

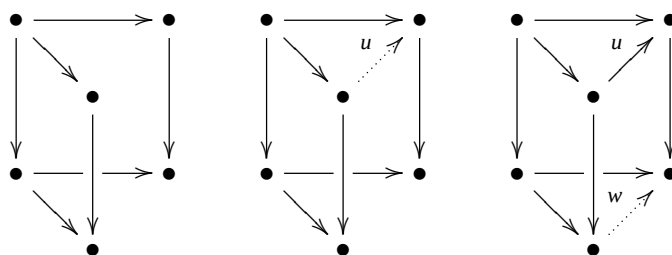
プッシュアウトについて（実践編）

hiray

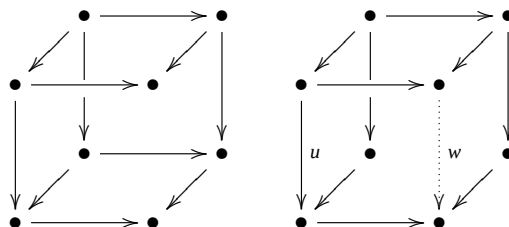
プッシュアウトにかんする実践的なガイドを書くつもりが、途中で方針転換をしてしまった。”準相対同相”の手法が、意外に使えることに気がついたことによる。コファイブレーションについて、定義や初等的な性質はきちんとは書かないが、大まかに片づけてしまうことにした。ついつい、ホモトピー同値の貼り合わせ定理まで、突っ走ってしまった。

1. いくつかの単純な原則を組み合わせれば、プッシュアウトをふくむ可換図式の変形をおこない理屈を進めることができる。それを書いてみる。

1.1 以下の左可換図式で、左手前側面がプッシュアウトであるとする。このとき、 u により上三角面が可換になれば、右手前側面と下三角面が可換になるような w が唯一存在する。

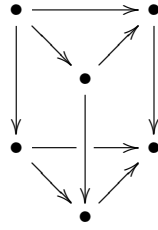


1.2 以下の左図を、上面、下面、左側面、後面が可換であるような可換図式とする。



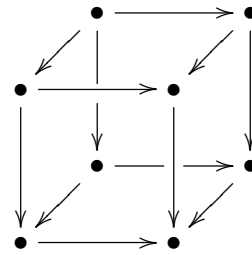
このとき上面が押し出しであるなら、前面と右側面の間の柱（上から下への射 w ）で残りの二面も可換になるようなものが、唯一存在する。なぜなら、右上図のように後面と底面を一つの面とみて、左側面と前面の柱を u とかんがえれば、前項そのものであるから。

1.3 [1]「プッシュアウトについて」で次の補題（e.g. [3] Categories, Schubert, H.）を書いた。「次の可換図形において、左前側面がプッシュアウトであるとする。



このとき、右前側面がプッシュアウトであることと後面がプッシュアウトであることは同値である」

これをもちいれば、つぎのようなことがなりたつ。

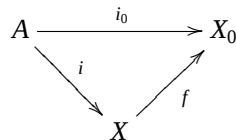


上のような六面体をなす可換図式において、上面と下面を除いた四面のうち左側面と後面を含む三面が押し出しであれば、残りも押し出しである。

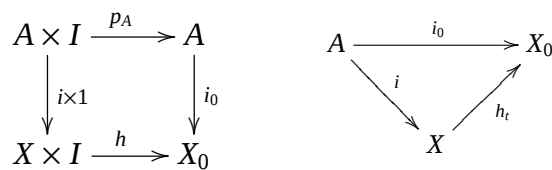
もちろん、”上面と下面”を”左側面と右側面 (resp. 前面と後面)”、”左側面と後面を含む”を”上面と後面 (resp. 上面と左側面)を含む”で置き換えてもよい。

2. 1.1 項 のホモトピー版も書いておこう。

位相空間 A にたいし、連続写像 $i : A \rightarrow X$ を対象 (A -下空間とよぶ) とし i から $i_0 : A \rightarrow X_0$ への射を連続写像 $f : X \rightarrow X_0$ で $i_0 = f \circ i$ をみたすものとした圏を $\mathcal{Top}^A$ と表記する。



ふたつの射 $f, g : i \rightarrow i_0$ が A -下ホモトピックである (これを、 $i \simeq^A i_0$ と表記する) とは、ホモトピー $h : X \times I \rightarrow X_0$, $h_0 = f, h_1 = g$ で $h \circ (i \times 1_I) = i_0 \circ p_A$ がみたされるものが存在することとする。ただし、 $p_A : (a, t) \mapsto a, h_t = h \circ \varepsilon_t, \varepsilon_t : x \mapsto (x, t)$ である。下図右が任意の $t \in I$ にたいし可換図式になることを意味する。



