

基点付きホモトピー論への一歩 (I)

hiray

Strøm [10], The homotopy category is a homotopy category, p.438 の下から 15 行あたりに、基点付コファイブレーションに関することがら、証明抜きで書かれている。そのたった数行を、ながながと解説しようと思った。Covid 騒動の間に一応書き上げたが、細部の調整に手間取っているので、急いで前半の部分を書き直したものがこの「基点付ホモトピー論への一歩 (I)」である。急いだ理由は、以下に述べる「解説文書」を読むのに必要な部分だからである。

Strøm は先程の数行後に「基点が非退化なら、基点付コファイブレーションはコファイブレーションである」を（短かいところではない、ナゾナゾ）証明付きで書いている。まあこれは May-Ponto [5] にあるから、あとで参考にすればいいだろうと高をくくっていたのが、記号が違ってだけで、Strøm の証明の引き写しであり、定義の変更など改悪と思われる部分もあると思う（関数の連続性の証明のことを端《はな》から考えていない？）。また、せっかく解説したのだから、もう少し解説のおこぼれがあってもよかろうに、と義憤にかられて解説文書『基点付コファイブレーションは、基点が非退化ならばコファイブレーションである』を書いた。これは「一言でいえば、…ということだ」という完全解説ではない（Strøm の証明は「分節的証明」からは遠い）、「形式論理的な了解で我慢しておこう」というものである。

これらの稿を書いて、長年（35 年！）ツンドク状態であった西田吾郎さんの『ホモトピー論』（共立）の、どれも「丸太ん棒でぶん殴ったような」略証にしか思えない証明が見えてきた（遅すぎる）。本の薄さを考えれば、西田さんが蛮勇をふるうのも仕方のないことだったろうと、今では思うが、この本が読まれないのはもったいない。

1 準備

「直観に頼りすぎ」ないためにはそれなりの準備が必要である。そのために、写像の定義域余定義域の制限に関して、次のような記号を導入し、hiray [3], ([2]) に書いたことをまとめておく。

集合（位相空間）対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が与えられているとき、 $A \ni a \mapsto f(a) \in B$ を $f_B^A : A \rightarrow B$ と表記する。 $f(X) \subset B$ であるときは、 $f_B^X : X \rightarrow B$ を $f_B : X \rightarrow B$ と省略表記する。同様に、 $f_X^A : A \rightarrow X$ も $f^A : A \rightarrow X$ と省略する方が合理的である。包含写像 $(1_X)^A : A \subset X$ も、 $1_X^A : A \subset X$ と表記する。以上の表記の天地を逆にしたい人には、恒等写像を 1^X と表記することを勧める。

1. 充満部分集合（アンサンブル サチュレ）

定義 $A \subset X$ が写像 $f : X \rightarrow Y$ に関して充満である（ f -充満と略記）とは、 $f(A) \cap f(X - A) = \emptyset$ が成り立つこととする。

これは、 f の像が A の像と $X - A$ の像に分割されること（ $f(X) = f(A) \amalg f(X - A)$ ）を意味している。したがって、 $f(X - A) = f(X) - f(A)$ がなりたつこと、としてもよい。

対称性により、 A が f に関して充満であることと $C A = X - A$ が f に関して充満であることは同値である。

$f(X) \subset B \subset Y$ であるような部分空間 B にたいし、 A が f -充満であることと A が f_B -充満であることは同値である ($f_B(A) \cap f_B(X - A) = f(A) \cap f(X - A)$ であるから)。

命題 1.1 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$ とする。次は同値である。

- (1) A は f に関して充満である。
- (2) $A = f^{-1}f(A)$ が成り立つ。
- (3) $A = f^{-1}B$ であるような $B \subset Y$ が存在する。
- (4) 任意の $P \subset X$ にたいして $f(P \cap A) = f(P) \cap f(A)$ がなりたつ。
- (5) 任意の $P \subset X$ にたいして $f(P - A) = f(P) - f(A)$ がなりたつ。

$f: X \rightarrow Y$ が単射であるとき、 X の任意の部分集合は f に関し充満である。

A_α がすべて f に関して充満ならば、 $\cup_\alpha A_\alpha, \cap_\alpha A_\alpha$ も充満である。なぜなら、 $\forall \alpha (A_\alpha = f^{-1}B_\alpha)$ により、 $\cup_\alpha A_\alpha = f^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha)$, $\cap_\alpha A_\alpha = f^{-1}(\cap_\alpha B_\alpha)$ となるから。

補題 1.2 集合対の写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に関して次が成り立つ。

- (1) $\forall C \subset Y ((f_B^A)^{-1}(C \cap B) = f^{-1}C \cap A)$ が成り立つ。
- (2) とくに、 $C \subset B \Rightarrow (f_B^A)^{-1}(C) = f^{-1}C \cap A$ となる。
- (3) また、 A が f -充満であるならば、 $C \subset f(A) \Rightarrow (f_{f(A)}^A)^{-1}(C) = f^{-1}C$ である。

