基点付コファイブレーションは、基点が非退化ならばコファイブレーションである

hiray

Strøm [10], The homotopy category is a homotopy category, p.438 の下から 15 行 あたりに、基点付コファイブレーションに関することがらが、証明抜きで書かれている。そのたった数行を、ながながと解説した「基点付きホモトピー論への一歩」は書き上げたが、定義やアイディアの変更などでできた不整合を調整する必要があり、整理がついていない。

その数行のすぐ後に、Strøm の〈手抜き証明〉付の、「基点付コファイブレーションは、基点が非退化ならばコファイブレーションである」が書かれている。これについては、May and Ponto [5] More Concise Algebraic Topology に証明があるようだからと後回しにしていた。ところがこの本の証明を読んでみると、 Strøm 命題 7 の半分に相当する May and Ponto の Step (i) に少し‘解説’が付け加えられているだけ（これでも助かるのだが）で、あとは Strøm の丸写しであることがわかった。せっかく手抜き証明を解読したのだから、もう少しオコボレがあってもよさそうなものだが、手抜きはそのままに放置されている。Step (ii) における定義の変更（ミスタイプ？）も混乱を誘う。

記号は May and Ponto の方が普通の教科書風なのでおおよそこれに従うが、証明の方針は Strøm に従う。一般的にやっておけば、コンパクト生成空間の圏での「基点付コファイブレーションは、基点が非退化ならばコファイブレーションである」が導かれるからである。

1

(X, A) は基点付空間対で、$w : X \to I$ は $w^{-1}(0) = *$ が満たされるような連続関数とする。ホモトピー $k' : X \times I \to X$ と連続写像 $w' : X \to I$ の対 (k', w') が（w に関する）基点付 Strøm 構造であるとは、1) ${k'}_0 = 1_X$, 2) ${k'}^A_t = 1^A_X$, 3) $\forall x \in X\,(\, w'(x) \leq w(x)\,)$, 4) $A \subset {w'}^{-1}(0)$, 5) $w'(x) < \min(t, w(x)) \Rightarrow k'(x, t) \in A$ 、が成り立つこととする。

[5) $\Rightarrow {w'}^{-1}(0) \subset \mathrm{C}\ell\, A$] が成り立つ。**証明** $\forall x \in {w'}^{-1}(0)$ とする。このとき 5) の対偶を用いれば、$k'(x, t) \notin A \Rightarrow 0 = w'(x) \geq \min(t, w(x)) \geq 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee w(x) = 0 \Leftrightarrow^* t = 0$ となる（$w(x) = 0 (\Leftrightarrow x = *)$ は $k'(x, t) \notin A$ に背反 $(x = * \Rightarrow k'(x, t) = * \in A)$）。その対偶は、

$$\forall t (\, t \in (0, 1] \Rightarrow k'(x, t) \in A\,)$$

である。$k'(x, -) : I \to X$ について、$k'(x, (0, 1]) \subset A$ である。$x = k'(x, 0) \in k'(x, I) = k'(x, \mathrm{C}\ell\,(0, 1]) \subset \mathrm{C}\ell\, A$ となる。□

したがって、4) とあわせて 4)’ ${w'}^{-1}(0) = \mathrm{C}\ell\, A$ が成り立つ。

命題 1.1 (X, A) は基点付空間対で、$w : X \to I$ は $w^{-1}(0) = *$ が満たされるような連続関数とする。このとき、 (X, A) が基点付コファイバード対であることと w に関する基点付 Strøm 構造が存在することは同値である。

証明 (X, A) は基点付コファイバード対とする（w が存在するので基点は閉である）。その同

値条件は、基点付 Puppe の補題により、包含写像 $1_{\pi(X\times I)}^{Z}:\pi(X\times 0\cup A\times I)\subset\pi(X\times I)$ にレトラクションが存在することである。ここで、$\pi:X\times I\to X\times I/*\times I$ は商写像で、$Z^+=X\times 0\cup A\times I, Z=\pi(Z^+)$ と略記している。Z^+ は $X\times 0, A\times I$ の張り合わせではない可能性があるが、Z は（基点付 Puppe の補題により）$\pi(X\times 0),\pi(A\times I)$ の貼り合わせであり、包含写像 1_X^A に関する写像柱である。

$F_0:(X\times I,Z^+,*\times I)\to(X\times I,Z(w),*\times 0)$ を $F_0(x,t)=(x,\min(t,w(x))$ で定義する。ただし、$Z(w)=F_0(Z^+)=\{\,(x,s)\,|\,s\le w(x)\,\}$ である。