左前面がプッシュアウトであるような、下の（右前面と下面を除く）可換図式にたいし、1.1 項を適用すれば、プリズムの全面が可換になるような W が一意的に充填される。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & X_0 \\
 \downarrow & \searrow i & \nearrow w \\
 & X & \\
 \downarrow & \xrightarrow{j_0} & Y_0 \\
 B & \xrightarrow{j} & Y \\
 & \nearrow j & \nwarrow w
 \end{array}$$

射 $f, g : i \rightarrow i_0$ と A -下ホモトピー $h : X \times I \rightarrow X_0$, $h_0 = f, h_1 = g$ が与えられているものとする。 w に f, g, h_t を代入すれば、対応してそれぞれ $W = F, G, h'_t$ が一意的に定まる。 $h_0 = f, h_1 = g$ であることから $h'_0 = F, h'_1 = G$ である。 h'_t は F, G の間の B -下ホモトピーを与えるように見える。それは正しい。

「 B -下ホモトピー $H : Y \times I \rightarrow Y_0$ が存在して、 $H_t = h'_t$ がなりたつ … (2.1)」

下面と右側面を除く以下の可換図式で、左側面はプッシュアウト図式に局所コンパクト空間を直積したものでプッシュアウトである（3.4.3 項に後置）。このことから、 H が充填されプリズムの全面が可換になる。左側面を $t \in I$ でスライスすれば、下右図を得る。 h'_t の一意性により $h'_t = H_t$ となる。

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I & \xrightarrow{i_0 \circ p_X} & X_0 \\
 \downarrow & \searrow i \times 1 & \nearrow h \\
 & X \times I & \\
 \downarrow & \xrightarrow{j_0 \circ p_B} & Y_0 \\
 B \times I & \xrightarrow{j \times 1} & Y \times I \\
 & \nearrow j & \nwarrow H
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & X_0 \\
 \downarrow & \searrow i & \nearrow h_t \\
 & X & \\
 \downarrow & \xrightarrow{j_0} & Y_0 \\
 B & \xrightarrow{j} & Y \\
 & \nearrow j & \nwarrow H_t
 \end{array}$$

細かい定義は省略するが、同じ前提に加えてプリズムの後面もプッシュアウト図式であるという条件の下で、「 $f : i \rightarrow i_0$ が A -下ホモトピー同値ならば、 $F : j \rightarrow j_0$ も A -下ホモトピー同値である … (2.2)」がなりたつ。

3. 写像柱についてまとめておきたい。前項までの議論の運びがさっそく登場する。

3.1 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ の写像柱 $Z(f)$ とは、以下のプッシュアウト図式を満たす空間である。

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I \\
\downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\
Y & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_0} & Z(f)
\end{array}$$

3.2 自然な可換図式

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I \\
\downarrow f & & \downarrow f \times 1 \\
Y & \xrightarrow{\varepsilon_0} & Y \times I
\end{array}$$

に対する普遍解 $s : Z(f) \rightarrow Y \times I$, $s \circ \bar{f} = f \times 1$, $s \circ \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$ を、“写像柱 $Z(f)$ の f に付随する普遍解” とよぶことにする。

3.3 $p_X : (x, t) \mapsto x$ を射影とする。次のプリズムが可換になるような R が充填される。

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xlongequal{\quad} & X & & \\
\downarrow f & \searrow \varepsilon_0 & \nearrow p_X & \downarrow f & \\
& X \times I & & & \\
\downarrow \bar{f} & & & & \\
Y & \xlongequal{\quad} & Y & & \\
& \searrow \bar{\varepsilon}_0 & \nearrow R & & \\
& Z(f) & & &
\end{array}$$

[6] Whitehead G. W. では、“ $\hat{f}$ (ここでは R) is a deformation retraction, and $\dots$ ” と一言で片づけている。直感的に明らかであるから当然であるが、「 R は Y -下ホモトピー同値である」の理由を書いておく。つぎの可換図式がえられる。

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I & & \\
\downarrow f & \searrow \varepsilon_0 & \nearrow \varepsilon_0 \circ p_X & \downarrow f & \\
& X \times I & & & \\
\downarrow \bar{f} & & & & \\
Y & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_0} & Z(f) & & \\
& \searrow \bar{\varepsilon}_0 & \nearrow \bar{\varepsilon}_0 \circ R & & \\
& Z(f) & & &
\end{array}$$

$\varepsilon_0 \circ p_X$ は X -下空間 $\varepsilon_0 : X \rightarrow X \times I$ から自分自身への射、 $\bar{\varepsilon}_0 \circ R$ は Y -下空間 $\bar{\varepsilon}_0 : Y \rightarrow Z(f)$ から自分自身への射と考えられる。

$h : X \times I \times I \rightarrow X \times I$, $(x, s, t) \mapsto (x, st)$ とする。 $h_0 = \varepsilon_0 \circ p_X$, $h_1 = 1_{X \times I}$ であり、 X -下ホモトピーである。2. 項の議論により $\bar{\varepsilon}_0 \circ R \simeq^A 1_{Z(f)}$ となる。

