

幾何学的実現について

hiray

単体的空間（集合）、前単体的空間（集合）、単体複体によるホモトピー余極限等々の幾何学的実現には、分節化された構造が入っている。いちいち個別的にやるのは経済的ではないから、大まかなところを一度に片づけておきたい。

0.1 準備

「充満」「相対全単射」「(準)相対同相」の定義を整理しておく（詳細は、「プッシュアウトについて」を参照のこと）。

- $f : X \rightarrow Y$ を集合の写像、 A は X の部分集合とする。 A が f にかんし充満であるとは、 $f(A) \cap f(X - A) = \emptyset$ がなりたつことである。すなわち、 $f(X) = f(A) \amalg f(X - A)$ のように f の像が分割されていることを意味している。
- 「 A が f に関して充満 $\Leftrightarrow A = f^{-1}f(A) \Leftrightarrow \exists B \subset Y (A = f^{-1}B)$ 」である。
- 集合対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対全単射であるとは、 $f_{Y-B}^{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$ が定義され全単射となることとする。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{c} & X \\ \downarrow f_B^A & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{c} & Y \end{array}$$

は a push out である。これを、「push out の相対全単射モデル」という。

- 集合対 (X, A) と写像 $g : A \rightarrow B$ が与えられているとき、 $Y = B \amalg (X - A)$ として $f : X \rightarrow Y$ を $f^A = 1_Y^B \circ g, f^{X-A} = 1_Y^{X-A}$ で定義すれば push out の相対全単射モデルを作ることができる。
- $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対全単射なら、 $A, X - A$ は f に関して充満である。 f^{X-A} が単射であるから、任意の $C \subset X - A$ も f に関して充満である。
- 位相空間対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相であるとは、相対全単射で、 $\langle 1_Y^B, f \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ が等化写像であることとする。したがって、上記可換図式は位相空間の圏の a push out である。これを、push out の準相対同相モデルということにする。
- 「 (X, A) は位相空間対、 $g : A \rightarrow B$ は連続写像とする。このとき、 (Y, B) が位相空間

対となるような Y と $g = f_B^A$ をみたす連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在して、 f は準相対同相となる。」すなわち、 (X, A) が位相空間対、 $g : A \rightarrow B$ が連続写像ならば、push out の準相対同相モデルが存在する。証明は、「 $h : W \rightarrow Y$ が等化写像で $B \subset Y$ であるとき、 $(W, h^{-1}B) \rightarrow (Y, B)$ が相対全単射ならば $h_B^{h^{-1}B} : h^{-1}B \rightarrow B$ は等化写像である」による (A あるいは B が閉部分空間であることを仮定する必要はない)。

- $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が準相対同相であるならば、 $X/A \rightarrow Y/B$ は同相である。結論をみたす相対全単射は、弱い意味の相対同相とよばれる。
- $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対同相であるとは、準相対同相で A が X の (同じことだが B が Y の) 閉部分集合であることとする。
- $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が強い意味の相対同相とは、 f が等化写像であるような相対全単射で、 A が X の (同じことだが B が Y の) 閉部分集合であることとする。これは McCord の定義である。

註 準相対同相は概念として完結しているので相対同相とよぶべきであると思う。余計な条件を付けたものを相対同相としたのは、妥協である。

0.2 幾何学的実現

- $W = \coprod_{0 \leq n} W_n$ を階数付きの位相空間とする。 $\deg x = n$ は $x \in W_n$ を意味する。
- T は W 上の関係、 R は T によって生成された同値関係とする。 $W_{(n)} = \coprod_{0 \leq k \leq n} W_k$ とおく。 $T_{(n)} = T \cap (W_{(n)} \times W_{(n)})$ とし、 $R_{(n)}$ は $T_{(n)}$ で生成された $W_{(n)}$ 上の同値関係とする。
- W の集合としての射影 $p : W \rightarrow W$ ($p^2 = p$) で次の性質をみたすものを考える。

$$(A) \forall x (x R_{(\deg x)} p(x) \wedge (p(x) \neq x \Rightarrow \deg p(x) < \deg x))$$

$$(B) \forall x, y (x T y \Rightarrow p(x) = p(y))$$

- (A) は次の (A') と同値である。

$$(A') \forall x (x R_{(\deg x)} p(x) \wedge (p(x) \neq x \Leftrightarrow \deg p(x) < \deg x))$$