証明 (1) 可換性 $1_Y^B \circ f_B^A = f \circ 1_X^A$ による。(3) $f^{-1}C \subset f^{-1}f(A) = A$ であるから。 \square

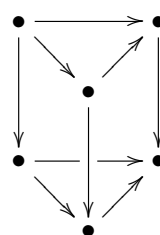
命題 1.3 A は $f: X \rightarrow Y$ にかんし充満で $B \subset A$ とする。このとき、 B が f の A への制限 $f^A: A \rightarrow Y$ に関し充満であるための必要十分条件は、 B が f にかんし充満であることである。したがって、 f^{X-A} が単射であるならば、 $X - A$ の任意の部分集合は f にかんし充満である。同じことだが、 A を含む X の任意の部分集合が f にかんし充満となる。

命題 1.4 $f: X \rightarrow Y$ は等化写像であり、 A は f にかんし充満であるとする。このとき、 $f^{X-A}: X - A \rightarrow Y$ が単射ならば $f_{f(A)}^A: A \rightarrow f(A)$ は等化写像である。したがって、 $A \subset X_0 \subset X$ であるような任意の X_0 について、 $f_{f(X_0)}^{X_0}: X_0 \rightarrow f(X_0)$ は等化写像である。

証明 C は、 $(f_{f(A)}^A)^{-1}C = f^{-1}C$ が A の閉集合であるような、 $f(A)$ の部分集合とする。 X の閉集合 F が存在して $F \cap A = f^{-1}C$ となるが、これは $F \cap A$ が f -充満であることを意味する。 $F - A \subset X - A$ と f^{X-A} が単射であることから、 $F - A$ も f -充満である。以上から、 $F = (F \cap A) \cup (F - A)$ は f -充満な閉集合であり、 $f(F)$ は Y の閉集合である。 $C = f(f^{-1}C) = f(F \cap A) = f(F) \cap f(A)$ となり、 C は $f(A)$ の閉集合である。 \square

2. プッシュアウト

プッシュアウトの基本性質：次の可換図式において、



左前側面がプッシュアウトである

とする。このとき、右前側面がプッシュアウトであることと後面がプッシュアウトであることは同値である (Schubert [8] 1972、あるいは [3, 2] の冒頭にある)。

「プッシュアウトの合成がプッシュアウト」はよく知られていると思うが、これなしで済むと思うのは、間違いだと思う (以下で、使いまくる)。

集合対 (位相空間対) の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が余デカルト的であるとは、可換図式 $1_Y^B \circ f_B^A = f \circ 1_X^A$ がプッシュアウト図式であることとする。

集合対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が相対全単射であるとは、 $f_{Y-B}^{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$ が定義され、全単射であることとする。すなわち、 f は $f = f_B^A \amalg f_{Y-B}^{X-A} : A \amalg (X - A) \rightarrow B \amalg (Y - B)$ と書かれる。

補題 1.5 集合対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が、相対全単射であることと余デカルト的であることは、同値である。

証明 相対全単射が余デカルト的であることは、直接確かめられる。

逆に、 f は余デカルト的であるとする。 $f_B^A \amalg 1_{X-A} : (X, A) \rightarrow (B \amalg (X - A), B)$ が相対全単射であり、したがって余デカルト的対の写像であるから、余錐 $1_Y^B, f$ にたいし普遍解 $w : B \amalg (X - A) \cong Y$ が存在する (以下の可換図式)。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{c} & X = A \amalg (X - A) \\
 f_B^A \downarrow & & \downarrow f_B^A \amalg 1_{X-A} \\
 B & \xrightarrow{c} & B \amalg (X - A) \\
 & & \searrow f \\
 & & Y = B \amalg (Y - B)
 \end{array}$$

\xrightarrow{c} (bottom left to bottom right), \xrightarrow{w} (dotted arrow from $B \amalg (X - A)$ to $Y = B \amalg (Y - B)$)

図式の可換性により、 $w^B = 1_Y^B, w^{X-A} = f^{X-A}$ であり、 $w : B \amalg (X - A) \rightarrow Y = B \amalg (Y - B)$ は全単射であるから $w = 1_B \amalg w_{Y-B}^{X-A}$ となり、 $w_{Y-B}^{X-A} = f_{Y-B}^{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$ は全単射でなければならない。したがって、 $f = f_B^A \amalg f_{Y-B}^{X-A} : A \amalg (X - A) \rightarrow B \amalg (Y - B) = Y$ で f_{Y-B}^{X-A} が全単射、すなわち f は相対全単射である。 \square

さらに、 f が相対恒等写像であるとは、 f_{Y-B}^{X-A} が定義され恒等写像であることとする。すなわち、 f は $f = f_B^A \amalg 1_{X-A} : A \amalg (X - A) \rightarrow B \amalg (X - A)$ と書かれる。言わずもがなであるが、相対恒等写像は相対全単射である。

