モデル圏について

hiray

1　モデル圏

1.1　準備

1. 定義　$\mathcal{A}$ を圏とし、$\mathcal{A}^{\mathbf{1}}$ は射圏とする。g が f の（射圏 $\mathcal{A}^{\mathbf{1}}$ における）レトラクトであるとは、上下の水平射の結合が恒等射である（$r \circ s = 1_{Ss}, r' \circ s' = 1_{Ss'}$）ような次の可換図式が存在することである。

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[d, "g"] \\ \bullet \arrow[r, "s'"] & \bullet \arrow[r, "r'"] & \bullet \end{tikzcd}$$

註　$r \circ s = 1_{Ss}$ ならば、r は $s \circ r$ のレトラクトである。つぎの可換図式による。

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "="] \arrow[d, "r"] & \bullet \arrow[r, "="] \arrow[d, "s \circ r"] & \bullet \arrow[d, "r"] \\ \bullet \arrow[r, "s"] & \bullet \arrow[r, "r"] & \bullet \end{tikzcd}$$

とくに、任意の同型射は恒等射のレトラクトである（$s \circ r = 1_{Sr}$ もみたす場合）。

$\mathcal{B} \subset M\mathcal{A}$ とする。$\mathcal{B}$ がレトラクトに関して閉じているとは、$\mathcal{B}$ の射のレトラクトであるような任意の射は $\mathcal{B}$ に属することである。とくに、$\mathcal{B}$ の射と（射圏の対象として）同型な射はすべて $\mathcal{B}$ の射である。したがって上の註により、すべての恒等射が $\mathcal{B}$ に属するならば（$I(O\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$）、すべての同型射は $\mathcal{B}$ に属する。
例 $\mathcal{A}$ の同型射全体のクラス $Iso(\mathcal{A})$ はレトラクトに関して閉じている。

2. 定義 $M\mathcal{A}$ における二項関係 $\boxslash \subset M\mathcal{A} \times M\mathcal{A}$ を $i \boxslash p \Leftrightarrow$ ”（射圏における）任意の射 ${}^t(f, g) : i \to p$ にたいし $h \circ i = f, p \circ h = g$ をみたす射（リフトとよぶ）$\ell : Ti \to Sp$ が存在する” で定義する。

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\ \bullet \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "\ell"] & \bullet \end{tikzcd}$$

二項関係 $\boxslash$ において、p の像と i 逆像は $\boxslash p = \{i | i \boxslash p\}, i \boxslash = \{p | i \boxslash p\}$ と表記される。$\mathcal{R}, \mathcal{L} \subset M\mathcal{A}$ の、$\boxslash$ による $\mathcal{R}$ の像と $\mathcal{L}$ の逆像はそれぞれ $\boxslash\mathcal{R} = \cup_{r \in \mathcal{R}} \boxslash r$, $\mathcal{L}\boxslash =$

$\cup_{\ell\in\mathcal{L}}\ell\boxslash$ であるがここではあまり重要ではない。つぎのようなクラスを導入する。

$$^{\boxslash}\mathcal{R}=\cap_{p\in\mathcal{R}}\boxslash p,\ \mathcal{L}^{\boxslash}=\cap_{i\in\mathcal{L}}i\boxslash$$

$\mathcal{L}\boxslash\mathcal{R}(\iff \mathcal{L}\times\mathcal{R}\subset\boxslash)\iff \mathcal{L}\subset{}^{\boxslash}\mathcal{R}\iff\mathcal{R}\subset\mathcal{L}^{\boxslash}$ がなりたつ。

$i\boxslash p$ を $i\in\boxslash p$ とかんがえるとき、「i には p にたいする〈左持ち上げ性質ＬＬＰ〉がある」と表現し、$p\in i\boxslash$ とかんがえるときは、「p には i にたいする〈右持ち上げ性質ＲＬＰ〉がある」と表現する。同様に、$\mathcal{L}\subset{}^{\boxslash}\mathcal{R}$ を、$\mathcal{L}$（の各射）は $\mathcal{R}$ にたいしてＬＬＰをみたすといい、$\mathcal{R}\subset\mathcal{L}^{\boxslash}$ を、$\mathcal{R}$ は $\mathcal{L}$ にたいしてＲＬＰをみたすという。

命題 1.1　$\mathcal{R}$ は $M\mathcal{A}$ の任意の部分クラスとする。次が成り立つ。

(1) ${}^{\boxslash}\mathcal{R}$ はすべての同型射を含む $\mathcal{A}$ の部分圏である。

(2) ${}^{\boxslash}\mathcal{R}$ はレトラクトで閉じている。

(3) ${}^{\boxslash}\mathcal{R}$ は余基底変換に関して閉じている。

$\mathcal{L}$ は $M\mathcal{A}$ の任意の部分クラスとする。双対的に次が成り立つ。

(1)' $\mathcal{L}^{\boxslash}$ はすべての同型射を含む $\mathcal{A}$ の部分圏である。

(2)' $\mathcal{L}^{\boxslash}$ はレトラクトで閉じている。

(3)' $\mathcal{L}^{\boxslash}$ は基底変換に関して閉じている。

証明

(2) f を $g\in{}^{\boxslash}\mathcal{R}$ のレトラクトとし、f から任意の $p\in\mathcal{R}$ への任意の射 $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}:f\to p$ をとる。$g\boxslash p$ により、リフト $\ell:Tg\to Sp$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
\bullet \arrow[r, "s'"] & \bullet \arrow[r, "r'"] \arrow[urr, dotted, "\ell"] & \bullet \arrow[r, "k"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$\ell\circ s':Tf\to Sp$ をリフトとして $f\boxslash p$ が導かれる。

(3) $i\in{}^{\boxslash}\mathcal{R}$ とし、$\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}:i\to j$ を押し出しとする。任意の $p\in\mathcal{R}$ と $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:j\to p$ をとる。

$i\in{}^{\boxslash}\mathcal{R}$ により、リフト $h:Ti\to Sp$ で $h\circ i=u\circ f,\ p\circ h=v\circ g\ \cdots(*)$ をみたすものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[urr, dotted, "h"] & \bullet \arrow[r, "v"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}:i\to j$ が押し出しであること（と $h\circ i=u\circ f$）から普遍解 $k:Tj\to Sp$ で $k\circ j=u,k\circ g=h\ \cdots(**)$ をみたすものが唯ひとつ存在する。この k が $k\circ j=u,p\circ k=v$ をみたせば、これが射$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:j\to q$ のリフトである。最初の $k\circ j=u$ はだいじょうぶ

((**))。また、押し出し$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\colon i \to j$ の u, h にかんする普遍解が k であるから $p \circ k$ はこの押し出しの $p \circ u, p \circ h$ に関する普遍解である。同様に v にも普遍解の資格がある。普遍解の一意性により $p \circ k = v$ となる。ゆえに、$j \in {}^{\boxslash}\mathcal{R}$ である。

註 $M\mathcal{A}$ はクラスであり集合とは限らないが、二項関係と考えれば理解しやすい。

3. 定義 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ を $M\mathcal{A}$ の部分クラスの対とする。

(1) $\mathcal{A}$ が $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ によって分解されるとは、任意の射 f が $f = p(f) \circ i(f), i(f) \in \mathcal{L}, p(f) \in \mathcal{R}$ と分解されることとする。

(2) (1) の分解が関手的であるとは、$i, p : \mathcal{A}^{\mathbf{1}} \to \mathcal{A}^{\mathbf{1}}$ が関手であり、$f = p(f) \circ i(f), i(f) \in \mathcal{L}, p(f) \in \mathcal{R}$ と分解されることとする。必然的に、$S \circ i = S, T \circ i = S \circ p, T \circ p = T$ となる。ここで源 S と的 T は $\mathcal{A}^{\mathbf{1}} \to \mathcal{A}$ なる関手としている。

(3) $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ が弱分解系 ＷＦＳ（a weak factorization system ） であるとは、$\mathcal{L} = {}^{\boxslash}\mathcal{R}, \mathcal{R} = \mathcal{L}^{\boxslash}$ が成り立つこととする。

命題 1.2　$\mathcal{A}$ が $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ により分解されているとする。このとき、$(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ が弱分解系であることと、$\mathcal{L} \boxslash \mathcal{R}$ でありかつ $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ がレトラクトで閉じていることは同値である。

