \rightarrow Z'$ に適用して、 $r : X \times I \rightarrow Z'$ を得る（下図真ん中）。プッシュアウトの可換図式と結合して（一番右側の可換図式）



がえられる。 $r \circ s$ を $1_{Z'}$ に取り換えた図式も、可換になることから、普遍解の一意性により $r \circ s = 1_{Z'}$ となる。

- s の標準分解を用いれば、 $1_{Z'} = r \circ s = (r \circ 1_{X \times I}^Z) \circ s_Z$ となるが、集合の写像として左辺と右辺の右側は恒等写像であるから $r \circ 1_{X \times I}^Z : Z \rightarrow Z'$ も集合の写像として恒等写像である。 $Z' = Z$ がえられた。
- (X, A) に関し、(1), (2) がなりたつとする。

(2) により、 $\varepsilon_{0Z} : (X, A) \rightarrow (Z, A \times I)$ は準相対同相である。可換図式 $\varepsilon : (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ に対する普遍解について、 $1_{X \times I}^Z$ で、 $\varepsilon_0 = 1_{X \times I}^Z \circ \varepsilon_{0Z}, 1_X^A \times 1_I = 1_{X \times I}^Z \circ 1_Z^{A \times I}$ がなりたつ。

ホモトピー $h : A \times I \rightarrow Y$ と写像 $f : X \rightarrow Y$ で $h \circ \varepsilon_0 = f \circ 1_X^A$ となる

ものが与えられているとする。準相対同相 $\varepsilon_{0Z} : (X, A) \rightarrow (Z, A \times I)$ の可換図式 $h \circ \varepsilon_0 = f \circ 1_X^A$ に対する普遍解 $w : Z \rightarrow Y$ が得られる。 w について、 $w \circ 1_Z^{A \times I} = h, w \circ \varepsilon_{0Z} = f$ がなりたつ。

条件 (1) により与えられたレトラクション $r : X \times I \rightarrow Z$ をとる。 $(w \circ r) \circ \varepsilon_0 = (w \circ r) \circ (1_{X \times I}^Z \circ \varepsilon_{0Z}) = w \circ \varepsilon_{0Z} = f$ また、 $(w \circ r) \circ (1_X^A \times 1_I) = w \circ (r \circ 1_{X \times I}^Z) \circ 1_Z^{A \times I} = w \circ 1_Z^{A \times I} = h$ となる。ホモトピー $w \circ r : X \times I \rightarrow Y$ について、ホモトピー拡張性質がなりたつことがわかった。