位相空間対 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が接着対であるとは、 f が集合対の写像として相対恒等写像であることとする。 Y は、接着写像 f_B^A によって B に $X - A$ を接着した接着空間であると言われる。

上の補題の証明のなかで作ったように、集合対 (X, A) と写像 $h : A \rightarrow B$ について、 $Y = B \amalg (X - A), f = h \amalg 1_{X-A} : X = A \amalg (X - A) \rightarrow Y = B \amalg (X - A)$ とすれば、相対恒等写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B), f_B^A = h$ が一意的にえられる。

命題 1.6 任意の位相空間対 (X, A) と任意の連続写像 $h : A \rightarrow B$ について、接着対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B), f_B^A = h$ が一意的に存在する。

証明 (X, A) と h から一意的に定義される相対恒等写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ について、 $\langle 1_Y^B, f \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ を用いて Y に等価位相を附与する。集合の写像として、 $\langle 1_Y^B, f \rangle = \langle 1_B, h \rangle \amalg 1_{X-A} : (B \amalg A) \amalg (X - A) \rightarrow B \amalg (X - A)$ であり、見ただけで $(B \amalg A)$ の像と $X - A$ の像は交わらない部分空間 $B \amalg A$ が $\langle 1_Y^B, f \rangle$ -充満で $\langle 1_Y^B, f \rangle^{(B \amalg Y) - B \amalg A} = f^{X-A} = 1_X^{X-A} : X - A \subset X$ が単射であることがわかる。したがって、命題 1.4 により、 $\langle 1_{B_{rel}}^B, h \rangle : B \amalg A \rightarrow B_{rel}$ は等化写像になる (B_{rel} は Y の部分集合 B に部分空間としての位相を附与したものの、 $1_{B_{rel}}^B$ は書きようがないから無理やり表記：集合としては恒等写像である連続写像)。 $\langle 1_Y^B, f \rangle = 1_{B_{rel}}^B \circ \langle 1_B, h \rangle : B \amalg A \rightarrow B \rightarrow B_{rel}$ であるから、「 $\alpha \circ \beta$ が等化写像ならば α は等化写像である」岩波『位相幾何学』定理 1.1 (iii) により、 $1_{B_{rel}}^B : B \rightarrow B_{rel}$ は等化全単射であって同相であるが、今のばあい恒等写像である。 \square

系 1.7 命題において、 h が包含写像 $h = 1_B^A : A \subset B$ であるならば、 X も Y の部分空間となる。すなわち、 Y は部分空間 B と X の貼り合わせである。

証明 集合として $B = (B-A) \amalg A$, $X = A \amalg (X-A)$ であるから、 $Y = B \cup X = (B-A) \amalg A \amalg (X-A)$ において、 $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ による等化位相が Y に入る。この位相による部分空間を B_{rel}, X_{rel} と表記する。等化写像は集合の写像として、 $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle = 1_{B-A} \amalg \langle 1_A^A, 1_X \rangle : (B-A) \amalg A \amalg X \rightarrow (B-A) \amalg X$ であり、 $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle (B-A) = B-A$, $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle (A \amalg X) = X_{rel}$ であるから $A \amalg X$ は $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle$ -充満であり、 $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle^{(B \amalg X) - (A \amalg X)} = 1_Y^{B-A}$ が単射であるから、 $\langle 1_Y^B, 1_Y^X \rangle_{X_{rel}}^{A \amalg X} : A \amalg X \rightarrow X_{rel}$ は等化写像である。この写像は $A \amalg X \rightarrow X \rightarrow X_{rel}$ と分解されるので、 $X \rightarrow X_{rel}$ は等価全単射となり、同相である。集合としてこの写像は恒等写像であるから、 $X = X_{rel}$ となる。

$B = B_{rel}$ も同様である (命題 1.6 そのもの)。 \square

系 1.8 任意の位相空間対 (X, A) と任意の連続写像 $h : A \rightarrow B$ について、余デカルト的対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $f_B^A = h$ が存在する。このとき、 (X, A) が閉対であることと (Y, B) が閉対であることは同値である。

証明 (X, A) と h と任意の集合の全単射 $\alpha : X - A \rightarrow C$ に対して、相対全単射 $f = h \amalg \alpha : X = A \amalg (X - A) \rightarrow Y = B \amalg C$ を構成し、命題 1.6 を反復すればよい。

A が X の閉集合ならば、等化写像 $\langle 1_Y^B, f \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ に関して $\langle 1_Y^B, f \rangle^{-1} B = B \amalg A \subset B \amalg X$ により B は Y の閉集合になる。逆に B が Y の閉集合ならば、 $f^{-1} B = A$ により A は X の閉集合である。 \square

空間対 (X, A) に対する商空間 X/A は、同値関係を用いず、接着写像 $h : A \rightarrow *$ による接着空間として定義する。すなわち、商写像 $\pi : (X, A) \rightarrow (Y, *)$, $Y = X/A$ は接着対の写像である。以下の補題 1.9 により π は等化写像である。 $B = \{b \mid b \in B\} \subset X - A$ と $\{\{b\} \mid b \in B\}$ を「同一視する」という不快から逃れられる。