証明 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ が弱分解系であるとする。$\mathcal{L} \boxslash \mathcal{R}$ が成り立つことは自明であり、**命題 1．1** (2) とその双対 (2)' により $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ はレトラクトで閉じている。

逆に $\mathcal{L} \boxslash \mathcal{R}$ が成り立ち、$\mathcal{L}, \mathcal{R}$ がレトラクトで閉じていると仮定する。任意に $f \in {}^{\boxslash}\mathcal{R}$ をとる。任意の $p \in \mathcal{R}$ にたいして $f \in {}^{\boxslash}p$ である。$f = q \circ j$, $q \in \mathcal{R}$, $j \in \mathcal{L}$ と分解する。これを、$\begin{pmatrix} j \\ 1_{Tf} \end{pmatrix}\colon f \to q$ とおもえば、$f \in {}^{\boxslash}q$ であるからリフト $\ell : Tf \to Sq$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "="] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[r, "="] \arrow[d, "j"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "\ell"] & \bullet \arrow[r, "q"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

によって、$f \in \mathcal{L}$ となる。$\mathcal{L} = {}^{\boxslash}\mathcal{R}$ がえられた。同様に、任意に $f \in \mathcal{L}^{\boxslash}$ をとれば 任意の $i \in \mathcal{L}$ にたいし $f \in i^{\boxslash}$ である。$f = q \circ j$, $q \in \mathcal{R}$, $j \in \mathcal{L}$ と分解すれば、$f \in j^{\boxslash}$ によりリフト $\ell : Tj \to Sf$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "q"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "="] & \bullet \arrow[r, "="] & \bullet
\end{tikzcd}$$

によって、$f \in \mathcal{R}$ となる。$\mathcal{L} = \mathcal{R}^{\boxslash}$ がえられた。

1.2 モデル圏：Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith

3. 定義 圏 $\mathcal{A}$ がモデル圏であるとは、三種の射のクラス $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ を備え次の公理をみたすものである。

MC1（極限公理） $\mathcal{A}$ は小完備、小余完備である。
MC2（６っつのうちの２つ公理）$r \circ s, s \circ t$ が定義されるような射 r, s, t にたいし、
$r \circ s, s \circ t \in \mathcal{W}$ ならば $r, s, t, r \circ s \circ t \in \mathcal{W}$ である。
MC3（レトラクト公理）$\mathcal{C}$ と、$\mathcal{F}$ はレトラクトに関して閉じている。
MC4（持ち上げ公理） $\mathcal{C} \subset {}^{\boxed{\nearrow}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ と $\mathcal{F} \subset (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\boxed{\nearrow}}$ がなりたつ。
MP5（分解公理）任意の射 f は次のふたとおりに関手的に分解される。
(1) $f = q \circ i, (\, q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W},\, i \in \mathcal{C}\,)$ (2) $f = p \circ j, (\, p \in \mathcal{F},\, j \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}\,)$

註 (1) 三種の射をそれぞれ、弱同値（weak equivalences)、コファイブレーション、ファイブレーションとよぶ。また、弱同値であるようなコファイブレーションを自明コファイブレーション、弱同値であるようなファイブレーションを自明ファイブレーションとよぶ。(2) ＭＣ１は、押し出しや引き戻しがいつでも存在することを保証している。しばらくは気にしないことにする。(3) ＭＣ４は、「任意のコファイブレーションは、任意の自明ファイブレーションに対し左持ち上げ性質（**LLP**）をみたす」、「任意のファイブレーションは、任意の自明コファイブレーションに対し右持ち上げ性質（**RLP**）をみたす」ことを意味する。

命題 1.3 すべての対象 X にたいし恒等射 1_X は弱同値である。

証明 MC5 により、$1_X = q \circ i = p \circ j$ と分解されかつ q, j は弱同値である。そうすれば、$j \circ 1_X (= j), 1_X \circ q (= q)$ は弱同値になる。ＭＣ２により 1_X は弱同値である。

註 『すべての対象 X にたいし恒等射 1_X は弱同値である』ならば、『ＭＣ２（６っつのうちの２つ公理)』と次の二つの公理（を合わせたもの）は同値である。

弱可逆性公理：r, s, t は $r \circ s, s \circ t$ が定義されかつ弱同値であるような射とする 。このとき、s は弱同値である。

３っつのうちの２つ公理：$r \circ s$ が定義され $r, s, r \circ s$ のうち２つが弱同値ならば、残りも弱同値である。

証明 [ＭＣ２ ⇒ 弱可逆性公理] 自明（普遍なら特殊)。

[ＭＣ２ ⇒ ３っつのうちの２つ公理] (r, s が弱同値の場合) $Sr = Ts = X$ とおけば、$r \circ 1_X, 1_X \circ s$ が弱同値になる。ＭＣ２により $r \circ 1_X \circ s = r \circ s$ は弱同値である。 ($r, r \circ s$ が弱同値の場合) $1_{Tr} \circ r, r \circ s$ が弱同値であるからＭＣ２により s もそうである。 ($r \circ s, r$

が弱同値の場合) $r\circ s, s\circ 1_{Ss}$ が弱同値であるからMC２により r もそうである。

[弱可逆性公理＋３っつのうちの２つ公理 $\Rightarrow$ MC２] $r\circ s, s\circ t$ が定義されかつ弱同値であるような射とする 。まず、弱可逆性公理によって s が弱同値になる。これを用いれば $s, s\circ t$ と $r\circ s, s$ が弱同値になる。３っつのうちの２つ公理をそれぞれに適用すれば t, r が弱同値になる。$r\circ s, t$ が弱同値で、これに３っつのうちの２つ公理を適用すれば最後の $(r\circ s)\circ t$ も弱同値である。

註 (1) 上の命題と上の註により $\mathcal{W}$ は $\mathcal{A}$ の部分圏である。

(2) 『すべての対象 X にたいし恒等射 1_X は弱同値である』と『弱可逆性公理』がなりたつならば、『すべての同型は弱同値である』。なぜなら、r を同型とすれば、逆射 s が存在して $s\circ r = 1_{Sr}, r\circ s = 1_{Ss}$ となる。すなわち、$s\circ r, r\circ s$ が弱同値であるから弱可逆性公理により r は弱同値になる。

準備で述べたように、『すべての対象 X にたいし恒等射 1_X は弱同値である』と次の命題によっても『すべての同型は弱同値である』が導かれる。

命題 1.4 $\mathcal{W}$ はレトラクトで閉じている。すなわち、可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "s'"] & Y \arrow[r, "r'"] & B \end{tikzcd} \quad , \quad r\circ s = 1_A, r'\circ s' = 1_B$$

において、f が弱同値であるならば g もそうである。

証明 MC５により、$g = q'\circ i', f = q\circ i$, $i, i' \in \mathcal{C}$, $q, q' \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ と分解される。さらに分解が関手的であることから $r''\circ s'' = 1_C$ であり、次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i'"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "i'"] \\ C \arrow[r, "s''"] \arrow[d, "q'"] & Z \arrow[r, "r''"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[d, "q'"] \\ B \arrow[r, "s'"] & Y \arrow[r, "r'"] & B \end{tikzcd} \quad , \quad r\circ s = 1_A, r'\circ s' = 1_B$$

f が弱同値であるという条件から、$q, q\circ i (= f)$ が弱同値である。３っつのうち２つ公理により i が弱同値になる。

ここで、MC５をもちいて $i' = p\circ j$ と分解する。ただし、p はファイブレーション j は弱同値なコファイブレーション（自明コファイブレーション）にとる。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i'"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i'"] & D \arrow[dl, "p"] \\
C \arrow[r, "s''"] & Z \arrow[r, "r''"] & C &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, "j"] & D \arrow[dl, "p"] \\
Z \arrow[r, "r''"] \arrow[urr, dotted, "k"] & C &
\end{tikzcd}
$$

ＭＣ４により、ファイブレーション p は自明コファイブレーション i にたいし右持ち上げ性質ＲＬＰを持つ。上の右側の図式の k が存在し $k\circ i = j\circ r, p\circ k = r''$ をみたす。