[$F={F_0}_{Z(w)}^{Z^+}:(Z^+,*\times I)\to(Z(w),*\times 0)$ は、$G:(X\times I,*\times I)\to(Z(w),*\times 0)$ に拡張される。]

$$
\begin{tikzcd}
(Z^+,*\times I) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\cap"'] & (Z(w),*\times 0) \\
(X\times I,\times I) \arrow[ur, "G"] &
\end{tikzcd}
$$

（コメント：(X,A) がコファイバード対ならレトラクション $Z^+\subset X\times I\xrightarrow{r}Z^+$ が存在し、$G=F\circ r$ とすればよい。弱い条件「(X,A) は基点付コファイバード対」から同じことを示すには、以下のように回り道をしなければならない。）

$$
\begin{tikzcd}
(Z^+,*\times I) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_Z^{Z^+}"'] \arrow[dd, "\cap"'] & & (Z(w),*\times 0) \\
& (Z,*) \arrow[ur, dotted, "f"'] \arrow[dd, "\cap"'] & \\
(X\times I,*\times I) \arrow[dr, "\pi"] & & \\
& (\pi(X\times I),*) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(Z^+,*\times I) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\cap"'] & & (Z(w),*\times 0) \\
& (Z,*) \arrow[ur, "f"] \arrow[dd, "\cap"'] & \\
(X\times I,*\times I) \arrow[dr, "\pi"] & & \\
& (\pi(X\times I),*) \arrow[uuur, dotted, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

上左可換図式において、その左手前四角の上辺 $\pi_Z^{Z^+}:Z^+\to Z$ は、集合の写像として商写像であるから上三角が可換（$F=f\circ\pi_Z^{Z^+}$）になるような $f:(Z,*)\to(Z(w),*\times 0)$ が存在する。さらに、$\pi_Z^{Z^+}$ は位相空間の写像としても等化写像である（＊）から、f は連続である。右可換図式において、その左手前四角の右（包含）縦射 $1_{\pi(X\times I)}^{Z}:(Z,*)\subset(\pi(X\times I),*)$ にはレトラクション $r:\pi(X\times I)\to Z$ が存在する（(X,A) が基点付コファイブレーションであるから）。$g=f\circ r:(\pi(X\times I),*)\to(Z(w),*\times 0)$ は f の拡張である（$f=g\circ 1_{\pi(X\times I)}^{Z}$）。したがって、$G=g\circ\pi:(X\times I,*\times I)\to(Z(w),*)$ によって、上右可換図式が完成し $F=G\circ 1_{X\times I}^{Z^+}$ となる。 □

註 [$\pi_Z^{Z^+}$ は位相空間の写像としても等化写像である。] ごちゃごちゃを避けて一般論でやるなら、「$f:X\to Y$ が等化写像で $A\subset X$ が f-充満（$A=f^{-1}f(A)$）でありかつ $f^{X-A}:X-A\to Y$ が単射ならば、$f_{f(A)}^{A}:A\to f(A)$ は等化写像である」を用いるか、「$f:X\to Y$ が閉写像で $A\subset X$ が f-充満（$A=f^{-1}f(A)$）ならば、$f_{f(A)}^{A}:A\to f(A)$ は閉全射である」を用いればよい。後者の証明：$C\subset A$ は A の閉集合とする。X の閉集合 F で $C=F\cap A$ となるものが存在する。$f(F)$ は Y の閉集合であり、$f(C)=f(F\cap A)=f(F\cap f^{-1}f(A))(=f((f^F)^{-1}f(A))=f^F((f^F)^{-1}f(A))=\operatorname{Im}f^F\cap f(A)=f(F)\cap f(A)$ であるから、$f(C)$ は $f(A)$ の閉集合である。

［証明に戻る］基点付 Strøm 構造 (k', w') は、射影 $p_X : X \times I \to X\ ((x,t) \mapsto x), p_I : X \times I \to I\ ((x,t) \mapsto t)$ を用いて、

$$k'(x,t) = p_X(G(x,t)), w'(x) = \sup_s \{ \min(s, w(x)) - p_I(G(x,s)) \}$$

で定義される。

$w(x) \in I$ は、$-1 \leq \min(s, w(x)) - p_I(G(x,s)) \leq 1$ と $\min(0, w(x)) - p_I(G(x,0)) = 0 \in \{\min(s, w(x)) - p_I(G(x,s)) \mid s \in I\}$ による。