補題 1.9 位相空間のプッシュアウト図式 $f \circ i = j \circ h$ において、 h が等化写像であるなら f もそうである。

命題 1.10 余デカルト的対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ について、 f_B^A が等化写像であることと f が等化写像であることは同値である。

また、次も成り立つ。

命題 1.11 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は余デカルト的位相空間対の写像とする。 (X, A) が閉対で、 $f_B^A : A \rightarrow B$ が閉写像であるなら、 f もそうである。

略証 f が等化写像であるという仮定を付け加えれば、命題は成り立つ。なぜなら、 F を X の任意の閉集合とすれば $f^{-1}f(F) = f^{-1}f(F \cap A) \cup F$ となり、 $f(F)$ は Y の閉集合となるからである。

下の系 1.13 により、 $\langle 1_Y^B, f \rangle : (B \amalg X, B \amalg A) \rightarrow (Y, B)$ は余デカルト的閉対の写像であり、この命題の条件と付け加えた条件 ($\langle 1_Y^B, f \rangle$ は等化写像) が満たされる。したがって、 $\langle 1_Y^B, f \rangle$ は閉写像であり、閉部分空間 $\emptyset \amalg X$ への制限 $f = \langle 1_Y^B, f \rangle^{\emptyset \amalg X} : X \rightarrow Y$ も閉写像になる。 \square

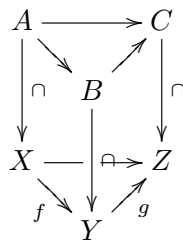
註 位相空間の可換図式
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_B^A} & B \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$
 とは、要するに位相空間対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ のことである。

f が余デカルト的であるとは、 f が(集合のレベルで) $f = f_B^A \amalg f_{Y-B}^{X-A} : A \amalg (X-A) \rightarrow B \amalg (Y-B)$ のように分解され、この分解において $f_{Y-B}^{X-A} : (X-A) \rightarrow (Y-B)$ が全単射という条件が加わることになる。さらに、 f が接着対の写像であるとは、この分解において $Y-B = X-A$ であかつ $f_{Y-B}^{X-A} = 1_{X-A}$ という条件が加わることである。

定義としては「 f が余デカルト的であるとは、最初の可換図式がプッシュアウト図式であること」にすぎないが、 f が集合のレベルで上に書いたような構造になっていることに注意しなければならない。

プッシュアウトの項で最初に挙げた「プッシュアウトの基本性質」は、(上の註を踏まえれば) 縦射がすべて包含写像であるような場合(下の可換図式)、「 f が余デカルト的対の写像であるとき、 g が余デカルト的対の写像であることと $g \circ f$ がそうであることは同値である」ということになる。単なる書き換えだからこれでいいのだが、何となく「？」が残る。「プッシュアウトの基本性質」により、二つの対の写像が余デカルト的なら残りもプッシュアウト図式であり、余デカルト的になるというので分解に関するもやもやも解消される。

さらに、「 f が接着対の写像であるとき、 g が接着対の写像であることと $g \circ f$ がそうであることは同値である」もなりたつ。



命題 1.12 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B), g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ は位相空間対の写像で、 f は余デカルト的対 (resp. 接着対) の写像とする。 g が余デカルト的対 (resp. 接着対) の写像であることと、 $g \circ f$ がそうであることとは同値である。

系 1.13 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が余デカルト的対 (resp. 接着対) の写像であることと、 $\langle 1_Y^B, f \rangle : (B \amalg X, B \amalg A) \rightarrow (Y, B)$ がそうであることとは同値である。

証明 包含写像対 $1_{B \amalg X}^X : (X, A) \rightarrow (B \amalg X, B \amalg A)$ が接着対であることが直接確かめられる。 \square

命題 1.14 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は余デカルト的対 (resp. 接着対) の写像とし、 $A \subset X_0 \subset X$ とする。このとき、 $f_{B \cup f(X_0)}^{X_0} : (X_0, A) \rightarrow (B \cup f(X_0), B)$, $f : (X, X_0) \rightarrow (Y, B \cup f(X_0))$ も余デカルト的対 (resp. 接着対) の写像になる。