これから $p\circ(k\circ s'')(=r''\circ s'') = 1_C, (k\circ s'')\circ i'(=k\circ i\circ s = j\circ r\circ s) = j$ となるが、$1_C, j$ は弱同値である。したがって、６っつのうちの２つ公理により i' が弱同値になる。

$g = q'\circ i'$ は３っつのうち２つ公理により弱同値である。

4. 以下の命題をモデル圏の閉包性という。弱同値、コファイブレーション、ファイブレーションの三つのクラスの任意の二つは残りのクラスを決定する、ということを意味している。May らの言葉で言えば、$(\mathcal{C}, \mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ と $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W}, \mathcal{F})$ が弱分解系になっている、ということである。

命題 1.5　 (1) $\mathcal{C} = {}^{\boxslash}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W}),\ \mathcal{F}\cap\mathcal{W} = {}^{\boxslash}\mathcal{C}$、

(2) $\mathcal{C}\cap\mathcal{W} = {}^{\boxslash}\mathcal{F},\ \mathcal{F} = (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\boxslash}$、

(3) $f\in\mathcal{W} \Leftrightarrow f = q\circ i, q\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}, i\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$

証明　$\mathcal{C}\boxslash(\mathcal{F}\cap\mathcal{W}), (\mathcal{C}\cap\mathcal{W})\boxslash\mathcal{F}$ と $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W}$ が（したがって $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}, \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ も）レトラクトで閉じていることが示されている。**命題 1.2** により結論を得る。

次の系は余計かもしれないが書いておく。

系 1.6　 (1) （コ）ファイブレーションの合成は（コ）ファイブレーションである。

(2) （自明）コファイブレーションの押し出しは（余基底変換は）（自明）コファイブレーションである。また、（自明）ファイブレーションの引き戻しは（基底変換は）（自明）ファイブレーションである。

註 (1) において、$\mathcal{W}$ は**命題 1.3** と三つのうち二つ公理によって $\mathcal{W}$ は $\mathcal{A}$ の部分圏であることから、自明（コ）ファイブレーションの合成も自明（コ）ファイブレーションである。

証明 (1) 閉包性により **命題 1.1 (1)** をもちいることができ、$\mathcal{C}, \mathcal{F}$ はいずれも $\mathcal{A}$ の部分圏である。

(2) $\mathcal{C} = {}^{\boxslash}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W}),\ \mathcal{F}\cap\mathcal{W} = {}^{\boxslash}\mathcal{C}$ と**命題 1.1 (3)** により前半の結論を得る。後半も同様。

2 $\mathcal{T}op$ はモデル圏である

- ”コファイブレーション”＝閉コファイブレーション
- ”ファイブレーション”＝ファイブレーション
- ”弱同値”＝ホモトピー同値

とすれば、位相空間の圏 $\mathcal{T}op$ はモデル圏になる。

ＭＣ１ （極限公理） $\mathcal{T}op$ は小完備、小余完備である

これは既知とする。

ＭＣ２ （６っつのうちの２つ公理）r, s, t は、$r \circ s, s \circ t$ が定義されホモトピー同値であるとする。このとき、$r, s, t, r \circ s \circ t$ はホモトピー同値である。

すべての同型射は（恒等射も）ホモトピー同値であるから、**命題 1.3** 註により弱可逆性公理を示せばよい。

u を $r \circ s$ のホモトピー逆写像、v を $s \circ t$ のホモトピー逆写像とする。$u \circ (r \circ s) \simeq 1_{Ss}$, $(s \circ t) \circ v \simeq 1_{Ts}$ がなりたつ。これを、$(u \circ r) \circ s \simeq 1_{Ss} \cdots (*), s \circ (t \circ v) \simeq 1_{Ts} \cdots (**)$ と解釈すれば、 $u \circ r \simeq t \circ v$ となる。群論でおなじみの論法で $u \circ r \simeq (u \circ r) \circ 1_{Ts} \simeq (u \circ r) \circ s \circ (t \circ v) \simeq 1_{Ss} \circ (t \circ v) \simeq t \circ v$ であるから。

$s \circ (u \circ r) \simeq s \circ (t \circ v) \simeq 1_{Ts}$ より $(*), (**)$ は $(u \circ r) \circ s \simeq 1_{Ss}$, $s \circ (u \circ r) \simeq 1_{Ts}$ と書き直される。これは $u \circ r$ が s のホモトピー逆写像であることを示している。s がホモトピー同値であることがわかった。

ＭＣ３ （レトラクト公理）閉コファイブレーションと、ファイブレーションはレトラクトに関して閉じている。

射 g が射 f のレトラクトであるとは、上下の水平射の結合が恒等射である（$r \circ s = 1_A, r' \circ s' = 1_B$）ような次の可換図式が存在することであった。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "s'"] & Y \arrow[r, "r'"] & B
\end{tikzcd}$$

いま f が閉写像であるとする。$F \subset A$ を閉集合とすれば、$g(F) = s'^{-1} f(r^{-1}F) \cdots (*)$ と f が閉写像であることから $g(F) \subset B$ は閉集合である。g は閉写像である。

$(*)$ は、$s'^{-1} f(r^{-1}F) \subset s'^{-1} r'^{-1} r'(f(r^{-1}F)) = r'(f(r^{-1}F)) = g(r(r^{-1}F)) = g(F) = s'^{-1}s'(g(F)) = s'^{-1}f(s(F)) \subset s'^{-1}f(r^{-1}r(s(F))) = s'^{-1}f(r^{-1}F)$ による。

ε_0 は $\varepsilon_0 : \bullet \to \bullet \times I,\ \varepsilon_0(x) = (x, 0)$ であるような写像とする。下右図式の斜め左向きの射はすべてこの型の写像であるとする。上のレトラクションは下の右可換図式を導くが、この図式の端の壁（の可換平方図式）は真ん中の壁（の可換平方図式）のレトラクションである。

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A \arrow[dl] \arrow[dd] \\
A \times I \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \times I \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \times I \arrow[dd] & \\
& B \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y \arrow[rr] \arrow[dl] & & B \arrow[dl] \\
B \times I \arrow[rr] & & Y \times I \arrow[rr] & & B \times I &
\end{tikzcd}
$$

命題 2.1　コファイブレーション $f : X \to Y$ のレトラクション $g : A \to B$ は コファイブレーションである。

証明 $u : B \to Z$ とホモトピー $h : A \times I \to Z$ について $u \circ g = h \circ \varepsilon_0$ がなりたつものとする。$(u \circ r') \circ f = u \circ g \circ r = h \circ \varepsilon_0 \circ r = (h \circ (r \times 1)) \circ \varepsilon_0$ と f がコファイブレーションであることから、ホモトピー $H : Y \times I \to Z$ で $H \circ \varepsilon_0 = u \circ r'$ かつ $H \circ (f \times 1) = h \circ (r \times 1)$ をみたすものが存在する。$K = H \circ (s' \times 1) : B \times I \to Z$ とすれば、$K \circ \varepsilon_0 = H \circ (s' \times 1) \circ \varepsilon_0 = H \circ \varepsilon_0 \circ s' = u \circ r' \circ s' = u$ がえられ、$K \circ (g \times 1) = H \circ (s' \times 1) \circ (g \times 1) = H \circ (f \times 1) \circ (s \times 1) = h \circ (r \times 1) \circ (s \times 1) = h$ がえられる。これは、g がコファイブレーションであることを意味する。

系 2.2　$i : A \to X, j : B \to Y$ にたいし、同相写像 $\alpha : A \to B, \beta : X \to Y$ が存在して $\beta \circ i = j \circ \alpha$ がなりたつとき、i がコファイブレーションであるための必要十分条件は、j がコファイブレーションであることである。

系 2.3　$i : A \to X$ がコファイブレーションであるための必要十分条件は、i が埋め込みでかつ $(X, i(A))$ がコファイバード対であることである。

註 命題 **2.1** において、コファイブレーションは閉コファイブレーションでなくてもよい。
系 **2.3** は、以後の議論において、コファイブレーションをコファイバード対で置き換えて議論してもよいことの理由になっている。

f をファイブレーションとし、g は f のレトラクションとする。左下の可換図式にレトラクションの図式をつないで、右可換図式をつくる。右下の図式に、持ち上げ $L\,(L \circ \varepsilon_0 = s \circ k, f \circ L = s' \circ h)$ が存在する。$H = r \circ L$ が左下図式の持ち上げになり、g はファイブレーションである。