1) $x \in X \Rightarrow k'(x,0) = p_X(x,0) = x$, 2) $a \in A \Rightarrow k'(a,t) = p_X(a, \min(t, w(a))) = a$, 3) $w'(x) \leq \sup_s \{ \min(s, w(x)) \} \leq w(x)$ は易しい。4) $A \subset {w'}^{-1}(0)$: $\forall a \in A$ にかんして $p_I(G(a,s)) = p_I(F(a,s)) = p_I(a, \min(s, w(a))) = \min(s, w(a))$ であり、$w'(a) = \sup_s \{ \min(s, w(x)) - \min(s, w(x)) \} = 0$ となる。5) $w'(x) < \min(t, w(x)) \Rightarrow k'(x,t) \in A$: $k'(x,t) \notin A$ とする (i.e. $k'(x,t) \in X - A$)。$G(x,t) = (k'(x,t), p_I(G(x,t))) \in X \times 0 \cup A \times I$ と $k'(x,t) \in X - A$ により $p_I(G(x,t)) = 0$ である。これから、$\min(t, w(x)) = \min(t, w(x)) - p_I(G(x,t)) \leq \sup_s \{ \min(s, w(x)) - p_I(G(x,s)) \} = w'(x)$ となる。以上をまとめれば、5) の対偶 $k'(x,t) \notin A \Rightarrow \min(t, w(x)) \leq w'(x)$ がえられる。

逆の証明に入るが、「基点付コファイブレーションは、基点が非退化ならばコファイブレーションである」を示すのには必要がないから、飛ばしてもよい（May-Ponto がそうしている）。

基点付 Strøm 構造 (k', w') が与えられているとする。集合の関数 $r_0 : X \times I \to X \times I$ を

$$r_0(x,t) = \begin{cases} (k'(x,t), t - \frac{w'(x)}{w(x)}) & (w'(x) < tw(x) \text{ のとき}) \\ (k'(x,t), 0) & (tw(x) \leq w'(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する。

1) $\mathrm{Im}\, r_0 \subset Z^+$ と 2) $r_0(* \times I) \subset * \times I$ が成り立つ。なぜなら、前者は $0 \leq w'(x) < xw(x) \leq x, w(x) \Rightarrow w'(x) < \min(t, w(x)) \Rightarrow r_0(x,t) = (k'(x,t), t - \frac{w'(x)}{w(x)}) \in A \times I$,（$tw(x) \leq w'(x)$ の場合は）$r_0(x,t) = (k'(x,t), 0) \in X \times 0$ であるから。後者は $r_0(*, t) = (k'(*, t), ?) = (*, ?)$ による。また、1) により、$r_{0Z^+} : X \times I \to Z^+$ が導かれるが 3) ${r_0}^{Z^+}_{Z^+} = 1_{Z^+}$ となる。なぜなら、$r_0(x,0) = (k'(x,0), 0) = (x, 0), r_0(a,t) = (k'(a,t), t-0) = (a,t)$ であるから。したがって、4) r_{0Z^+} は $1^{Z^+}_{X \times I} : Z^+ \subset X \times I$ のレトラクションである。

$\pi \circ r_0 : X \times I \to \pi(X \times I)$ の連続性の証明：この関数の定義域を $(X - *) \times I$ に制限すれば連続である。二つの連続関数

$$\tau : (X - *) \times I \to [-1, 1], (x,t) \mapsto t - \frac{w'(x)}{w(x)}, \sigma : [-1,1] \to I, s \mapsto \begin{cases} s & (0 < s) \\ 0 & (s \leq 0) \end{cases}$$

をもちいて、${r_0}^{(X-*) \times I} = ({k'}^{(X-*) \times I}, \sigma \circ \tau)$ と表現できるからである。したがって、$\pi \circ r_0$ は $(X - *) \times I$ の各点で連続であるから、残り $* \times I$ の各点で連続であることを示せば、連続になる。

$\pi(X \times I) \ni *$ の基本近傍系としては $\{\pi(W) \mid W : X \times I \text{ の開集合} \wedge * \times I \subset W\}$ をとるのだが、$* \times I$ がコンパクトであるから tube lemma により X の開集合 V が存在して $* \times I \subset V \times I \subset W$ となるので、$\{\pi(V \times I) \mid V : X \text{ の開集合}\}$ を基本近傍系に取ることができる。

$* \in V \subset X$ であるような任意の開集合 V をとる。k' の $(*,t)$ における連続性により、$(*,t) \in U \wedge k'(U) \subset V$ であるような 開集合 U が存在する。任意の $(x,s) \in U$ にたいし、$r_0(x,s) \in V \times I$ であるから、$r_0(U) \subset V \times I$ となる。したがって、$\pi \circ r_0(U) \subset \pi(V \times I)$ であるから、$\pi \circ r_0$ は $* \times t \in * \times I)$ で連続である。