証明 $f = f_B^A \amalg f_{Y-B}^{X-A} : A \amalg (X-A) \rightarrow B \amalg (Y-B)$, f_{Y-B}^{X-A} は全単射と分解される。よって、 $f(X_0) = f_B^A(A) \amalg f_{Y-B}^{X-A}(X_0-A) \subset B \amalg (Y-B)$ であるから、 $B \cup f(X_0) = (B \amalg \emptyset) \cup (f_B^A(A) \amalg f_{Y-B}^{X-A}(X_0-A)) = B \amalg f_{Y-B}^{X-A}(X_0-A)$ となる。すなわち、 $f_{B \cup f(X_0)}^{X_0} : A \amalg (X_0-A) \rightarrow B \amalg f_{Y-B}^{X-A}(X_0-A)$ であり、 f_{Y-B}^{X-A} が全単射であることから、 $f_{B \cup f(X_0)}^{X_0} : (X_0, A) \rightarrow (B \cup f(X_0), B)$ は相対全単射である。 $\langle 1_Y^B, f \rangle : B \amalg X \rightarrow Y$ は等化写像で、 $\langle 1_Y^B, f \rangle^{(B \amalg X) - (B \amalg A)} = f^{X-A}$ は単射であり、命題 1.3 により $B \amalg X_0$ は $\langle 1_Y^B, f \rangle$ -充満になる。さらに、 $\langle 1_Y^B, f \rangle(B \amalg X_0) = B \cup f(X_0)$ であることから、命題 1.4 により、 $\langle 1_Y^B, f \rangle_{B \cup f(X_0)}^{B \amalg X_0} : B \amalg X_0 \rightarrow B \cup f(X_0)$ は等化写像である。 $\langle 1_Y^B, f \rangle_{B \cup f(X_0)}^{B \amalg X_0} = \langle 1_{B \cup X_0}^B, f_{B \cup X_0}^{X_0} \rangle$ であるから、 $f_{B \cup f(X_0)}^{X_0} : (X_0, A) \rightarrow (B \cup f(X_0), B)$ は余デカルト的対 (resp. 接着対) の写像である。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\subset} & X \\
 \downarrow \subset & \searrow \subset & \uparrow \subset \\
 & X_0 & \\
 \downarrow \subset & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{\subset} & Y \\
 \downarrow \subset & \searrow \subset & \uparrow \subset \\
 & B \cup f(X_0) &
 \end{array}$$

上の可換図式において、左前面と後面はプッシュアウトであるから、右前面四角図式もプッシュアウト図式である (プッシュアウトの基本性質) が、右前面のようなプッシュアウト図式は、単に $f : (X, X_0) \rightarrow (Y, B \cup f(X_0))$ が余デカルト的対の写像であるということを見わけているにすぎない。

f が接着対の写像であるならば、 $f = f_B^A \amalg 1_{X-A}$ により $B \cup f(X_0) = B \amalg (X_0 - A)$ であり、 $Y - B \cup f(X_0) = (B \amalg (X - A)) - (B \amalg (X_0 - A)) = X - X_0$ となる。すなわち、この場合 $f : (X, X_0) \rightarrow (Y, B \cup f(X_0))$ は接着対の写像である。 \square

2 基点付コファイブレーションは埋め込みである

定義と基本性質

- 1) 基点付ホモトピー $H : (X \times I, * \times I) \rightarrow (Z, *)$ は $\underline{H} : (\pi(X \times I), *) \rightarrow (Z, *)$ と一対一に対応する。ただし、 $\pi = \pi_X : X \times I \rightarrow X \times I / * \times I$ とする。 $\pi \circ \epsilon_t : X \rightarrow \pi(X \times I)$, $x \mapsto \pi(x, t)$ にはレトラクションが存在するので、埋め込みである。その像 $\pi(X \times t)$ は $(X^{[t]}$ と略記)、基点が閉であれば $\pi(X \times I)$ の閉部分空間であり、埋め込みは「閉埋め込み」である。 $\epsilon_t : X \rightarrow X \times I$ は $x \mapsto (x, t)$, $t \in I$ で定義される。必要であれば、 $(\pi \circ \epsilon_t)_{X^{[t]}} : X \cong X^{[t]}$ を $\epsilon_{[t]}$ と表記する。
- 2) 基点付コファイブレーション $i : A \rightarrow X$ は、基点付ホモトピー拡張性質によって定義される。基点付ホモトピー拡張性質とは、以下の可換図式にかんし、基点付連続写像 $f : X \rightarrow Z$ と基点付ホモトピー $h : A \times I \rightarrow Z$ からなる余錐 ($f \circ i = h \circ \epsilon_0$) に対し普遍解もどき (唯一性を問題としない普遍解) であるような ($H \circ \epsilon_0 = f$, $H \circ (i \times 1) = h$) 基点付ホモトピー $H : X \times I \rightarrow Z$ が存在することである。この図式を「基点付コファイブレーション i の余錐 f, h に関する HEP*

図式」ということにし、破線の H を「その拡張ホモトピー」ということにする。

$$\begin{array}{ccc}
 (A, *) & \xrightarrow{\epsilon_0} & (A \times I, * \times I) \\
 \downarrow i & & \downarrow i \times 1 \\
 (X, *) & \xrightarrow{\epsilon_0} & (X \times I, * \times I) \\
 & \searrow f & \downarrow h \\
 & & (Y, *) \\
 & \nearrow H & \\
 & & \text{(破線)}
 \end{array}$$