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\varepsilon_0"] & A \arrow[d, "g"] \\
W \times I \arrow[r, "h"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\varepsilon_0"] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "g"] \\
W \times I \arrow[r, "h"] \arrow[urr, dotted, "L"] & B \arrow[r, "s'"] & Y \arrow[r, "r'"] & B
\end{tikzcd}
$$

ＭＣ５（分解公理）任意の連続写像 f は、二様に関手的分解される

(1) $f = q \circ i$、ここで q は自明ファイブレーション、i は閉コファイブレーション。（正確に書けば、関手 $\alpha, \beta : \mathcal{T}op^{\mathbf{1}} \to \mathcal{T}op^{\mathbf{1}}$ により $q = \alpha(f), i = \beta(f), f = q \circ i,$ のように分解される。）

(2) $f = p \circ j$、ここで p はファイブレーション、j は自明閉コファイブレーション。（これも正確には、関手的分解 (γ, δ) により $p = \gamma(f), j = \delta(f), f = p \circ j,$ のように分解される。）

補遺 1 にまとめた。

ＭＣ４（持ち上げ公理）　(1) $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) \boxslash \mathcal{F}$,　(2) $\mathcal{C} \boxslash (\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$

(1) は次の定理による（**系 2.3** と註を参照）。

定理 2.4　$1_X^A : A \subset X$ をホモトピー同値な〈閉〉コファイバード対、$p : E \to B$ はファイブレーションとする。p は 1_X^A に対し右持ち上げ性質をみたす。

証明 命題 2.14 の証明前半により、レトラクション

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_X^A"] \arrow[d, "1_X^A"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\varepsilon_0"] & A \arrow[d, "1_X^A"] \\
X \arrow[r, "{(1_X, u)}"] & X \times I \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}
$$

がえられる。すなわち、1_X^A は ε_0 のレトラクションである。p には定義により、$\varepsilon_0 \boxslash p$、すなわちリフト $L : X \times I \to E$ がある。$L \circ (1_X, u)$ により、$1_X^A \boxslash p$ が導かれる（次の可換図式を眺めよ）。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_X^A"] \arrow[d, "1_X^A"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\varepsilon_0"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X^A"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "{(1_X, u)}"] & X \times I \arrow[r, "h"] \arrow[urr, dotted, "L"] & X \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}
$$

(2) の証明は以下の定理と系による。定理の証明と ”B-上空間” の説明は**補遺 3** を見よ。

定理 2.5　$p : E \to B$ を自明ファイブレーション（ホモトピー同値なファイブレーショ

ン）とする。$p: E \to B$ は（ ”B-上空間” p から $1_B: B \to B$ への ”B-上写像” とかんがえて） ”B-上ホモトピー同値写像” である。

系 2.6　(X, A) を閉コファイバード対、$p: E \to B$ は自明ファイブレーションとする。$(f, g): 1_X^A \to p$ には持ち上げ $\ell: X \to E$ が存在する。

証明 上の可換図式において、$g \circ 1_X^A : A \to B$ を B-上空間と解釈し $f : A \to E$ を B-上写像と解釈する。定理 2.5 の証明で得られたホモトピー $K : E \times I \to E$ に $f \times 1_I: A \times I \to E \times I$ を合成すれば、$k = K \circ (f \times 1_I)$ は B-上ホモトピー $s \circ p \circ f \simeq_B f$ である。$k(-, 0) = s \circ p \circ f$, $k(-, 1) = f$, $p \circ h(-, t) = p \circ f$ を確認すればよい。

二つの連続写像 $X \times 0 \cong X \xrightarrow{s \circ f} E, A \times I \xrightarrow{k} E$ は $A \times 0$ 上で一致し、$X \times 0, A \times I \subset X \times 0 \cup A \times I$ は閉集合であるから貼り合わせて連続写像 $F: X \times 0 \cup A \times I$ をつくる。これをもちいて次の左可換図式が得られる。

$$
\begin{tikzcd}
X \times 0 \cup A \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "g \circ p_1"] \arrow[ur, dotted, "L"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dotted, "\ell"] & B
\end{tikzcd}
$$

$X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ は自明コファイブレーションである（この証明をさぼっていた：補遺 3 定理 2.8 (2) は大袈裟だが暫定的に）から持ち上げ $L: X \times I \to E$ が存在する。$\ell(x) = L(x, 1)$ で $\ell: X \to E$ を定義する。これが求める持ち上げである（上右可換図式)。

以上で、$\mathcal{T}op$ がモデル圏であることが示された。細部は以下の諸補遺などで補えばよい。

2.1　補遺 1 : Moore mapping path spaces

$f: X \to Y$ の写像柱 $Z(f)$ は〈一般的には〉次の左下プッシュアウト図式で定義される。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[d, "f"] & X \times I \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Y \arrow[r, "\overline{\varepsilon_0}"] & Z(f)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[d, "f"] & X \times I \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Y \arrow[r, "1_Y \amalg \emptyset"] & Y \amalg X \times (0, 1]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}: X \times I = (X \times 1) \amalg (X \times (0, 1]) &\to Z(f) = Y \amalg (X \times (0, 1]) \\
(x, t) &\mapsto \begin{cases} f(x) & (t = 1 \text{ のとき}) \\ (x, t) & (t < 1 \text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただ、ある種の関手性が要求されることがおおいので、そのときは以下のように定義し直す。右上の可換図式は、写像 $\overline{f}$ を上のように定義すれば、（位相を忘れた）集合のプッシュアウト図式である。したがって、$\langle(1_Y \amalg \emptyset), \overline{f}\rangle : Y \amalg X \times (0,1] \to Y \amalg X \times (0,1]$ による等化位相を $Y \amalg X \times (0,1]$ に付加した空間を $Z(f)$ と考える。そうすれば、左下可換図式は右下可換図式を自然に導く（これは易しい）。左下可換図式を右下可換図式に対応させることは、 $\mathcal{T}op$ の射圏の射 (α, β) を連続関数の三角形を対象とする圏の射に対応させている、とみなすことができる。集合のレベルで $\overline{f}$ をきちんと定義しているので、関手性を確認することも易しい。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & X_0 \arrow[d, "f_0"] \\
Y \arrow[r, "\beta"] & Y_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \amalg X \times I \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & Y_0 \amalg X_0 \times I \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& Z(f) \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z(f_0) \arrow[dl] \\
Y \times I \arrow[rr] & & Y_0 \times I &
\end{tikzcd}$$

連続写像 $f : X \to Y$ について、次の可換図式を考える。引き続き、写像柱についてはきっちりとした上の定義を用いているものとする。

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_0"] & Y \arrow[d, "\overline{\varepsilon_0}"] \arrow[dr, "="] & \\
X \arrow[r, "\varepsilon_1"] & X \times I \arrow[r, "\overline{f}"] & Z(f) \arrow[r, "R"] & Y
\end{tikzcd}$$

命題 2.7 上の可換図式において、f は $f = R \circ (\overline{f} \circ \varepsilon_1)$ と（関手的に）分解される。$\overline{f} \circ \varepsilon_1 : X \to Z(f)$ は閉コファイブレーションであり、$R : Z(f) \to Y$ はホモトピー同値である。

以下の、証明代わりの解説は簡略すぎた、詳細は hiray [2] **2, 3, 4** を参照のこと。

$\overline{f} \circ \varepsilon_1 : X \to Z(f)$ が閉コファイブレーションであることは、写像柱を二重写像柱で書き直し、「コファイブレーションが余基底変換で保存される」ことを用いれば容易に示される。

X-下ホモトピー同値 $\varepsilon_0 : X \to X \times I$ はプッシュアウトで保存されるので、$\overline{s_0} : Y \to Z(f)$ も Y-下ホモトピー同値であり、R はそのホモトピー逆写像である。

「Moore mapping path spaces（未公表ノート）」で次を示した（もちろん、知っている人にはよく知られたことである）。

連続写像 $f : X \to Y$ にたいし、Moore の the mapping path space $MP(f)$ を $MP(f) = X \square P(Y) = \{(x, \alpha, \ell) \mid f(x) = \alpha(0)\} \subset X \times P(Y)$ で定義した。$P(Y)$ は、Y 上の有限の長さの道のなす（小）位相圏であった。次がなりたつ。