3.3 註 まとめを挿入しておく。3.3 は写像柱とは無関係に成り立つ。証明は 3.3 と同じで

ある。

次のプッシュアウト図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

に対し、次がなりたつ。

(1) $i: A \rightarrow X$ に左逆写像 $r: X \rightarrow A$ が存在すれば、 $\bar{i}: B \rightarrow Y$ の左逆写像 $R: Y \rightarrow B$ で $R \circ \bar{f} = f \circ r$ をみたすものが唯一つ存在する。

(2) $f \circ r = R \circ \bar{f}$ は押し出しである。

(3) $i \circ r \simeq^A 1_X$ ならば、 $\bar{i} \circ R \simeq^B 1_Y$ である。

3.4 「 f がコファイブレーションであるための必要十分条件は、 f に付随する普遍解 $Z(f) \rightarrow Y \times I$ に左逆写像が存在することである … (3.4.1)」、「コファイブレーションは埋め込みである … (3.4.2)」、「プッシュアウト図式に指数化可能空間（たとえば、局所コンパクト空間）を直積した図式はプッシュアウト図式である … (3.4.3)」などがなりたつ。ここでは、これらは既知としておく。

3.5 $f: X \rightarrow Y$ の写像柱として「特定の」定義を採用することも、かんがえられる。集合として、 $Z(f) = Y \amalg (X \times (0, 1])$ をとり $\varepsilon_0: Y \rightarrow Z(f), y \mapsto y, \bar{f}: X \times I \rightarrow Z(f), (x, 0) \mapsto f(x), (x, t) \mapsto (x, t) (0 < t \leq 1)$ で終位相を入れるというやり方である。こうすれば、つぎのような位相空間の射圏から位相空間の正方形の可換図式の圏への関手が得られる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I, \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ Y & \xrightarrow{\varepsilon_0} & Z(f) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X_1 \times I \\ \downarrow f_1 & & \downarrow \bar{f}_1 \\ X_0 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X_0 \times I \\ \downarrow f_0 & & \downarrow \bar{f}_0 \\ Y_1 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & Z(f_1) \\ \downarrow f_0 & & \downarrow \bar{f}_0 \\ Y_0 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & Z(f_0) \end{array}$$

3.6 包含写像 $i = 1_X^A: A \subset X$ の写像柱 $Z(i)$ については、 $(A \times I, A \times 0) \subset (X \times 0 \cup A \times I, X \times 0)$ が相対全単射（[1]「プッシュアウトについて」を参照のこと）であるから、集合として $Z(i) = X \times 0 \cup A \times I$ として $X \times 0 \subset Z(i), A \times I \subset Z(i)$ による終位相（貼り合わせ位相）を入れるのが自然である。一般的に貼り合わせの位相は、 $X \times I$ の部分空間としての位相より強い。

「 (X, A) がコファイバード対であるための必要十分条件は、 $(X, A) \times (I, 0)$ がレトラ

クト対であることである … (3.6.1)」がなりたつ。必要であることは、この項の前半と前前項からえられ、十分であることは、Puppe の補題による ([2] 「Puppe の補題」を参照のこと)。” $X \times 0 \cup A \times I$ が $X \times I$ のレトラクトであること” を” $(X, A) \times (I, 0)$ がレトラクト対である” と書いてみた。レトラクタブル対としたいが、レトラクタブルという言葉は多分ないだろう。「 (X, A) がコファイバード対ならば、 $(X \times Y, A \times Y)$ もコファイバード対である … (3.6.2)」もなりたつ。なぜなら恒等写像とレトラクションの直積はレトラクションであるからである。またついでに、「 (X, A) がコファイバード対ならば、 $(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ もコファイバード対である … (3.6.3)」もなりたつ。証明：同相写像 $(I, \partial I) \times (I, 0) \cong (I, \emptyset) \times (I, 0)$ を一つとる。 $(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I) \times (I, 0) = (X, A) \times (I, \partial I) \times (I, 0) \cong (X, A) \times (I, \emptyset) \times (I, 0) = (X \times I, A \times I) \times (I, 0)$ となる。レトラクト対と同相な位相空間対はレトラクト対である。(3.6.3) から「 (X, A) はコファイバード対とする。包含写像 $A \subset X$ がホモトピー同値であることは、 A が X の (強) 変位レトラクトであるための必要十分条件である … (3.6.4)」が導かれる。

3.7 写像柱 $Z(f)$ は、 $f : X \rightarrow Y$, $1_X : X \rightarrow X$ に関する複写像柱 $Z(f, 1_X)$ と同一視される。複写像柱 $Z(f, 1_X)$ とは、以下のプッシュアウト図式をみたす空間である。

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle} & X \times I \\ \downarrow f \amalg 1_X & & \downarrow \overline{f \amalg 1_X} \\ Y \amalg X & \xrightarrow{\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle} & Z(f, 1_X) \end{array}$$