- 3) 1) により、HEP* 図式は、次のようにも表現される。 i が基点付コファイブレーションであることと、 $i^{[0]}$ がそうであることは同じことなので、下右図式のように割り切って考えてよい。

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{\cong} A^{[0]} \xrightarrow{C} \pi_A(A \times I) & & A^{[0]} \xrightarrow{C} \pi_A(A \times I) \\
 \downarrow i & \downarrow i^{[0]} & \downarrow i^{[0]} \\
 X \xrightarrow{\cong} X^{[0]} \xrightarrow{C} \pi(X \times I) & \xrightarrow{h} & X^{[0]} \xrightarrow{C} \pi(X \times I) \\
 & \searrow f & \searrow f \circ \epsilon_{[0]}^{-1} \\
 & & Y \\
 & \nearrow H & \nearrow H \\
 & & \text{(破線)}
 \end{array}$$

約写像柱 $Z(i)$ が錐 $i^{[0]} : A^{[0]} \rightarrow X^{[0]}$, $1_{\pi_A(A \times I)} : A^{[0]} \rightarrow \pi_A(A \times I)$ による以下のプッシュアウト図式によって定義される。このプッシュアウト図式の、余錐 $X^{[0]} \subset \pi(X \times I)$, $i \times 1 : \pi_A(A \times I) \rightarrow \pi(X \times I)$, $\pi_A(a, t) \mapsto \pi(i(a), t)$ に関する普遍解を $s : Z(i) \rightarrow \pi(X \times I)$ とする。

$$\begin{array}{ccc}
 A^{[0]} \xrightarrow{C} \pi_A(A \times I) & & A^{[0]} \xrightarrow{C} \pi_A(A \times I) \\
 \downarrow i^{[0]} & \downarrow & \downarrow i^{[0]} \\
 X^{[0]} \xrightarrow{C} Z(i) & & X^{[0]} \xrightarrow{C} Z(i) \\
 & & \searrow C \\
 & & \pi(X \times I) \\
 & & \nearrow s \\
 & & \text{(破線)}
 \end{array}$$

基点非拘束コファイブレーションの場合と同様に、「 $i : A \rightarrow X$ が基点付コファイブレーションであるための必要十分条件は、 s にレトラクション $r : \pi(X \times I) \rightarrow Z(i)$ が存在することである」が成り立つ。 i が基点付コファイブレーションであれば、上右可換図式において、外側四角を HEP*-図式とし、内側四角の余錐を外側四角の余錐とみて拡張ホモトピー $r : \pi(X \times I) \rightarrow Z(i)$ をとれば、 $1_{Z(i)}, r \circ s$ が内側プッシュアウト図式の普遍余錐に関する普遍解になり、普遍解の一意性により、 $1_{Z(i)} = r \circ s$ となる。逆も、基点非拘束コファイブレーションの場合のルーティンの議論で、成り立つ。

- 4) 定義より、基点付コファイブレーションの結合が基点付コファイブレーションであることはすぐにわかる。

次の命題は、基点付余錐に対し HEP-図式を適用すれば、得られる拡張ホモトピーが自動的に基点付ホモトピーとなることから自明である。

命題 2.1 任意のコファイブレーション $i: A \rightarrow X$ は $* \in A, i(*) = * \in X$ を任意の基点として、基点付コファイブレーションである。

細かい議論も必要になるので、約写像柱の定義を次のように接着対を用いて書いておく。 $i: A \rightarrow X$ により $i^{[0]}: A^{[0]} = \pi_A(A \times 0) \rightarrow X^{[0]} = \pi(X \times 0)$, $\pi_A(a, 0) \mapsto \pi_X(i(a), 0)$ が導かれ、包含写像 $\pi_A(A \times 0) \subset \pi_A(A \times I)$ とあわせて、下左の位相空間の接着対の写像 $i': (\pi_A(A \times I), \pi_A(A \times 0)) \rightarrow (Z, \pi_X(X \times 0))$ を作る。

$$\begin{array}{ccc} A^{[0]} & \xrightarrow{\subset} & \pi_A(A \times I) \\ \downarrow i^{[0]} & & \downarrow i' \\ X^{[0]} & \xrightarrow{\subset} & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\cong} & A^{[0]} & \xrightarrow{\subset} & \pi_A(A \times I) \\ \downarrow i & & \downarrow i^{[0]} & & \downarrow i' \\ X & \xrightarrow{\cong} & X^{[0]} & \xrightarrow{\subset} & Z \end{array}$$

任意の $* \in P \subset X \times I$ について、 $P \cup * \times I$ は π -充満で $\pi(P) = \pi(P \cup * \times I)$ に注意すれば、次のような計算が可能になる。 $\pi_A(A \times I) - \pi_A(A \times 0) = \pi_A(A \times I) - \pi_A(A \times 0 \cup * \times I) = \pi_A((A - *) \times (0, 1])$ である。 $i': \pi_A(A \times I) \rightarrow Z$ は集合の写像としては、

$$i^{[0]} \amalg 1_{\pi_A((A-*) \times (0,1])}: A^{[0]} \amalg \pi_A((A - *) \times (0, 1]) \rightarrow X^{[0]} \amalg \pi_A((A - *) \times (0, 1])$$