- 連続写像 $i : X \to MP(f), x \mapsto (x, c_{f(x)}, 0)$, $p : MP(f) \to Y, (x, \alpha, \ell) \mapsto S(\alpha, \ell) = \alpha(\ell)$ によって、f は $f = p \circ i$ と分解される。p はファイブレーションである。
- 前項の i, p をそれぞれ $i(f), p(f)$ とかけば、i, p は射圏 $\mathcal{T}op^{\mathbf{1}}$ 間の関手 $i, p : \mathcal{T}op^{\mathbf{1}} \to \mathcal{T}op^{\mathbf{1}}$ とみなすことができる。
- 連続写像 $r : MP(f) \to X, (x, \alpha, \ell) \mapsto x$ により、$1_X = r \circ i$ と分解される。すなわち、r はレトラクションである。
- $i(X)$ は $MP(f)$ の強変位レトラクトで、連続写像 $u : MP(f) \to I, (x, \alpha, \ell) \mapsto \min\{\ell, 1\}$ を用いて $i(X) = u^{-1}(0)$ と表わされる。命題 2.14 により、$i : X \to MP(f)$ はホモトピー同値な閉コファイブレーションである。

註 上の第二項について：射圏の関手というものを、どう記述するのかよくわからない。近頃の圏論の教科書ではそもそも圏や関手の定義が、理解できるようには書かれていない。大きなクラスのあいだの‘‘関数’’を記述する必要があるのかないのか（上の例でいえば、$f \mapsto i(f)$, $f \mapsto p(f)$ を関数論理式で書け？？）。そもそもわれわれはただの一度も、ホモロジー群が関手であることの証明をみたことがないのじゃないだろうか。ついでに愚痴っておけば、Kan たちの本や、May たちの本でも‘‘関手的分解’’の定義が書かれていない。

$\mathcal{T}op$ において次の公理の後半 (2) が示された。

MC５ (分解公理）任意の連続写像 f は次のように関手的に分解される

(1) $f = q \circ j$、ここで q は自明ファイブレーション、j は閉コファイブレーション。（正確に（？）書けば、関手 $q, j : \mathcal{T}op^{\mathbf{1}} \to \mathcal{T}op^{\mathbf{1}}$ により $q = q(f)$, $j = j(f)$, $f = q \circ j$, のように分解される。）

(2) $f = p \circ i$、ここで p はファイブレーション、i は自明閉コファイブレーション。（これも正確（？）には、関手 p, i により $p = p(f)$, $i = i(f)$, $f = p \circ i$ のように分解される。）

上の分解公理の (1) は、命題 2.7 の分解 $f = R \circ (\overline{f} \circ \varepsilon_1)$ の R を $R = p(R) \circ i(R)$ と (2) を用いて分解し、$q(f) = p(R), j(f) = i(R) \circ (\overline{f} \circ \varepsilon_1)$ とすればよい。

2.2 補遺 2

Puppe (Strøm) の補題により（「Puppe の補題」[1] を参照）、(X, A) がコファイバード対であるための必要十分条件は、$(X, A) \times (I, 0)$ がレトラクト（可能）対であることである。

(X, A) はコファイバード対であるとする。$(I, \partial I) \times (I, 0) \cong (I, \emptyset) \times (I, 0)$ により、$(X, A) \times (I, \partial I) \times (I, 0) \cong (X, A) \times (I, \emptyset) \times (I, 0) \cdots (1)$ である。$(X, A) \times (I, \emptyset) =$

$(X \times I, A \times I)$ がコフィバード対であることから (1) の右辺はレトラクト対であり、したがって左辺もそうである。ゆえに、$(X, A) \times (I, \partial I)$ はコファイバード対である。

補題 2.8 (X, A) がコファイバード対であるならば、$(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ もコファイバード対である。

命題 2.9 (X, A) はコファイバード対とする。$1_X^A : A \subset X$ がホモトピー同値であるなら A は X の強変位レトラクトである。

証明

- $g : X \to A$ を 1_X^A のホモトピー逆写像とする。$g \simeq r$ であるようなレトラクション $r : X \to A$ が存在する。g と $h : A \times I \to A, h(\cdot, 0) = g \circ 1_X^A, h(\cdot, 1) = 1_A$ にたいし、拡張 $H : X \times I \to A$ が存在して $H \circ \varepsilon_0 = g, H^{A \times I} = h$ となる。$r = H \circ \varepsilon_1$ とすれば、$H : g \simeq r, r^A = h \circ \varepsilon_1 = 1_A$ で求めるものである。
- $1_X \simeq 1_X^A \circ g \simeq 1_X^A \circ r$ のホモトピー $K : X \times I \to X$, $K \circ \varepsilon_0 = 1_X, K \circ \varepsilon_1 = 1_X^A \circ r$ をとって固定する。$L_* : X \times I \times 0 \cup X \times \partial I \times I \cup A \times I^2 \to X$ を次のように貼り合わせで定義する。

$$\begin{aligned}
&L_*(a, t, s) = K(a, t(1-s)) && ((a, t, s) \in A \times I^2) \cdots (1) \\
&L_*(x, 0, s) = x && ((x, 0, s) \in X \times 0 \times I) \cdots (2) \\
&L_*(x, 1, s) = K(r(x), 1-s) && ((x, 1, s) \in X \times 1 \times I) \cdots (3) \\
&L_*(x, t, 0) = K(x, t) && ((x, t, 0) \in X \times I \times 0) \cdots (4)
\end{aligned}$$

  (2) と (4) の貼り合わせは $L_*(x, 0, 0) = x = K(x, 0)$ でうまく定義されている。(3) と (4) は、$L_*(x, 1, 0) = K(r(x), 1) = r(r(x)) = r(x) = K(x, 1)$ でうまく定義されている。これで、L_* は $X \times \sqcup$ 上で定義されている。(1) と (2) は、$L_*(a, 0, s) = K(a, 0) = a$ でよい。(1) と (3) は、$L_*(a, 1, s) = K(a, 1-s) = K(r(a), 1-s)$ でよい。(1) と (4) は、$L_*(a, t, 0) = K(a, t)$ でうまくいっている。
- $(X, A) \times (I, \partial I)$ はコファイバード対であるから、L_* は L に拡張される。

$$\begin{tikzcd}
X \times I \times 0 \amalg X \times \partial I \times I \amalg A \times I^2 \arrow[r, "L_*"] \arrow[d, "\cap"] & X \\
X \times I^2 \arrow[ur, "L"'] &
\end{tikzcd}$$

  $M = L(\cdot, \cdot, 1) : X \times I \to X$ はもとめるホモトピーである。なぜなら、$M(\cdot, 0) = L(\cdot, 0, 1) = 1_X$, $M(\cdot, 1) = L(\cdot, 1, 1) = K(r(\cdot), 1) = 1_X^A \circ r$ でかつ、任意の $a \in A$ にたいして $M(a, t) = L(a, t, 1) = K(a, 0) = a$ となるからである。

  註 (X, A) が閉コファイバード対なら、貼り合わせについては問題がない（本稿

は、その問題がないケースである)。そうでない場合については「Puppe の補題」[1] に証明を書いている。

Strøm 構造

位相空間対 (X,A) にかんし、連続写像の組 $u:X\to I$, $h:X\times I\to X$ で次をみたすものを Strøm 構造という。

(1) $A\subset u^{-1}(0)$

(2) $h_0=1_X$

(3) $h_t^A=1_X^A$

(4) $\forall t,\forall x\,(\,u(x)<t\Rightarrow h(x,t)\in A\,)$

命題 2.10　Strøm 構造 (h,u) が存在することが、 (X,A) がコファイバード対であるための必要十分条件である。

証明 (X,A) がコファイバード対であるなら、レトラクション $r:X\times I\to X\times 0\cup A\times I$ が存在する。これに包含写像を合成して $1_{X\times I}^{X\times 0\cup A\times I}:X\times 0\cup A\times I\subset X\times I$ 、$(1_X\circ r)=(p_1\circ r,p_2\circ r)$ と成分を取る。$h=p_1\circ r$ 、$u(x)=\max\{\,s-p_2\circ r(x,s)\,|s\in I\,\}$ で h と u を定義する(下の註により u は連続)。$u(x)\geqq 0-p_2\circ r(x,0)=0-p_2(x,0)=0-0=0$ である(絶対値をとって最大値をとる、としている本があるが不要)。