以上で、$\pi \circ r_0 : X \times I \to \pi(X \times I)$ は連続で、$\pi \circ r_0(* \times I) = *$ であることがわかった。

$\pi \circ r_0 : (X \times I, * \times I) \to (\pi(X \times i), *)$ によって $r : (\pi(X \times I), *) \to (\pi(X \times I), *)$ が導かれ連続になる（π が等化写像)。性質 1) により $\pi \circ r = 1_Z^{\pi(X \times I)} \circ (\pi \circ r)_Z, r = 1^Z \circ r_Z$ と分解され、$(\pi \circ r)_Z, r_Z$ は連続である（$1_Z^{\pi(X \times I)}$ が包含写像)。以下の可換図式がえられる。

$$\begin{tikzcd}
(Z^+, * \times I) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & (X \times I, * \times I) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[drr, "(\pi \circ r_0)_Z"] & (Z^+, * \times 0) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & (X \times I, * \times I) \arrow[d, "\pi"] \\
(Z, *) \arrow[r, "\subset"] & (\pi(X \times I), *) \arrow[r, "r_Z"] & (Z, *) \arrow[r, "\subset"] & (\pi(X \times I), *)
\end{tikzcd}$$

$\pi_Z^{Z^+} : Z{\to}Z$ は全射（エピ射）であるから、性質 3) により $r_Z \circ 1^Z_{\pi(X \times I} = 1_Z$ となる。Z は $\pi(X \times I)$ のレトラクトで、(X, A) は基点付コファイバード対である。 □

註 $\pi(X \times I)$ は、$X \wedge I_+$ などとカッコよく書かれるが、その部分空間を記述するのに不便である。「同一視」が乱発されるので「不便」ではすまされず、だんだんと「不快」になる。いちいち $\pi(--)$ をつける「不便」で済ませることにした（厳密な記述が必要な場合が出来すれば、こうしなければならない)。

命題 1.2 基点付コファイバード対 (X, A) の基点が、X に関し非退化で、かつ A に関しても非退化ならば、$(X, *)$ の Strøm 構造 (ℓ, z) で $\ell(A \times I) \subset A$ であるものが存在する。

定理 1.3 基点付コファイバード対 (X, A) の基点が、X に関し非退化で、かつ A に関しても非退化ならば、(X, A) はコファイバード対である。

命題 1.2 を仮定して、定理 1.3 を先に証明する。

定理 1.3 の証明 $(X, *)$ の Strøm 構造 (ℓ, z) で $\ell(A \times I) \subset A$ であるものが存在する（命題 1.2)。この z に関する基点付 Strøm 構造 (h', z') が存在する（命題 1.1)。この (h', z') を次のように変形して、$h : X \times I \to X, u : X \to I$ を定義する。

$$h(x,t) = \begin{cases} \ell(h'(x,t), \min(t, \frac{z'(x)}{z(x)})) & (x \neq *) \\ * & (x = *) \end{cases}$$

$$u(x) = z'(x) - z(x) + \sup_s \{z(h'(x,s))\}$$

<u>$u(x) \in I$ であること</u>：$[\ 0 \leq p \leq q \leq r \leq 1 \Rightarrow 0 \leq p \leq p - q + r \leq r \leq 1\ ]$ であるから、$z'(x) \leq z(x) \leq \sup_s \{z(h'(x,s))\}$ を示せばよいが、易しい（$z(x) = z(h'(x,0)) \in \{z(h'(x,s))\}$)。

<u>h の連続性</u>：$(X - *) \times I$ の各点で連続であるから、$\forall(*,t) \in * \times I$ で連続であることをいえばよい。

$h(*,t) = * \in V \subset X$ であるような開集合 V にたいして、$h'(x,t) = * \in V$ であることから tube lemma により $* \in W \subset X\,(\,h'(W \times I) \subset V\,)$ であるような開集合 W が存在する。また、

$\ell(*\times I)=*\in W$ により再び tube lemma を用いれば $*\in\exists U\subset X\,(\,U$ は開 $\wedge\,\ell(U\times I)\subset W\,)$ となる。

任意に $(x,s)\in U\times I$ をとる。$\underline{x\neq *\text{ のとき}}$ $h'(x,s)\in W\Rightarrow(h'(x,s),\min(s,z'(x)/z(x)))\in W\times I\Rightarrow h(x,s)=\ell(h'(x,s),\min(s,z'(x)/z(x)))\subset V$ である。$\underline{x=*\text{ のとき}}$ $h(*,s)=*\in V$ である。いずれにせよ、$h(U\times I)\subset V$ となり、h は $*\times I$ の各点 $(*,t)$ で連続になる。