と定義される。 Z の位相は $\langle 1_{X^{[0]}}, i' \rangle: X^{[0]} \amalg \pi_A(A \times I) \rightarrow Z$ による等化位相であるが、この写像は集合の写像として、

$$\langle 1_{X^{[0]}}, i^{[0]} \rangle \amalg 1_{\pi_A((A-*) \times (0,1])}: X^{[0]} \amalg A^{[0]} \amalg \pi_A((A - *) \times (0, 1]) \rightarrow X^{[0]} \amalg \pi_A((A - *) \times (0, 1])$$

である。これから直ちにわかることは、任意の $P \subset \pi_A((A - *) \times (0, 1])$ に対して、 $\langle \cdot, \cdot \rangle((X^{[0]} \amalg A^{[0]} \amalg (\pi_A((A - *) \times (0, 1]) - P)) \cap \langle \cdot, \cdot \rangle(P) = (X^{[0]} \amalg (\pi_A((A - *) \times (0, 1]) - P)) \cap (\emptyset \amalg P) = \emptyset$ であり、 $X^{[0]} \amalg A^{[0]} \amalg (\pi_A((A - *) \times (0, 1]) - P)$, P と (P を $\pi_A((A - *) \times (0, 1]) - P$ でとりかえた) $X^{[0]} \amalg A^{[0]} \amalg P$, $\pi_A((A - *) \times (0, 1]) - P$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -充満であることである。 $P = \emptyset$ とすれば、 $X^{[0]} \amalg A^{[0]}, \pi_A((A - *) \times (0, 1])$ も $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -充満である。ここで、 $\langle 1_{X^{[0]}}, i' \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$ と略記している。

命題 2.2 $i: A \rightarrow X$ が基点付コファイブレーションであるなら、埋め込みである。

証明 まず、 i は単射であることを示すのだが、 $i^{[1]}$ がそうであることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\cong} & A^{[0]} & \xrightarrow{\subset} & \pi_A(A \times I) & \xleftarrow{\supset} & A^{[1]} & \xleftarrow{\cong} & A \\ \downarrow i & & \downarrow i^{[0]} & & \downarrow i' & & \searrow i^{[1]} & & \searrow i \\ X & \xrightarrow{\cong} & X^{[0]} & \xrightarrow{\subset} & Z & & & & X \\ & & & & \searrow w & & \swarrow & & \\ & & & & & & \pi_X(X \times I) & \xleftarrow{\supset} & X^{[1]} & \xleftarrow{\cong} & X \end{array}$$

(基点非拘束コファイブレーションの場合と同様に) 上の可換図式が構成され、余錐 $X^{[0]} \subset \pi_X(X \times I)$, $\pi_A(A \times I) \rightarrow \pi_X(X \times I)$ に対するプッシュアウトの普遍解 $w: Z \rightarrow \pi_X(X \times I)$ にはレトラクションが存在することから、 w は埋め込みになる (したがって、単射)。可換図式 $[A^{[1]} \rightarrow \pi_A(A \times I) \rightarrow Z \rightarrow \pi_X(X \times I)] = [A^{[1]} \rightarrow X^{[1]} \subset \pi_X(X \times I)]$ により、 $i'^{A^{[1]}}: A^{[1]} \rightarrow Z$ が単射であれば $i^{[1]}$ は単射になる。