$a\in A$ ならば、$u(a)=\max\{\,s-p_2\circ r(a,s)\,|s\in I\,\}=\max\{\,s-p_2(a,s)\,|s\in I\,\}=0$ であるから (1) が示される。$h\circ\varepsilon_0(x)=p_1\circ r\circ\varepsilon_0(x)=p_1(r(x,0))=p_1(x,0)=x$ より (2) が示される。(3) も $h(a,t)=p_1(r(a,t))=p_1(a,t)=a$ で同様。(4) は次のように示される。$u(x)=\max\{\,s-p_2\circ r(x,s)\,|s\in I\,\}<t$ ならば $t-p_2(r(x,t))\leqq u(x)<t$ で $0<p_2(r(x,t))$ となる。これは、$r(x,t)=(h(x,t),p_2(r(x,t)))\in X\times 0\cup A\times I$ なのだが $r(x,t)=(h(x,t),p_2(r(x,t)))\notin X\times 0$ であることを意味する。$r(x,t)=(h(x,t),p_2(r(x,t)))\in A\times I$ より、$h(x,t)\in A$ となる。

逆に、(1), (2), (3), (4) をみたす h, u が与えられていれば、レトラクションが $r(x,t)=(h(x,t),\max\{t-u(x),0\})$ で定義される($r(x,0)=(h(x,0),\max\{0-u(x),0\})=(x,0)$, $r(a,t)=(h(a,t),\max\{t-u(a),0\})=(a,t)$)。

註 K をコンパクト空間、$f:X\times K\to\mathbb{R}$ を連続写像とする。$w:X\to\mathbb{R}, x\mapsto\max\{f(x,k)\,|\,k\in K\}=\max\,f(x\times K)$ は連続写像である。

証明 $m:C_{cpt}(K,\mathbb{R})\to\mathbb{R}, m(g)=\max g(K)$ と定義すれば、w は $X\xrightarrow{e(f)}C_{cpt}(K,\mathbb{R})\xrightarrow{m}\mathbb{R}$ と分解される($w(x)=\max\{f(x,k)\,|\,k\in K\}=\max\,e(f)(x)(K)=m(e(f)(x))=(m\circ e(f))(x)$)。$f$ が連続であるから $e(f)$ は連続である。したがって、m が連続であれば、w は連続ということになる。これを示す。任意の $g\in C_{cpt}(K,\mathbb{R})$ をとり、任意の正数 ε にたいし $(m(g)-\varepsilon,m(g)+\varepsilon)$ とする。

$m(g) = g(k_0)$ となる $k_0 \in K$ が存在するので、ひとつ固定する。g を含む開集合 $U = W(K, (-\infty, m(g)+\varepsilon)) \cap W(\{k_0\}, (m(g)-\varepsilon, m(g)+\varepsilon))$ をとれば、$m(U) \subset (m(g)-\varepsilon, m(g)+\varepsilon)$ がみたされる。

註 Strøm 構造 (h, u) の条件 (1) は、もっと強い条件 $u^{-1}(0) = \mathbf{C}\ell\, A$ で置き換えられる。

証明 (1) より $\mathbf{C}\ell\, A \subset u^{-1}(0)$ は自明。

$u(x) < 1$ ならば $(x, u(x)) \in \mathbf{C}\ell\,\{(x,t)\,|\,u(x) < t\}$ である。これと (4) より、$h(x, u(x)) \in h(\mathbf{C}\ell\,\{(x,t)\,|\,u(x) < t\}) \subset \mathbf{C}\ell\, h(\{(x,t)\,|\,u(x) < t\}) \subset \mathbf{C}\ell\, A$ となる。$x \in u^{-1}(0)$ なら $x = h(x,0) = h(x,u(x)) \in \mathbf{C}\ell\, A$、すなわち、$u^{-1}(0) \subset \mathbf{C}\ell\, A$ である。

註 (X, A) がコファイバード対であるとき、A が X の強変位レトラクトであるための必要十分条件は Strøm 構造 (k, v) で条件 (5) $\forall x \in X\,(\,v(x) < 1\,)$ をみたすものが存在することである。

証明 (k, v) を条件 (5) をみたす Strøm 構造とする。条件 (4) により、$(\,v(x) < t \Rightarrow k(x,t) \in A\,)$ であるが、$\forall x \in X\,(\,v(x) < 1\,)$ であるから $\forall x \in X\,(\,k(x,1) \in A\,)$ となる。これは、A が X の強変位レトラクトであることを意味している。

(h, u) を Strøm 構造とし、$d\colon X \times I \to X$ を強変位レトラクトを導くホモトピーとする。すなわち、$d \circ \varepsilon_0 = 1_X, (d \circ \varepsilon_1)(X) \subset A,\ d^{A \times I} = p_1$ をみたすものとする。

$v(x) = \min\{u(x), \frac{1}{2}\},\ k(x,t) = (d(h,t),\ \min\{2t, 1\})$ と定義すれば、(k, v) はもとめる Strøm 構造である。

なぜなら、Strøm 構造の (1) は $v(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$ による。(2) は、$k(x, 0) = d(h(x,0), 0) = d(x, 0) = x$ に、(3) は、$k(a,t) = d(h(a,t),\ \min\{2t, 1\}) = d(a, \min\{2t,1\}) = a$ による。(4) をしめすのに、$v(x) = \min\{\frac{1}{2}, u(x)\} < t$ とする。もし、$\frac{1}{2} \leqq u(x)$ であるなら $\frac{1}{2} < t$ ということであるから $k(x,t) = d(h(x,t), 1) \in A$（「$(d \circ \varepsilon_1)(X) \subset A$」をもちいている）となる。またもし、$\frac{1}{2} \geqq u(x)$ であるなら $u(x) < t$ ということであるから $k(x,t) = d(h(x,t), \min\{2t, 1\}) \in A$ となる（Strøm 構造の (4) 「$u(x) < t \Rightarrow h(x,t) \in A$」と「$d^{A \times I} = p_1$」をもちいる）。さいごに (5) は、$v(x) = \min\{u(x), \frac{1}{2}\} \leqq \frac{1}{2} < 1$ でほとんど自明である。

定理 2.11 $(X, A), (Y, B)$ は閉コファイバード対とする。

(1) $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ は閉コファイバード対である。

(2) 一方の対がホモトピー同値なコファイバード対なら $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ もホモトピー同値になる。

証明 (1) $(u, h), (v, k)$ をそれぞれ $(X, A), (Y, B)$ の Strøm 構造とする。$w : X \times Y \to I$ を $w(x, y) = \min\{u(x), v(y)\}$ で定義し、$\ell : X \times Y \times I \to X \times Y$ を $\ell(x, y, t) = (h(x, \min\{v(y), t\}), k(y, \min\{u(x), t\}))$ で定義すれば、(w, ℓ) は $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ の Strøm 構造である。

- $w^{-1}(0) = \{(x,y)|\, v(y) = 0 \,\mathrm{or}\; u(x) = 0\} = \{(x,y)|\, v(y) = 0\} \cup \{(x,y)|\, u(x) = 0\} = X \times B \cup A \times Y$
- $\ell(x,y,0) = (h(x,0), k(y,0)) = (x,y)$
- $\ell(a,y,t) = (h(a, \min\{v(y),t\}), k(y,0)) = (a,y)$
- $\ell(x,b,t) = (h(x,0), k(b, \min\{u(x),t\})) = (x,b)$
- 註 $A \subset X$ は閉であるから「$[u(x) < t \Rightarrow h(u,t) \in A] \Leftrightarrow [u(x) \leqq t \Rightarrow h(x,t)]$」がなりたつ（$\Leftarrow$ は自明）。$h(x,-) : I \to X$ とかんがえるとき左辺は $\forall x(\, h(x,(u(x),1]) \subset A\,)$ を意味する。$h(x, \mathrm{C}\ell\,(u(x),1]) \subset \mathrm{C}\ell\, A = A$ となるが $\mathrm{C}\ell\,(u(x),1] = [u(x),1]$ であるから $h(x,[u(x),1]) \subset A$ である。これは左辺から右辺が導かれることを示している。
- $w(x,y) < t \Rightarrow \ell(x,y,t) \in X \times B \cup A \times Y$ を二つに分けて示す。
- $[u(x) \leqq v(x)$ のとき$]$ $w(x,y) = \min\{u(x),v(y)\} < t \Leftrightarrow u(x) < t \Rightarrow u(x) \leqq \min\{v(y),t\} \Rightarrow h(x, \min\{v(y),t\}) \in A$ である（最後の変形で前項註を参照）。したがって、$\ell(x,y,t) \in A \times Y$ である。
- $[u(x) > v(y)$ のとき$]$ $w(x,y) \Leftrightarrow v(y) < t \Rightarrow v(y) < \min\{u(x),t\} \Rightarrow k(y, \min\{u(x),t\}) \in B$ である。したがって、$\ell(x,y,t) \in X \times B$ である。