以下の左の可換図式を考える。ただし、この図式の左前面は以下の右側の可換図式である。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I \\ \downarrow f & \searrow \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & X \amalg X \\ \downarrow f & & \downarrow f \amalg 1_X \\ Y & \xrightarrow{c} & Y \amalg X \end{array}$$

このプリズムの左前面はプッシュアウト図式であるから、右前面に複写像柱のプッシュアウト図式を持ってくれば (i.e. $Z = Z(f, 1_X)$)、後面がプッシュアウト図式になり $Z(f, 1_X)$ が $Z(f)$ とみなされる。また、後面に写像柱のプッシュアウト図式を代入すれば (i.e. $Z = Z(f)$)、ただちに (プリズムが可換になるような写像)

$Y \amalg X \rightarrow Z(f)$ が充填され、右前面がプッシュアウト図式になり $Z(f)$ は $Z(f, 1_X)$ とみなされる。

4. 以上の準備の下で、「コファイブレーションの余基底変換は、コファイブレーションである … (4)」を二通りのやり方で証明してみる。証明すべきことは、「以下の可換図式がプッシュアウト図式であるとき、 i がコファイブレーションであれば、 j もそうである」ということである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

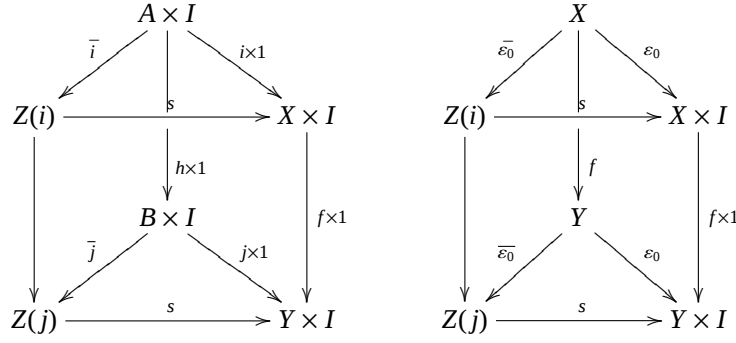
証明 I

4.1 上の可換図式と、次の i, j の写像柱を定義するプッシュアウト図式とを組み合わせ、四面の可換図式を作る（下可換図式三番目）。

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow A \times I, & B \longrightarrow B \times I, & \\ \downarrow & \downarrow & \\ X \longrightarrow Z(i) & Y \longrightarrow Z(j) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \longrightarrow A \times I, & & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ X \longrightarrow Z(i) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Y \longrightarrow Z(j) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \longrightarrow A \times I, & & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ X \longrightarrow Z(i) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Y \longrightarrow Z(j) & & \end{array}$$

上面がプッシュアウト図式であることから直ちに、六面の図式が可換になるような唯一つの $w : Z(i) \rightarrow Z(j)$ がえられる（上可換図式四番目）。ここで、前後二面を除く四面のうち右側面を除く三面がプッシュアウト図式であるから、右側面もプッシュアウト図式になる（1.2 項）。

4.2 写像柱 $Z(i)$ の i に付随する普遍解 $s : Z(i) \rightarrow X \times I$, $s \circ \bar{i} = i \times 1_I$, $s \circ \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$ 、 $Z(j)$ の j に付随する普遍解 $s : Z(j) \rightarrow Y \times I$, $s \circ \bar{j} = j \times 1_I$, $s \circ \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$ と w , $f \times 1_I$ により二つの図式がえられる。



ここで、前面を除くすべての面で図式は可換である。ふたつの図式の右後側面の可換性は明らか、上下面の可換性は普遍解 s に付随して可換であり、ふたつの図式の左後側面は普遍解 w に付随して可換であった。これから、図式を追っかければ $((f \times 1) \circ s) \circ \bar{i} = (s \circ w) \circ \bar{i}$, $((f \times 1) \circ s) \circ \bar{\epsilon}_0 = (s \circ w) \circ \bar{\epsilon}_0$ となる。これは、 $(f \times 1) \circ s \circ \langle \bar{\epsilon}_0, \bar{i} \rangle = (s \circ w) \circ \langle \bar{\epsilon}_0, \bar{i} \rangle$ を意味する。 $\langle \bar{i}, \bar{\epsilon}_0 \rangle : X \amalg (A \times I) \rightarrow Z(i)$ が epi 射であることから（「プッシュアウトについて」を参照のこと、意図的に全射と書かなかった）可換性 $s \circ w = (f \times 1) \circ s$ が導かれる。上の図式は双方とも可換図式であることが分かった。

さらに、左側の可換図式において左後面はプッシュアウト図式であり（4.1 項）、右後側面も I が局所コンパクトであることからプッシュアウトであり、したがって前面もプッシュアウト図式となる。