(h,u) が (X,A) の Strøm 構造であることの確認：

1) 任意の $x\in X$ について、$\underline{x\neq *\text{ のとき}}$ $h(x,0)=\ell(h'(x,0),\min(0,z'(x)/z(x)))=\ell(x,0)=x$ であり、$\underline{x=*\text{ のとき}}$ $h(*,0)=*$ であることから、$h(x,0)=x$ となる。

2) 任意の $a\in A$ について、$\underline{a\neq *\text{ のとき}}$ $h(a,t)=\ell(h'(a,t),\min(t,0/z(x)))=\ell(a,t)=a$ であり、$\underline{a=*\text{ のとき}}$ $h(*,t)=*$ である。いずれの場合も、$h(a,t)=a$ となる。

3) 任意の $a\in A$ について、$u(a)=0-z(a)+\sup_s\{z(h'(a,s))\}=-z(a)+z(a)=0$ である。

4) $u(x)<t$ とする。$\underline{z'(x)\leq z(x)\text{ のとき}}$ $z'(x)<u(x)(=z'(x)+(\sup_s\{z(h'(x,s))\}-z(x))<t$ である。よって、$z'(x)<\min(t,z(x))$ となるが、これより $h'(x,t)\in A$ がえられる。$\ell(A\times I)\subset A$ であったから、$h(x,t)=\ell(h'(x,t),\min(t,z'(x)/z(x)))\in A$ である。

$\underline{z'(x)=z(x)\neq 0\text{ のとき}}$ $u(x)=\sup_s\{z(h'(x,s))\}<t\Rightarrow\forall s\,(\,z(h'(x,s))<t\,)\Rightarrow z(h'(x,t))<t\Rightarrow^* h'(x,t)\in\{*\}$ となる（$\Rightarrow^*$ は (ℓ,z) が $(X,*)$ の Strøm 構造であることからの帰結）。$h(x,t)=\ell(h'(x,t),\min(t,1))=\ell(*,t)=*\in A$ である。

$\underline{z'(x)=z(x)=0\text{ のとき}}$ $x=*$ であるから、$h(x,t)=h(*,t)=*\in A$ である。

いずれの場合も、$u(x)<t\Rightarrow h(x,t)\in A$ となる。

(X,A) はコファイバード対である。□

命題 1.2 の証明 コファイバード対 $(A,*),(X,*)$ の Strøm 構造をそれぞれ、$(k_A,w_A),(k_X,w_X)$ とし、基点付コファイバード対 (X,A) の $\langle w_X$ に関する$\rangle$ 基点付 Strøm 構造を (k',w') とする。(X,A) の基点付ホモトピー拡張性質（HEP*）をもちいて、$1_X:(X,*)\to(X,*)$ に沿って基点付ホモトピー $1_X^A\circ k_A:(A\times I,*\times I)\to(X,*)$ を $\tilde{k_A}:(X\times I,*\times I)\to(X,*)$ に拡張する。

$$
\begin{tikzcd}
(A,*) \arrow[r, "\epsilon_0"] \arrow[d, "\subset"] & (A\times I,*\times I) \arrow[d, "\subset"] \arrow[ddr, "1_X^A\circ k_A"] & \\
(X,*) \arrow[r, "\epsilon_0"] \arrow[drr, "1_X"'] & (X\times I,*\times I) \arrow[dr, dotted, "\tilde{k_A}"] & \\
 & & (X,*)
\end{tikzcd}
$$

つぎに、$w_A:A\to I$ を次のように定義して、$\tilde{w_A}:X\to I$ に拡張する。

$$
\tilde{w_A}(x)=\begin{cases}(1-\frac{w'(x)}{w_X(x)})w_A(k'(x,1))+w'(x) & (w'(x)<w_X(x))\\ w_X(x)(=w'(x)) & (w'(x)=w_X(x))\end{cases}
$$

$(0\leq)w'(x)<w_X(x)$ ならば、$0<w_X(x)$ であること、$w'(x)<w_X(x)=\min(1,w_X(x))\Rightarrow k'(x,1)\in A$ により $w_A(k'(x,1))$ が定義されていること、が確認される。

任意の $a\in A$ について、$\underline{0=w'(a)<w_X(a)\text{ の場合}}$ は $\tilde{w_A}(a)=w_A(k'(x,1))=w_A(a)$ であり、$\underline{0=w'(a)=w_X(a)\text{ の場合}}$ は $a=*$ で $\tilde{w_A}(a)=w_X(a)=0=w'(a)$ となり、

<u>$0 = w'(a) = w_X(a)$ の場合</u> は $\tilde{w_A}(a) = w_A(k'(a,1)) = w_A(a)$ である。よって、$\tilde{w_A}$ は w_A の拡張である。