(2) $u(x) < 1$ または $v(y) < 1$ ならば $w(x,y) = \min\{u(x),v(y)\} < 1$ である。セミナー稿２、１９ページ註により結論を得る。(文章が不明）

つぎは、証明は省く（James を見よ）。

命題 2.12 $(X,A),(X,B),(X,A\cap B)$ が閉コファイバード対であるならば、$(X,A\cup B)$ も閉コファイバード対である。

補題 2.13 $u : X \to I$ が連続写像で、 $A = u^{-1}(0)$ とする。$H : X \times I \to Z,\; H_0 = f,\, H_1 = g,\, H_t^A = f^A = g^A$ (すなわち $H : f \simeq g\; rel\; A$) ならば 、$h : X \times I \to Z,\, h_0 = f,\, h_1 = g,\, h_t^A = f^A = g^A$ でかつ $\forall x, \forall t\,(\, u(x) \leqq t \Rightarrow h(x,t) = h(x,u(x)) = h(x,1)\,)$ をみたすホモトピー h が存在する。

証明

- $h : X \times I \to X$ を
$$h(x,t) = \begin{cases} H(x,1) & (u(x) \leqq t \text{ のとき}) \\ H(x, \frac{t}{u(x)}) & (t < u(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$
によって定義する。この定義では張り合わせの片方の部分空間が閉でないから、連続性は自明ではない。閉部分空間 $C = \{(x,t)\,|\, t \leqq u(x)\}$ 上で h が連続であることを証明すればよい (tom Dieck, T., Algebraic Topology (p. 114) に従って証明を修正)。証明は後置する。
- $h(x,1) = H(x,1) = g(x)$ は易しい。$a \in A$ ならば $u(a) = 0$ より、$h(a,t) =$

$H(a,1) = g(a)(= f(a))$ である。

$$h(x,0) = \begin{cases} H(x,1) & (u(x) = 0 \text{ のとき}) \\ H(x,0) & (0 < u(x) \text{ のとき}) \end{cases} = \begin{cases} H_1^A(x) & \\ f(x) & \end{cases} = f(x)$$

また、$u(x) \leqq t$ ならば $h(x,t) = H(x,1)$ より、$h(x,t) = h(x,u(x)) = h(x,1)$ である。

- $q : X \times I \to C, (x,s) \mapsto (x, s \cdot u(x))$ は全射で、

$$h^C(x,t) = \begin{cases} H(x,1) & (u(x) = t \text{ のとき}) \\ H(x, \frac{t}{u(x)}) & (t < u(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$

  により、$h^C \circ q = H$ が確認される。したがって、 q が等化写像であれば h^C は連続であることになる。

- まず、q が全射であることの確認。 任意に $(x,t) \in C$ をとる。$u(x) = 0$ ならば $t \leqq u(x) = 0 \Rightarrow t = 0$ により $(x,t) = (x, s \cdot u(x))$ となり、$0 < u(x)$ ならば、$\exists s = t/\ u(x)$ により $(x,t) = (x, s \cdot u(x))$ となる。ゆえに、q は全射である。つぎに、$m : I \times I \to I, m(a,b) = ab$ はコンパクト写像である（James などを参照のこと）から、$1_X \times m : X \times I \times I \to X \times I$ は閉写像である。また、I がハウスドルフであるから $X \times I \to I, (x,s) \mapsto u(x)$ のグラフ $\{(x,s,u(x)) \,|\, (x,s) \in X \times I\}$ は閉で、埋め込み $s : X \times I \to X \times I \times I$, $s(x,s) = (x,s,u(x))$ は閉埋め込みである。これらの合成 $(1_X \times m) \circ s$ は閉写像で $q = ((1_X \times m) \circ s)_C$ は閉全射となる。ゆえに、等化写像である。h^C は連続であり、したがって h も連続である。

次の命題の中身は、Schön, R., The Brownian classification of fiber spaces, Arch. Math., 39 (359-365) に書いてある。Puppe 等の本の定理の組み合わせによる説明がある。ドイツ語であること、弱コファイブレーションを用いた一般化された命題を翻訳するわずらわしさなどがあり、以下の簡略な証明を用いる方がいいと思う。ただ、この証明の出所は不明である（苦し紛れに自分でひねり出したのであればいいのだが、記憶にない)。

命題 2.14　位相空間対 (X,A) が閉コファイバード対でかつ $1_X^A : A \subset X$ がホモトピー同値であるための必要十分条件は、A が X の強変位レトラクトでかつ $u^{-1}(0) = A$ をみたす連続写像 $u : X \to I$ が存在することである。

証明 ホモトピー $H : X \times I \to X$, $H_0 = 1_X$, $H_1(X) \subset A$, $H_t^A = 1_X^A$ と $u^{-1}(0) = A$ をみたす連続写像 $u : X \to I$ が存在するならば、左下可換図式がえられる。ただこれでは、下の水平な写像の合成が恒等写像にならない。そこで、**補題 2.13** をもちいて、H を h で取り替えれば下右のレトラクションをえる。$\varepsilon_0 : X \to X \times I$ は閉コファイブレーションであるから $1_X^A : A \subset X$ も閉コファイブレーションになる（ **命題 2.1** とその前のパラグラフ)。1_X^A がホモトピー同値は言わずもがな。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_X^A} X \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow{\scriptstyle 1_X^A} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} & \downarrow{\scriptstyle 1_X^A} \\ X & \xrightarrow{(1_X,u)} X\times I \xrightarrow{H} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_X^A} X \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow{\scriptstyle 1_X^A} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} & \downarrow{\scriptstyle 1_X^A} \\ X & \xrightarrow{(1_X,u)} X\times I \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

（註 (h,u) が Strøm 構造であることを示してもよい。）

(X,A) が閉コファイバード対でかつ $1_X^A : A \subset X$ がホモトピー同値であるものとする。**命題 2.9** により、A が X の強変位レトラクトであり、 Strøm 構造により $u^{-1}(0) = \mathbf{C}\ell\, A = A$ をみたす連続写像 $u : X \to I$ が存在する。

2.3　補遺 3

”B-上ホモトピー”という概念を導入していなかったので少し解説を入れる。Strøm [4], [5] 等に拠っている。

連続写像 $p : X \to B$ を対象とし、対象 $p : X \to B$ から対象 $q : Y \to B$ への射を連続写像 $f : X \to Y$ で $q \circ f = p$ をみたすもので定義する。二つの射 $f, g : X \to Y$ が ”B-上ホモトピック” とは、$H_0 = f, H_1 = g$ に加えて $\forall t\,(\,q \circ H_t = p\,)$ をみたすホモトピー $H : X \times I \to Y$ が存在することとし、$f \simeq_B g$ のように表記する。付け加えられた条件は、$q \circ H = p \circ p_1$ と同値である。ただし、$p_1 : X \times I \to X, (x,t) \mapsto x$ は第一射影である。このような対象を ”B-上空間” といい、射を ”B-上写像” という。ふたつの ”B-上空間” $p : X \to B, q : Y \to B$ が ”B-上ホモトピー同値” とは、 ”B-上写像” $f : X \to Y, g : Y \to X$ が存在して $g \circ f \simeq_B 1_X, f \circ g \simeq_B 1_Y$ が成り立つことと定義するのは自然である。このとき、f を p から q への ”$B-$ 上ホモトピー同値写像” という。