4.3 i はコファイブレーションであったから、写像柱の i に付随する普遍解 s に左逆写像 r が存在する（3.5 項）。下の可換図式において、左前側面がプッシュアウト図形であることから右前側面と下三角面とを可換にする R が存在する。これは写像柱 $Z(j)$ の j に付随する普遍解の左逆写像である。ゆえに、 j はコファイブレーションである（(3.6.1)）。

$$\begin{array}{ccc}
 Z(i) & \xlongequal{\quad} & Z(i) \\
 \downarrow s & \searrow & \nearrow r \\
 & X \times I & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z(j) & \xlongequal{\quad} & Z(j) \\
 \downarrow s & \searrow & \nearrow R \\
 & Y \times I &
 \end{array}$$

5. 簡単な原則を積み上げていけば、証明が進むことが分かった。これはこれで気に入っているのだが、俊敏さに欠けるような気がする。 $j : B \rightarrow Y$ の写像柱を最初に持ってきたのがまずかったか。

われわれは、「位相空間対 (X, A) と連続写像 $h : A \rightarrow B$ にたいし B を部分空間とする Y

と $f_B^A = h$ をみたす連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在して $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相になる」ことを示した（「プッシュアウトについて」参照のこと）。準相対同相とは、位相空間対の写像を可換図式に書き直したものがプッシュアウト図式になることを意味する。位相空間の閉対については、このことはよく知られているし、閉対でなくともなりたつことは、知っている人は知っていることだと思う。これは一般的に書けば、「埋め込みの余基底変換は、埋め込みである」ということである。

そうであれば、「 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相でかつ、 (X, A) がコファイバード対であれば (Y, B) もコファイバード対である」を証明すれば、「コファイブレーションの余基底変換は、コファイブレーションである」が示されることになる。

準相対同相の分割補題がひつようになるので、「プッシュアウトについて」（命題 0.18）から必要な形で再録する。「 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は準相対同相であるとする。 $A \subset X_0 \subset X$ であるような任意の X_0 について、 $Y_0 = B \cup f(X_0)$ とおけば、 $f_{Y_0}^{X_0} : (X_0, A) \rightarrow (Y_0, B)$ は準相対同相である。したがって、 $f : (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ も準相対同相である」

証明 II

5.1 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相でかつ、 (X, A) がコファイバード対であるとする。

包含写像 $1_X^A : A \subset X, 1_Y^B : B \subset Y$ をそれぞれ i, j とかく。

(X, A) がコファイバード対であることから、 $Z(i) = X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ でありかつレトラクション $r : X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ が存在する。

5.2 I が局所コンパクトであることから、 $f \times 1_I : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y \times I, B \times I)$ も準相対同相である。準相対同相の分割補題により、 $f : (X \times I, Z(i)) \rightarrow (Y \times I, (f \times 1_I)(Z(i)) \cup (B \times I))$ が準相対同相になる。ところが、 $(f \times 1_I)(Z(i)) \cup (B \times I) = (f(X) \times 0) \cup (B \times I) = ((f(X) \cup B) \times 0) \cup (B \times I) = (Y \times 0) \cup (B \times I)$ である。したがって、以下の図式の左前側面がプッシュアウト図式であり、4.3 と同様に下三角面と右前側面が可換になるような $R : Y \times I \rightarrow Y \times 0 \cup B \times I$ が充填される。 $Y \times 0 \cup B \times I$ は $Y \times I$ のレトラクトである。Puppe の補題により、 $Y \times 0 \cup B \times I$ は j の写像柱であり、 (Y, B) はコファイバード対である。

$$\begin{array}{ccccc}
 Z(i) & \xlongequal{\quad} & & \xlongequal{\quad} & Z(i) \\
 & \searrow c & & \nearrow r & \\
 & & X \times I & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 Y \times 0 \cup B \times I & \xlongequal{\quad} & & \xlongequal{\quad} & Y \times 0 \cup B \times I \\
 & \searrow c & & \nearrow R & \\
 & & Y \times I & &
 \end{array}$$

註 Puppe の補題という禁じ手 (?) に顔をしかめる人がいるかもしれないが、もうひと手間かければ用いる必要はない。以下の図式は、横向き矢印がすべて包含写像、縦は $f \times 1_I$ の制限であるから、可換である。4.1 の議論をさかさまにやる。ここでは、前後二面と下面を除く三面がプッシュアウト図式であることから、下面がプッシュアウトになる。これは、 $Y \times 0 \cup B \times I$ が j の写像柱であることを意味する。したがって、 (Y, B) はコファイバード対になる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & A \times 0 & \xrightarrow{\quad} & A \times I & \\
 & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 X \times 0 & \xrightarrow{\quad} & Z(i) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & B \times 0 & \xrightarrow{\quad} & B \times I & \\
 \swarrow & & \downarrow & \swarrow & \\
 Y \times 0 & \xrightarrow{\quad} & Y \times 0 \cup B \times I & &
 \end{array}$$