［ $\tilde{w_A}$ の連続性 ］1) 開集合 $O = \{x \,|\, w'(x) < w_X(x)\} \subset X$ 上で $\tilde{w_A}$ は連続であるから、各点 $p \in O$ で連続である。

2) $p \in X - O = \{x \,|\, w'(x) = w_X(x)\} \wedge p \neq *$ とする。$\alpha : X - * \to I, x \mapsto 1 - \frac{w'(x)}{w_X(x)}$ は連続で $\alpha(p) = 0$ であり、w' の連続性とあわせて次が成り立つ（ただし、区間 J はすべて $J \cap I$ であるべきところを J と略記している）。

$$\forall \varepsilon > 0 * \in \exists U \subset X\,(\,U \text{は開} \wedge \alpha(U) \subset [0, \varepsilon/2) \wedge w'(U) \subset (w'(p) - \varepsilon/2, w'(p) + \varepsilon/2)\,)$$

このとき、$x \in U \cap O$ については、$0 \leq \alpha(x) < \varepsilon/2 \Rightarrow 0 \leq \alpha(x) w_A(k'(x,1) < \varepsilon/2$ であり、かつ $w'(p) - \varepsilon/2 < w'(x) < w'(p) + \varepsilon/2$ であることから、$w'(p) - \varepsilon (< w'(p) - \varepsilon/2) < \tilde{w_A}(x) < w'(p) + \varepsilon$ となる。また、$x \in U \cap (X - O)$ については、$\tilde{w_A}(x) = w_X(x) = w'(x)$ により、$\tilde{w_A}(x) \in (w'(p) - \varepsilon/2, w'(p) + \varepsilon/2) \subset (w'(p) - \varepsilon, w'(p) + \varepsilon)$ となる。したがって、$\tilde{w_A}$ は $p \in X - O = \{x \,|\, w'(x) = w_X(x)\} \wedge p \neq *$ であるような p で連続になる。

3) $\tilde{w_A}$ は $p = *$ で連続：$\tilde{w_A}(*) = w'(*) = w_X(*) = 0$ である。

$w_A \circ k'_1 = w_A(k'(-,1)) : x \mapsto w_A(k'(x,1))$ について、次の可換図式がえられる。

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "{k'}_1{}^O_A"] \arrow[d, "\cap"] & A \arrow[r, "w_A"] \arrow[d, "\cap"'] & I \\
X \arrow[r, "{k'}_1"] & X &
\end{tikzcd}$$

任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$w_A{}^{-1}[0, \varepsilon/2)$ は A の開集合であるから、X の開集合 V が存在して $w_A{}^{-1}[0, \varepsilon/2) = V \cap A = 1_X^{A\,-1} V$ となる（$* \in w_A{}^{-1}[0, \varepsilon/2) = V \cap A$ により、$* \in V$ であることに注意)。$(w_A \circ k'_1)^{-1}[0, \varepsilon/2) = O \cap {k'_1}^{-1} V$ である。$W = {k'_1}^{-1} V \cap w_X{}^{-1}[0, \varepsilon/2)$ と定義すれば、任意の $x \in W \cap O$ について、$0 \leq w'(x) < w_X(x) < \varepsilon/2 \ \wedge \ 0 \leq (w_A \circ k'_1)(x) < \varepsilon/2 \Rightarrow 0 \leq \tilde{w_A} = \alpha(x) w_A(k'(x,1)) + w'(x) < \varepsilon$ となる。

また、任意の $x \in W \cap (X - O)$ についても、$0 \leq \tilde{w_A}(x) = w_X(x) < \varepsilon/2 < \varepsilon$ となる。すなわち、$\tilde{w_A}$ は $p = *$ においても連続である。

［ $\tilde{w_A}^{-1}(0) = \{*\}$ の証明 ］：$\tilde{w_A}(*) = w_X(*) = 0$ により、$* \in \tilde{w_A}^{-1}(0)$ であるから、$x \in \tilde{w_A}^{-1}(0) \Rightarrow x = *$ を示せばよい。

$x \in X - O \wedge \tilde{w_A}(x) = 0$ とする。$\tilde{w_A}(x) = w_X(x) = 0$ であるから、$x = *$ となる。