定理 2.15　$p : E \to B$ を自明ファイブレーション（ホモトピー同値なファイブレーション）とする。$p : E \to B$ は（ ”B-上空間” p から $1_B : B \to B$ への ”B-上写像” とかんがえて） ”B-上ホモトピー同値写像” である。

註 証明の前の蛇足：証明の前段は、「コファイブレーションのホモトピー逆写像をレトラクションで取り換えてよい」、の双対で難しいところはない。後半は一見難しそうに見える。$\mathcal{T}op$ にデカルト的閉の構造があると仮定すれば、$p_* : Map(E,E) \to Map(E,B)$ がファイブレーションになり、これらの空間の〈道〉のホモトピーの処理の問題に還元される。同じアイディアを〈道〉のホモトピーでない場合にむりやり適用しているので、直観が効かずわかりにくくなっている。デカルト的閉を仮定して証明を〈概念の絵を書きながら〉再構成することを勧める（補遺 4 を参照)。

証明　[p はホモトピー同値であるから、ホモトピー逆写像 $f : B \to E$ が存在する。これを ”B-上写像” $s : B \to E$ で取り替える]

註 ”B-上写像” $s : B \to E$ とは p の右逆写像である。次の可換図式を見よ。

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "1_B"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[dl, "1_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$k : B \times I \to B$ を $p \circ f \simeq 1_B$ のホモトピーとする。すなわち、$k_0 = p \circ f$, $k_1 = 1_B$ をみたすが、これは次の可換図式をなしている。p がファイブレーションであることから持ち上げ $K : B \times I \to E$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \times I \arrow[r, "k"] \arrow[ur, dotted, "K"] & B \end{tikzcd}$$

$s = K_1$ と定義する。$K_0 = f$ であるから K は $f \simeq s$ なるホモトピーである。また、$p \circ K = k$ より $p \circ s = p \circ K_1 = k_1 = 1_B$ である。求めるものが得られた。

[$s \circ p(\simeq f \circ p) \simeq 1_E$ を $s \circ p \simeq_B 1_E$ に修正する]

$d : E \times I \to E$, $d_0 = s \circ p$, $d_1 = 1_E$ とする。まず、ホモトピー d を次のホモトピー h で取り替える。

$$h(x,t) = \begin{cases} d(x, 2t-1) & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \\ s \circ p \circ d(x, 1-2t) & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$h : E \times I \to E$, $h_0 = s \circ p$, $h_1 = 1_E$ であるがさらに、任意の (x,t) にたいし $p \circ h(x,t) = p \circ h(x, 1-t)$ が成り立つ。これをもちいて、二つのホモトピー $p \circ h$, $p \circ p_1 : E \times I \to B$ のホモトピー $\bar{H} : E \times I^2 \to B$ を次のように定義する。

$$\bar{H}(x,t,s) = \begin{cases} p \circ h(x,t) & (\frac{1+s}{2} \leqq t \leqq 1) \\ p \circ h(x, \frac{1-s}{2}) & (\frac{1-s}{2} \leqq t \leqq \frac{1+s}{2}) \\ p \circ h(x,t) & (0 \leqq t \leqq \frac{1-s}{2}) \end{cases}$$

($p \circ h(x, \frac{1-s}{2}) = p \circ h(x, \frac{1+s}{2})$ に注意)

$\bar{H}(x,t,0) = p \circ h(x,t)$, $\bar{H}(x,t,1) = p(x)$ により $\bar{H}$ はたしかに $p \circ h \simeq p \circ p_1$ なるホモトピーである。$\bar{H}(x,0,s) = \bar{H}(x,1,s) = p(x)$ も確めておく。

$J = I \times 0 \cup \partial I \times I$ として、$L : E \times J \to E$ を $L(x,t,0) = h(x,t)$, $L(x,0,s) = (s \circ p)(x)$, $L(x,1,s) = x$ で定義する。次の可換図式が得られる（確かめよ）。

$$\begin{tikzcd}
E\times J \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\cap"] & E \arrow[d, "p"] \\
E\times I \arrow[r, "\bar{H}"] \arrow[ur, dotted, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

ここで、$J\subset I^2$ は閉コファイブレーションであるから $E\times J\subset E\times I^2$ は閉コファイブレーションであり、$J\subset I^2$ は同時にホモトピー同値であるから $E\times J\subset E\times I^2$ もそうである。すなわち、$E\times J\subset E\times I^2$ は自明コファイブレーションである。**定理 2.1** により持ち上げ $H:E\times I^2\to E$ が存在する。$K:E\times I\to E$ を $K(x,t)=H(x,t,1)$ で定義すれば、$K(x,0)=H(x,0,1)=L(x,0,1)=(s\circ p)(x)$, $K(x,1)=H(x,1,1)=L(x,1,1)=x$ であることからホモトピー $s\circ p\simeq 1_E$ であり、$p\circ K=\bar{H}(-,-,1)=p\circ p_1$ より B-上ホモトピーである。すなわち、$s\circ p\simeq_B 1_E$ である。

2.4　補遺 4

$\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}$ は、$\mathcal{Z}_{\mathcal{C}^d}$ または $\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ を念頭においている。これらは、デカルト的閉圏である。

指数法則

$$\phi:\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X\times_{\mathcal{C}}Y,Z)\cong\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X,Map(Y,Z))$$

により以下の命題がなりたつ。

$\alpha:X\to X_0,\beta:Z\to Z_0$ は固定された射とし、f,f_0 にかんし、次の二つの図式を考察する。

$$\begin{tikzcd}
X\times_{\mathcal{C}}Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha\times 1_Y"] & Z \arrow[d, "\beta"] \\
X_0\times_{\mathcal{C}}Y \arrow[r, "f_0"] & Z_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi(f)"] \arrow[d, "\alpha"] & Map(Y,Z) \arrow[d, "\beta_*"] \\
X_0 \arrow[r, "\phi(f_0)"] & Map(Y,Z_0)
\end{tikzcd}$$

命題 2.16　(1) これらの図式は、互いに、一方が可換なら他方も可換である。

(2) これらの図式が可換であるとき、左図式のリフト $\ell:X_0\times_{\mathcal{C}}Y\to Z$, $(\ell\circ(\alpha\times 1_Y)=f$ かつ $\beta\circ\ell=f_0)$ は右図式のリフト $\phi(\ell)$ を導き、逆に $\ell'(=\phi(\ell))$ が右図式のリフトであるならば ℓ は左図式のリフトになる。

証明

(1) 次の可換図式を追跡すればよい（左図式が可換とは、$\beta_*(f)=(\alpha\times 1_Y)^*(f_0)$ の

こと)。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X \times_{\mathcal{C}} Y, Z) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X, Map(Y, Z)) \\
\downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\beta_*)_*} \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X \times_{\mathcal{C}} Y, Z_0) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X, Map(Y, Z_0)) \\
\uparrow{\scriptstyle (\alpha \times 1_Y)^*} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^*} \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X_0 \times_{\mathcal{C}} Y, Z_0) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X_0, Map(Y, Z_0))
\end{array}$$

(2) 次の可換図式により結論が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X \times_{\mathcal{C}} Y, Z) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X, Map(Y, Z)) \\
\uparrow{\scriptstyle (\alpha \times 1)^*} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^*} \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X_0 \times_{\mathcal{C}} Y, Z) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X_0, Map(Y, Z)) \\
\downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\beta_*)_*} \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X_0 \times_{\mathcal{C}} Y, Z_0) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(X_0, Map(Y, Z_0))
\end{array}$$

系 2.17　$p : E \to B$ が($\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}$ における)ファイブレーションであることと、任意の $Y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}$ について $p_* : Map(Y, Z) \to Map(Y, B)$ がファイブレーションであることは同値である。

参考文献

[1] hiray, Puppe の補題, www.eonet.ne.jp/˜hymath/

[2] hiray, プッシュアウトについて(実践編), www.eonet.ne.jp/˜hymath/

[3] hiray, コンヴィニエントな位相空間の圏について, www.eonet.ne.jp/˜hymath/

[4] Strøm, A., Note on cofibrations II, Math. Scand. 22 (1968), 130-142

[5] Strøm, A., The homotopy category is a homotopy category, Math. Scand. 23(1972), 435-441