6. 写像柱について、もう少し補足しておく。写像柱 $Z(f)$ は、 $f : X \rightarrow Y$, $1_X : X \rightarrow X$ に関する複写像柱 $Z(f, 1_X)$ と同一視された (3.7)。プッシュアウト図式

$$\begin{array}{ccc}
 X \amalg X & \xrightarrow{\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle} & X \times I \\
 \downarrow f \amalg 1_X & & \downarrow \overline{f \amalg 1_X} \\
 Y \amalg X & \xrightarrow{\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle} & Z(f, 1_X)
 \end{array}$$

において、 $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle$ は閉コファイブレーションであるから $\overline{\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle}$ も閉コファイブレーションである。また閉コファイブレーションの合成は閉コファイブレーションであることから、 $\overline{\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle}^X : X \subset Y \amalg X \rightarrow Z(f, 1_X)$ も閉コファイブレーションである。これは、 $\bar{f} \circ \varepsilon_1 : X \rightarrow Z(f)$ と同一視され (下可換図式)、これも閉コファイブレーションである。

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\varepsilon_0} & X \times I & \xleftarrow{\varepsilon_1} & X \\
 \downarrow f & & \downarrow \overline{f \amalg 1_X} & & \downarrow \bar{f} \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & Z(f, 1_X) & & \\
 & \searrow \varepsilon_0 & \searrow \cong & \searrow & \\
 & & & & Z(f)
 \end{array}$$

$R \circ (\bar{f} \circ \varepsilon_1) = f \circ p_X \circ \varepsilon_1 = f$ により、「任意の連続写像は、閉コファイブレーションとホモトピー同値写像の合成としてかけられる … (6.1)」が導かれる。このことと、(3.6.4) か

ら「 $f : X \rightarrow Y$ がホモトピー同値であるための必要十分条件は $\bar{f} \circ \varepsilon_1 : X \rightarrow Z(f)$ が X -ホモトピー同値であることである … (6.2)」が導かれる。

7. 「ホモトピー同値のコファイブレーションによる余基底変換は、ホモトピー同値である … (7.1)」を証明する。「コファイバード対 (X, A) と準相対同相 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ について、 $f_B^A : A \rightarrow B$ がホモトピー同値であるならば $f : X \rightarrow Y$ もホモトピー同値である … (7.1)′」を示せばよい。準相対同相を用いて証明してみる。

命題 0.1 位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $f_B^A : (A, A_0) \rightarrow (B, B_0)$ について、 $f_B^A : (A, A_0) \rightarrow (B, B_0)$ は準相対同相であるとする。このとき、 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相であることと、 $f : (X, A_0) \rightarrow (Y, B_0)$ が準相対同相であることは同値である。

註 プッシュアウトの結合は、縦横?! 二種がある。対応して、準相対同相の結合は”準相対同相写像の結合”と”包含写像の結合”の二種があり、前者に対応する命題は、「プッシュアウトについて」に書いた、これは後者に対応する場合である。上記レポートで書き忘れたのでここに書いておく。証明は同様ということで省略する。

(7.1)′ の証明 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は準相対同相で、 $f_B^A : A \rightarrow B$ がホモトピー同値とする。

- f の写像柱 Z を、相対同相 $F : (X \times I, X \times \partial I) \rightarrow (Z, Y \amalg X \times 1)$ として記述する。
これに、準相対同相 $F_{Y \amalg X \times 1}^{X \times \partial I} : (X \times \partial I, A \times 0 \amalg X \times 1) \rightarrow (Y \amalg X \times 1, B \amalg X \times 1)$,
 $F_{B \amalg X \times 1}^{A \times 0 \amalg X \times 1} : (A \times 0 \amalg X \times 1, A \times \partial I) \rightarrow (B \amalg X \times 1, B \amalg A \times 1)$ を結合する。

$$\begin{array}{ccccccc} A \times \partial I & \xrightarrow{\subset} & A \times 0 \amalg X \times 1 & \xrightarrow{\subset} & X \times \partial I & \xrightarrow{\subset} & X \times I \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow F \\ B \amalg A \times 1 & \xrightarrow{\subset} & B \amalg X \times 1 & \xrightarrow{\subset} & Y \amalg X \times 1 & \xrightarrow{\subset} & Z \end{array}$$

準相対同相 $F : (X \times I, A \times \partial I) \rightarrow (Z, B \amalg A \times 1)$ がえられた。

- $A \times \partial I \subset A \times I \subset A \times I \amalg X \times 1$ にたいし、 $Z_0 = (B \amalg A \times 1) \cup F(A \times I) = B \cup F(A \times (0, 1)) \cup (A \times 1)$, $Z_1 = (B \amalg A \times 1) \cup F((A \times I) \cup (X \times 1)) = B \cup F(A \times (0, 1)) \cup (X \times 1)$ とすれば、分解

$$\begin{array}{ccccccc} A \times \partial I & \xrightarrow{\subset} & A \times I & \xrightarrow{\subset} & (A \times I) \cup (X \times 1) & \xrightarrow{\subset} & X \times I \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow F \\ B \amalg (A \times 1) & \xrightarrow{\subset} & Z_0 & \xrightarrow{\subset} & Z_1 & \xrightarrow{\subset} & Z \end{array}$$