なぜなら、 $p(x) \neq x$ の否定 $p(x) = x$ から $\deg p(x) = \deg x$ が帰結されるが、 $\forall x (x R_{(\deg x)} p(x))$ により $\forall x (\deg x \leq \deg p(x))$ であるからこの帰結の否定は $\deg p(x) < \deg x$ である。対偶をとれば、 $\forall x (p(x) \neq x \Leftrightarrow \deg p(x) < \deg x)$ である。また、(A) の仮定の下で (B) は 次の (B') に同値である。

$$(B') \forall x, y (xRy \Leftrightarrow p(x) = p(y))$$

$p(x) = p(y)$ と仮定すれば、 $xRp(x), p(y)Ry$ であるから推移性により xRy となるから。

- 部分空間 $N = \coprod_n N_n \subset W$ を $N = \text{Imp} = \{x \mid p(x) = x\}$ でさだめ、その要素を非退化元といい、 $x \in W$ にたいし $p(x)$ を x の非退化表現という。

以下、「条件 (A) (B) をみたす p が存在する」ことを仮定する。

命題 0.1 $N \subset W \rightarrow W/R$ は全単射である。

- W/R には $\pi : W \rightarrow W/R$ で等化位相をいれておく。 $\pi(W_{(n)}) = F_n$, $\pi_{(n)} = \pi|_{F_n}^{W_{(n)}}$ とし、 $\pi_{(n)} : W_{(n)} \rightarrow F_n$ で等化位相を入れる。終位相の推移性により、 W/R の位相は自然な連続単射の列 $F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_{n-1} \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow W/R$ による終位相である。ついでに書いておけば、 $R_{\pi_{(n)}} = R_{(n)}$ もなりたつ。
 - $F_{n-1} \rightarrow F_n$ の像に、 F_n の部分空間の位相を入れたものを F'_{n-1} と表記する。仮定 (A) の後半により、 N_n は $\pi_{(n)}$ に関し充満である。したがって、 $\pi_{(n)} : (W_{(n)}, W_{(n-1)} \amalg (W_n - N_n)) \rightarrow (F_n, F'_{n-1})$ は相対全単射であり、 $W_{(n)} \subset W_{(n)} \amalg F'_{n-1} \rightarrow F_n$ が等化写像であることから $W_{(n)} \amalg F'_{n-1} \rightarrow F_n$ も等化写像であり、 $\pi_{(n)} : (W_{(n)}, W_{(n-1)} \amalg (W_n - N_n)) \rightarrow (F_n, F'_{n-1})$ は準相対同相である。これもついでに書けば、 $W_{(n-1)} \amalg (W_n - N_n) \rightarrow F'_{n-1}$ も等化写像である。
 - 以下、「条件 (C) : $N \subset W$ は開集合である」を仮定する。 $F'_{n-1} \subset F_n$ は閉部分空間であり、 $W_{(n)}$ が閉部分空間 $W_{(n-1)} \amalg (W_n - N_n)$, W_n の貼り合わせであることから、相対同相の結合 $\pi_n : (W_n, W_n - N_n) \rightarrow (F_n, F'_{n-1})$ も相対同相になる。
 - $\pi_n^{W_n - N_n} = 1_{F'_{n-1}}^{F_{n-1}} \circ h : W_n - N_n \rightarrow F'_{n-1}$ であるような連続写像 h が存在すれば、前々項の「 $W_{(n-1)} \amalg (W_n - N_n) \rightarrow F'_{n-1}$ も等化写像」より $1_{F'_{n-1}}^{F_{n-1}} : F_{n-1} \rightarrow F'_{n-1}$ が等化連続全単射で同相となる。したがって、 $\pi_n : (W_n, W_n - N_n) \rightarrow (F_n, F_{n-1})$ は相対同相であり $F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_{n-1} \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow W/R$ は W/R の閉部分空間の列である。
 - 有限個の閉部分空間 $C_1, C_2, \dots, C_m \subset W_n$ で $W_n - N_n = \bigcup_{k=1}^m C_k$ をみたすものと、 $\pi_n^{C_j} = 1_{F_n}^{F_{n-1}} \circ \pi_{n-1} \circ k_j$ をみたす連続写像 $k_j : C_j \rightarrow W_{n-1}$, $j = 1, 2, \dots, m$ が存在すれば、前項の連続写像 h は $\pi_{n-1} \circ k_j$ の貼り合わせとして構成される。
- 以上により、幾何学的実現には十分に分節化された構造が入った。