$x \in O \wedge \tilde{w_A}(x) = 0$ とする。

$0 = (1 - \frac{w'(x)}{w_X(x)}) w_A(k'(x,1)) + w'(x) \ \wedge \ 0 \leq (1 - \frac{w'(x)}{w_X(x)}) w_A(k'(x,1)) \ \wedge \ 0 \leq w'(x) \Rightarrow (1 - \frac{w'(x)}{w_X(x)}) w_A(k'(x,1)) = 0 \ \wedge \ w'(x) = 0 \Rightarrow w_A(k'(x,1)) = 0 \ \wedge \ w'(x) = 0 \Leftrightarrow k'(x,1) = * \ \wedge \ x \in \mathrm{C}\ell\, A$ となる。

ここで、$w_X(k'(x', -)) : I \to I,\, t \mapsto w_X(k'(x', t))$ という関数をとる。この関数は、$x' = a \in A$ ならば定値関数であるから（ $w_X(k'(a,t)) = w_X(a)$ ）、$x' \in \mathrm{C}\ell\, A$ のばあいも定値関数になる。なぜなら、$w_X \circ k' : X \times I \to I$ にたいし、$e(w_X \circ k') : X \to C_{\mathrm{cpt}}(I, I),\ x' \mapsto e(w_X \circ k')(x') : t \mapsto w_X(k'(x', t))$ が定義され、$e(w_X \circ k')(A) \subset \{c_s : t \mapsto s \,|\, s \in I\} \subset C_{\mathrm{cpt}}(I, I)$ である。I がハウスドルフであることから、定値関数の全体の部分空間 $\{c_s : t \mapsto s \,|\, s \in I\}$ が $C_{\mathrm{cpt}}(I, I)$ で

閉になる。よって、$e(w_X \circ k')(\mathrm{C}\ell\, A) \subset \mathrm{C}\ell\, e(w_X \circ k')(A) \subset \{c_s : t \mapsto s \,|\, s \in I\}$ となるから。

したがって、$e(w_X \circ k')(x) = w_X(k'(x,-))$ も定値関数で、その値は $w_X(k'(x,1)) = w_X(*) = 0$ である。よって、（ $k'(x,0) = x$ により ） $0 = w_X(k'(x,0)) = w_X(x) \Rightarrow x = *$ となり、$x \in O$ に矛盾する（ 方程式 $\tilde{w_A}(x) = 0$ の解は O にはない ）。以上により、$\tilde{w_A}^{-1}(0) = \{*\}$ となる。

$\ell : X \times I \to X, z : X \to I$ を以下のように定義し、この組が $(X,*)$ の Strøm 構造でありまた $\ell(A \times I) \subset A$ が成り立つことを示す。

$$\ell(x,t) = \begin{cases} \tilde{k_A}(x, t/\tilde{w_A}(x)) & (t < \tilde{w_A}(x)) \\ k_X(\tilde{k_A}(x,1), t - \tilde{w_A}(x)) & (t \geq \tilde{w_A}(x)) \end{cases}$$

$$z(x) = \min(1, \tilde{w_A}(x) + w_X(\tilde{k_A}(x,1)))$$

［ ℓ の連続性 ］: $X \times I \to I, (x,t) \mapsto \tilde{w_A}(x)$ はハウスドルフ空間 I に値がある連続写像で、そのグラフは閉集合であるから、定義域にそのグラフを対応させる（モンジュのパラメトライゼーション）$X \times I \to X \times I \times I, (x,t) \mapsto (x,t,\tilde{w_A}(x))$ は閉写像になる。また、コンパクト空間が定義域でハウスドルフ空間に値がある写像はコンパクト写像であるから、$I \times I \to I, (s,w) \mapsto sw$ はコンパクト写像で、$X \times I \times I \to I \to X \times I, (x,s,w) \mapsto (x,sw)$ も閉写像になる。以上の二つの閉写像の結合 $X \times I \to X \times I, (x,s) \mapsto (x, s\tilde{w_A}(x))$ も閉写像であり、その像を C とすれば $X \times I \to C$ は等化写像である（これを $q : X \times I \to C$ と表記する）。$C = \{\,(x, s\tilde{w_A}(x)) \,|\, x \in X, s \in I\,\}$ と $\{\,(x,t) \,|\, t \leq \tilde{w_A}(x)\,\}$ の両者は、集合として $\amalg_{x \in X}\{x\} \times [0, \tilde{w_A}(x)]$ であるから、等しい。$D = \{\,(x,t) \,|\, t \geq \tilde{w_A}(x)\,\}$ とおけば、, $C \cap D = \{\,(x,t) \,|\, t = \tilde{w_A}(x)\,\}, C_- = C - C \cap D = \{\,(x,t) \,|\, t < \tilde{w_A}(x)\,\}$ となる。