がえられる。準相対同相の分解 $F : (X \times I, (A \times I) \cup (X \times 1)) \rightarrow (Z, Z_1)$, $F_{Z_1}^{(A \times I) \cup (X \times 1)} : ((A \times I) \cup (X \times 1), A \times I) \rightarrow (Z_1, Z_0)$, $F_{B \amalg A \times 1}^{A \times I} : (A \times I, A \times \partial I) \rightarrow (Z_0, B \amalg A \times 1)$ である。

- 次の可換図式を追跡する。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A \times 1 & \xrightarrow{c} & X \times 1 & \xleftarrow{\cong} & X \\
 & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \varepsilon_1 \\
 A \times \partial I & \xrightarrow{c} & A \times I & \xrightarrow{c} & (A \times I) \cup (X \times 1) & \xrightarrow{c} & X \times I \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow F \\
 B \amalg (A \times 1) & \xrightarrow{c} & Z_0 & \xrightarrow{c} & Z_1 & \xrightarrow{c} & Z \\
 & & & & & & \downarrow R \\
 & & & & & & Y
 \end{array}$$

$\searrow f$

左下の四角図式は、 f_B^A の写像柱を複写像柱として表現している。仮定により f_B^A がホモトピー同値であるから二番目の縦列の合成は（強）変位レトラクトである（(6.2)）。真ん中上の四角は、パラメータを逆に考えれば、包含写像 1_X^A の写像柱を定義しているものと考えられるので準相対同相である。上下を結合する。3.3 註により、左から三番目の縦列の合成は（強）変位レトラクトである。つぎに、下右端の四角図式の $A \times I \cup X \times 1 \subset X \times I$ は、（強）変位レトラクトである。なぜなら、 (X, A) はコファイバード対であるから $(X \times I, X \times 0 \cup A \times I)$ はレトラクト対であり、 $r : X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$ が存在する。同相 $\tau : (X \times I, X \times 0 \cup A \times I) \rightarrow (X \times I, A \times I \cup X \times 1)$, $(x, s) \mapsto (x, 1 - s)$ をもちいればレトラクト $\rho = \tau \circ r \circ \tau : X \times I \rightarrow A \times I \cup X \times 1$ がえられる。 $\rho(x, s) = (\rho_1(x, s), \rho_2(x, s))$ とおけば、 $K : X \times I \times I \rightarrow X \times I$, $(x, s, t) \mapsto (\rho_1(x, t + s(1 - t)), st + (1 - t)\rho_2(x, s))$ により、 $A \times I \cup X \times 1 \subset X \times I$ は、（強）変位レトラクトである。したがって 3.3 註により、 $Z_1 \subset Z$ は（強）変位レトラクトである。ゆえに、図式の一番右可換三角図式の縦列の合成 $F \circ \varepsilon_1$ はホモトピー同値であり、ホモトピー同値 R との合成 $f : X \rightarrow Y$ はホモトピー同値である。

註 たとえば [6] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory 25, 26 頁あたりに証明がかかっている。特定のやり方（3.5 項）で付加空間を作り、直感と腕力で簡略に証明ができています。ここでも同じことをやっているのだが、準相対同相の枠組みを用いているので位相の問題がまえもって解決されているから、可換図式を追うことだけで済んでしまう。

8. 仕上げに、（ホモトピー同値写像の）貼り合わせ定理（the gluing theorem）を書いておく。

以下の図式において、左図式は可換で i, j はコファイブレーション、 u_0, u, v はホモトピー同値であるとする。右図は $A_0 \xleftarrow{a} A \xrightarrow{i} X$ と $B_0 \xleftarrow{b} B \xrightarrow{j} Y$ のプッシュアウト、 $A_0 \xrightarrow{i_0} X_0 \xleftarrow{x} X$ 、 $B_0 \xrightarrow{j_0} Y_0 \xleftarrow{y} Y$ をくわえた可換図式に 1.2 項を適用してえられた $w : X_0 \rightarrow Y_0$ を充填した可換図式である。

$$\begin{array}{ccc}
 A_0 & \xleftarrow{a} & A & \xrightarrow{i} & X \\
 \downarrow u_0 & & \downarrow u & & \downarrow v \\
 B_0 & \xleftarrow{b} & B & \xrightarrow{j} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & A & \longrightarrow & X \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 A_0 & \longrightarrow & X_0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & B & \xrightarrow{w} & Y \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 B_0 & \longrightarrow & Y_0 & &
 \end{array}$$

このとき、「 w もホモトピー同値である … (8.1)」がなりたつ。

証明 [後面 ($j \circ u = v \circ i$) がプッシュアウト図式であるばあい] まず、上下両面がプッシュアウト図式であることとあわせて 1.3 項により、前面もプッシュアウト図式になる。つぎに、 i がコファイブレーションであることから、 $i_0 : A_0 \rightarrow X_0$ がコファイブレーションとなり、縦列 $u_0 : A_0 \rightarrow B_0$ がホモトピー同値であることとあわせて、(7.1) により w はホモトピー同値となる。