0.3 単体的空間の場合

- mono 射全体を射とする Δ の部分圏を $\mathbf{M}$ と表記し、epi 射全体を射とする Δ の部分圏を $\mathbf{E}$ と表記する。今の場合 mono 射は単射、epi 射は全射である。
- 単体的空間 X の非退化元のなす次数つき空間を NX 、退化元のなすそれを sX と表記する。集合として $X_n = NX_n \amalg sX_n$ である。
- 補題 0.2 $\sigma, \tau \in \mathbf{E}([m], [k])$ について、 $\forall \mu (\sigma\mu = 1_{[k]} \Leftrightarrow \tau\mu = 1_{[k]}) \Leftrightarrow \sigma = \tau$ がなりたつ。

- 命題 0.3 (1) 任意の $t \in \Delta^n$ にたいし、ただ一つの $\mu \in \mathbf{M}([k], [n])$ とただ一つの $s \in \Delta^k$ が存在して、 $\mu s = t$ がなりたつ。

(2) X は単体的集合とする。任意の $x \in X_m$ にたいし、ただ一つの $\sigma \in \mathbf{E}([m], [k])$ とただ一つの $y \in NX_k$ が存在して、 $x = y\sigma$ がなりたつ。

- 上記命題の (μ, s) を t の非退化表現といい、 (y, σ) を x の非退化表現ということにする。さらに、 $(x, t) \in X_n \times \Delta^n$ にたいし t の非退化表現を (μ, s) とし、 $x\mu$ の非退化表現を (y, σ) とする。 $(y, \sigma s)$ を (x, t) の非退化表現という。

$W = \amalg_{0 \leq n} X_n \times \Delta^n$ で、 $N = \amalg_{0 \leq n} NX_n \times (\Delta^n)^\circ$ が非退化元の全体である。

関係 $\{(\mu, s, t) \mid t = \mu s\} \subset (\amalg_{0 \leq k \leq n} \mathbf{M}([k], [n]) \times \Delta^{k^\circ}) \times \Delta^n$ がグラフであるような (集合間の) 写像 $\Delta^n \rightarrow \amalg_{0 \leq k \leq n} \mathbf{M}([k], [n]) \times \Delta^{k^\circ}$ が定義され、関係 $\{(y, \sigma, x) \mid x = y\sigma\} \subset (\amalg_{0 \leq \ell \leq n} X_\ell \times \mathbf{E}([n], [\ell])) \times X_n$ がグラフであるような写像 $X_n \rightarrow \amalg_{0 \leq \ell \leq n} X_\ell \times \mathbf{E}([n], [\ell])$ が定義される。このように前命題を読むことができる。射影 $p : W \rightarrow W$, $(x, t) \mapsto (x, \mu, s) \mapsto (x\mu, s) \mapsto (y(x\mu), \sigma(x\mu), s) \mapsto (y, \sigma s)$ が得られた。

性質 (A) は自明であり、(B) は次の命題による。

- 命題 0.4 $\alpha \in \Delta([m], [n])$ とする。 $(x\alpha, t) \in X_m \times \Delta^m$, $(x, \alpha t) \in X_n \times \Delta^n$ の非退化表現は一致する。