$q(X \times 1 \cup * \times I) = C \cap D, q((X - *) \times [0,1)) = C_-$ により、$(\ell^C \circ q)^{X \times 1 \cup * \times I}(x,s) = \ell^{C \cap D}(x, s\tilde{w_A}(x)) = k_X(\tilde{k_A}(x,1), 0) = \tilde{k_A}(x,1)$, $(\ell^C \circ q)^{(X-*) \times [0,1)}(x,s) = \ell^{C_-}(x, s\tilde{w_A}(x)) = \tilde{k_A}(x, \frac{s\tilde{w_A}(x)}{\tilde{w_A}(x)}) = \tilde{k_A}(x,s)$ であるから、次の可換図式がえられる。

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "\tilde{k_A}"] \arrow[d, "q"'] & X \\ C \arrow[ur, dotted, "\ell^C"] & \end{tikzcd}$$

ゆえに、$\ell^C : C \to X$ は連続であり、$X \times I$ の閉集合 C, D 上の連続写像 ℓ^C, ℓ^D の貼り合わせである $\ell : X \times I \to X$ は連続である。

［(ℓ, z) が $(X,*)$ の Strøm 構造であり、$\ell(A \times I) \subset A$ が成り立つこと］:

$\ell(x,0) = \tilde{k_A}(x,0) = x \ (x \neq *)$

$\ell(*,t) = k_X(\tilde{k_A}(*,1), t) = k_X(*,t) = *$

任意の $a \in A, t \in I$ について、$\forall t' \,(\,\tilde{k_A}(a,t') = k_A(a,t'), \tilde{w_A}(a) = w_A(a)\,)$ に留意すれば、

$$\ell(a,t) = \begin{cases} k_X(k_A(a,1), t - w_A(a)) & (w_A(a) \leq t) \\ k_A(a, t/w_A(a)) & (t \leq k_A(a)) \end{cases} = \begin{cases} k_X(k_A(a,1), t - w_A(a)) & (w_A(a) < t) \\ k_X(k_A(a,1), t - w_A(a)) & (w_A(a) = t) \\ k_A(a, t/w_A(a)) & (t \leq k_A(a)) \end{cases}$$

となり、$k_A(a, t/w_A(a)) \in A \,(t \leq k_A(a))$ である。$k_X(k_A(a,1), t - w_A(a)))\ (w_A(a) < t)$ については、$w_A(a) < t \leq 1 \Rightarrow k_A(a,1) = * \Rightarrow k_X(k_A(a,1), t - w_A(a))) = k_X(*, t - w_A(a)) = * \in A$

であり、また $k_X(k_A(a,1), t - w_A(a)))$ $(w_A(a) = t)$ についても、$k_X(k_A(a,1), t - w_A(a)) = k_X(k_A(a,1), 0)) = k_A(a,1) \in A$ となる。すなわち、$\ell(A \times I) \in A$ が成り立つ。

最後に、$z(x) < t \Rightarrow \ell(x,t) = *$ を示さなければならない。

$$\begin{aligned} z(x) &= \min(1, \tilde{w_A}(x) + w_X(\tilde{k_A}(x,1))) < t \\ &\Rightarrow \tilde{w_A}(x) + w_X(\tilde{k_A}(x,1)) < t \\ &\Rightarrow \tilde{w_A}(x) < t \wedge w_X(\tilde{k_A}(x,1)) < t - \tilde{w_A}(x) \end{aligned}$$

ここで、$\tilde{w_A}(x) < t \Rightarrow \ell(x,t) = k_X(\tilde{k_A}(x,1), t - \tilde{w_A}(x))$ であり、$w_X(\tilde{k_A}(x,1)) < t - \tilde{w_A}(x) \Rightarrow \tilde{k_A}(x,1) = *$ であるから、$\ell(x,t) = k_X(*, t - \tilde{w_A}(x)) = *$ が導かれる。 $\square$

参考文献

[1] Brown, R., Topology, EllisHorwood, 1988

[2] hiray, プッシュアウトについて, www.eonet.ne.jp/~hymath/

[3] hiray, プッシュアウトについて（実践編）, www.eonet.ne.jp/~hymath/

[4] hiray, Puppe の補題, www.eonet.ne.jp/~hymath/

[5] May, J. P., Ponto, K., More Concise algebraic Topology, The university of Chicago Press, 2012

[6] 西田吾郎, ホモトピー論, 共立, 1985

[7] Puppe, D., Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. 18(1967)

[8] Schubert, H., Categories, Springer, 1972

[9] Strøm, A., Note on cifibrations II, Math. Scand. 22(1968)

[10] Strøm, A., The homotopy category is a homotopy category, Arch. Math., 1972

[11] tom Dieck, T., Algebraic topology, Ems, 2008

[12] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978