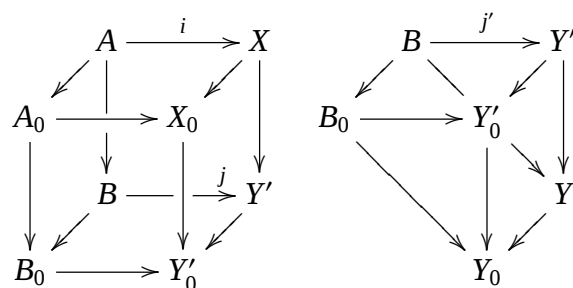
[後面がプッシュアウト図式でないばあい] $B \xleftarrow{u} A \xrightarrow{i} X$ のプッシュアウト $B \xrightarrow{j'} Y' \xleftarrow{v'} X$ をとり、可換図式 $j \circ u = v \circ i$ に対する普遍解を $'v : Y' \rightarrow Y$ とする。

所与の可換図式は、以下のように二つに分解される。左の図式の右四角において、 j' はコファイブレーション i の余基底変換であるからコファイブレーションである ((4)) ことと、 u がホモトピー同値であるから (7.1) により v' はホモトピー同値であり、 $v = 'v \circ v'$ により $'v$ もホモトピー同値になることに注意。

$$\begin{array}{ccc}
 A_0 & \xleftarrow{a} & A & \xrightarrow{i} & X \\
 \downarrow u_0 & & \downarrow u & & \downarrow v' \\
 B_0 & \xleftarrow{b} & B & \xrightarrow{j'} & Y'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 B_0 & \xleftarrow{b} & B & \xrightarrow{j'} & Y' \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow 'v \\
 B_0 & \xleftarrow{b} & B & \xrightarrow{j} & Y
 \end{array}$$

左の可換図式に、 $A_0 \xleftarrow{a} A \xrightarrow{i} X$ と $B_0 \xleftarrow{b} B \xrightarrow{j'} Y'$ のプッシュアウト、 $A_0 \xrightarrow{i_0} X_0 \xleftarrow{x} X$ 、 $B_0 \xrightarrow{j'_0} Y'_0 \xleftarrow{y'} Y$ をくわえた可換図式に、さらに 1.2 項を適用して得られた $w' : X_0 \rightarrow Y'_0$ を充填した可換図式が下図左である。また、上右可換図式に $B_0 \xleftarrow{b} B \xrightarrow{j'} Y'$ と $B_0 \xleftarrow{b} B \xrightarrow{j} Y$ のプッシュアウト、 $B_0 \xrightarrow{j'_0} Y'_0 \xleftarrow{y'} Y$ 、 $B_0 \xrightarrow{j_0} Y_0 \xleftarrow{y} Y$ をくわえてさらに 1.2 項を適用して得られた $'w : Y'_0 \rightarrow Y_0$ を充填した可換図式が下図下である (六面体はプリズムに縮退してい

る)。 w の一意性により、 $w = 'w \circ w'$ である。



左可換図式において、 $w' : X_0 \rightarrow Y'_0$ は [後面がプッシュアウト図式であるばあい] であるから、ホモトピー同値である。右可換図式において、 $'w : Y'_0 \rightarrow Y_0$ がホモトピー同値になれば、証明は終わる。

プリズムにおいて、四角面はすべてプッシュアウト図式である。さらに、 $j : B \rightarrow Y$, $j' : B \rightarrow Y'$ はコファイブレーションである。” $Y' \rightarrow Y$ が B -下ホモトピー同値である” なら、(2.2) により $Y'_0 \rightarrow Y_0$ も B_0 -下ホモトピー同値となり証明は終わる。Dold の定理 : 「 B -下写像 $j' \rightarrow j$ は、 j', j がコファイブレーションでかつ $Y' \rightarrow Y$ がホモトピー同値であるなら B -下ホモトピー同値である … (8.2)」 かなりたつ (ここでは証明を与えない)。

Dold の定理の証明は、トランスポートの理論を用いる証明が [4] にある。(3.6.3) から (3.6.4) を導くのと同様の手法で、ホモトピー同値を B -下ホモトピー同値に変形する証明が [5] にあり、いずれも、(3.6.3) をもちいるが、一般論のレベルで用いるのと、問題に合わせてその都度ホモトピーを考えるのとでは、前者のほうがやさしいような気がする。

文献

- [1] hiray, プッシュアウトについて, www.eonet.ne.jp/~hymath/
- [2] hiray, Puppe の補題, www.eonet.ne.jp/~hymath/
- [3] Schubert, H., Categories, Springer, 1972
- [4] tom Dieck, T., Algebraic topology, 2008
- [5] tom Dieck, T., Kamps, K. H., Puppe, D., Homotopietheorie, Springer, 1970
- [6] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978