次の命題のように結果 (分節化された構造) が整理される。

- 命題 0.5 X は、すべての $\sigma \in \mathbf{E}([m], [n])$ にたいし $\sigma^* : X_n \rightarrow X_m$ が閉写像であるような、単体的空間とする (西田吾郎さんの仮定)。

(1) $F_{n-1}|X|$ は $F_n|X|$ の閉部分空間である。したがって、 $F_n|X|$ は $|X|$ の閉部分空間である。

(2) $(X_n \times \Delta^n, sX_n \times \Delta^n \cup X_n \times \partial\Delta^n) \rightarrow (F_n|X|, F_{n-1}|X|)$ は強い意味の相対同相である。

- とくに単体的空間 (集合) の場合は、 $\pi_n = \pi_{(n)}^{W_n} : W_n \rightarrow F_n$ について、 $\pi_n \circ (\sigma_0^* \times \delta_{0*}) = 1_{F_n}^{F_{n-1}} \circ \pi_{n-1}$ がなりたつ。これから、まず $\pi_n : W_n \rightarrow F_n$ は全射であることがわかる。

つぎに、 F_n の位相 $\mathcal{O}$ にかんして、 π_n が連続であることと $\pi_{(n)}$ が連続であることが同値になることもわかる。したがって、 $\pi_n, \pi_{(n)}$ のそれぞれにかんする等化位相は同一にならざるを得ない。「強い意味の相対同相」である所以。

前単体的空間（集合）の場合も同様。

0.4 ホモトピー余極限

$K = (V, S)$ を単体的複体、 $X : K^{op} \rightarrow \mathcal{Top}$ を反変関手とする。

補題 0.6 任意の $\tau^s \in \Delta(s)$ にたいし $\tau^s = (s \supset \text{supp } \tau) \tau^{\text{supp } \tau}$ をみたす $(s \supset \text{supp } \tau)$ と $\tau^{\text{supp } \tau} \in \Delta(\text{supp } \tau)^\circ$ がそれぞれ唯一とつずつ存在する。

証明 自明のようだが、証明が必要であろう。 $\text{supp } \tau = \{v \mid \tau(v) \neq 0\}$ とすれば、 $s \supset \text{supp } \tau$ で $\tau^s = (s \supset \text{supp } \tau) \tau^{\text{supp } \tau}$ がなりたつ。

$(s \supset t), \sigma \in \Delta(t)^\circ$ で $\tau^s = (s \supset t) \sigma$ がなりたつとする。

任意の $v \in t$ について $\sigma(v) > 0$ であるから $\tau^s(v) = (s \supset t) \sigma(v) > 0$ となり、 $t \subset \text{supp } \tau$ である。またもし、 $t \subsetneq \text{supp } \tau$ であれば $1 = \sum_{v \in \text{supp } \tau} \tau^s(v) > \sum_{v \in t} \tau^s(v) = \sum_{v \in t} \sigma(v) = 1$ で矛盾となる。よって、 $t = \text{supp } \tau$ となる。あとは自明。

$W = \coprod_{s \in S} X(s) \times \Delta(s)$ とし、関係 $(x, (s \supset t) \tau) T (x(s \supset t), \tau)$ で生成された同値関係を R とする。 $p : W \rightarrow W, (x, \tau^s) \mapsto (x(s \supset \text{supp } \tau), \tau^{\text{supp } \tau})$ と定義する。 $\deg(x, \tau^s) = \dim s$ としておく。

$p^2 = p$ 、性質 (A) は自明で、性質 (B) も前補題によりほとんど自明である ($p((x, (s \supset t) \tau)) = p(x, \tau^s) = (x(s \supset \text{supp } \tau), \tau^{\text{supp } \tau}) = (x(s \supset t)(t \supset \text{supp } \tau), \tau^{\text{supp } \tau}) = p((x(s \supset t), \tau))$)。

あとは省略とするが、相対同相 $(\coprod_{\dim s=n} X(s) \times \Delta(s), \coprod_{\dim s=n} X(s) \times \partial \Delta(s)) \rightarrow (F_n, F_{n-1})$ が得られる。