$A^{[0]} \cap A^{[1]} = \pi_A(A \times 0) \cap \pi_A(A \times 1) = \pi_A(A \times 0) \cap \pi_A(A \times 1 \cup * \times I) = \pi_A((A \times 0) \cap (A \times 1 \cup * \times I)) = \pi_A(* \times 0) = *$, $\pi_A((A - *) \times (0, 1]) \cap A^{[1]} = \pi_A((A - *) \times (0, 1]) \cap \pi_A(A \times 1) = \pi_A(((A - *) \times (0, 1]) \cap (A \times 1)) = \pi_A((A - *) \times 1)$ であるから、 $A^{[1]} = * \amalg \pi_A((A - *) \times 1) \subset A^{[0]} \amalg \pi_A((A - *) \times (0, 1]) = \pi_A(A \times I)$ となる。その $i' = i^{[0]} \amalg 1_{\pi_A((A - *) \times (0, 1])}$ による像は $i'(A^{[1]}) = i'(* \amalg \pi_A((A - *) \times 1)) = * \amalg \pi_A((A - *) \times 1) \subset X^{[0]} \amalg \pi_A((A - *) \times (0, 1])$ であるが、集合の写像として $i'^{A^{[1]}} = 1_{X^{[0]}}^* \amalg 1_{\pi_A((A - *) \times (0, 1])}^{\pi_A((A - *) \times 1)}$ であるから、包含写像 $i'^{A^{[1]}} = 1_Z^{A^{[1]}} : A^{[1]} \subset Z$ のようにみえる（直観と一致）。異なっているのは、 $A^{[1]} = * \amalg \pi_A((A - *_{A}) \times 1)$ の $*$ は $* \in A^{[1]} \subset \pi_A(A \times I)$ であり、 $i'(A^{[1]}) = * \times \pi_A((A - *_{A}) \times 1)$ の $*$ は $* \in X^{[1]} \subset \pi_X(X \times I)$ である。この解決は簡単である。商空間を接着空間で定義していたが、接着対の写像 $\pi_A : (A \times I, *_A \times I) \rightarrow (\pi_A(A \times I), *)$, $\pi_X : (X \times I, *_X \times I) \rightarrow (\pi_X(X \times I), *)$ に用いる接着写像 $(*_A \times I \rightarrow *, *_X \times I \rightarrow *)$ の余定義域 $*$ を同一にすればよいだけである。 $\pi_A(A \times I) = * \amalg (A - *_{A}) \times I$, $\pi_X(X \times I) = * \amalg (X - *_{X}) \times I$ であるから、基点は両方とも同一になる（私 (hiray) は、全ての商空間の接着写像の余定義域を同一にすること、を提唱している）。したがって、集合の写像として包含写像

$$i'^{A^{[1]}} = 1_Z^{A^{[1]}} : A^{[1]} \subset Z$$

になる。

埋め込みであることの証明に移る。

Strøm は「基点は閉」と書いていないが、これを仮定すれば $i'^{A^{[1]}} = 1_Z^{A^{[1]}} : A^{[1]} \subset Z$ が位相空間の閉包含写像となるので、書いておく。

[X の基点が閉である場合] i が単射であるから、 A の基点も閉である。

基点が閉ならば、 $A^{[t]} \subset \pi_A(A \times I)$ は閉であり、 $A^{[0]} \cup A^{[1]}$ は閉部分空間の（一点での）貼り合わせである。すなわち、 $A^{[0]} \cup A^{[1]} = A^{[0]} \vee A^{[1]}$ である。

接着対の写像 $(\pi_A(A \times I), A^{[0]}) \rightarrow (Z, X^{[0]})$ を $A^{[0]} \subset \pi_A(A \times \partial I) = A^{[0]} \cup A^{[1]} = A^{[0]} \vee A^{[1]} \subset \pi_A(A \times I)$ で分解し（命題 1.14）、次の可換図式の下の方の二つの横並び四角図式に表現し、接着対の写像 $(A^{[1]}, *) \rightarrow (A^{[0]} \cup A^{[1]}, A^{[0]})$ を張り合わせで表現し（左上四角図式）、左下四角図式と合成したものが、可換図式の全体である。

$$\begin{array}{ccccc}
 * & \xrightarrow{c} & A^{[1]} & & \\
 \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \\
 A^{[0]} & \xrightarrow{c} & A^{[0]} \cup A^{[1]} & \xrightarrow{c} & \pi_A(A \times I) \\
 \downarrow i^{[0]} & & \downarrow & & \downarrow i' \\
 X^{[0]} & \xrightarrow{c} & X^{[0]} \cup i'(A^{[1]}) & \xrightarrow{c} & Z
 \end{array}$$

$A^{[0]}, A^{[0]} \vee A^{[1]}$ は $\pi_A(A \times I)$ の閉集合であるから $X^{[0]}, X^{[0]} \cup i'(A^{[1]})$ は Z の閉集合である（系 1.8）。

命題 1.11 により、可換図式の中の方の二つの縦射の合成 $A^{[1]} \rightarrow X^{[0]} \cup i'(A^{[1]})$ が閉写像になり、その像 $i'(A^{[1]})$ は $A^{[1]}$ に一致する。また $A^{[1]}$ は $X^{[0]} \cup A^{[1]}$ の、したがって Z の閉部分空間である。

集合として $X^{[0]} \cap \pi_A((A - *) \times 1) = \emptyset$, $A^{[1]} = * \amalg \pi_A((A - *) \times 1)$ であったから、 $X^{[0]} \cap A^{[1]} = *$ となり、 $X^{[0]} \cup A^{[1]} = X^{[0]} \vee A^{[1]}$ が成り立つ。

[基点が閉ではないかもしれない場合]

しめすべきことは A とその像 $i'(A^{[1]}) = \langle \cdot, \cdot \rangle(A^{[1]})$ が同相であること、すなわち、任意の閉集合 $F \subset A$ にたいし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle(A^{[1]}) \cap C = \langle \cdot, \cdot \rangle(\pi_A(F \times 1))$ となるような閉集合 $C \subset Z$ が存在することである。

$F \subset A$ は任意の閉集合とする。

$* \notin F$ であるとき : $F \times 1 \cap * \times I = \emptyset$ により $F \times 1$ は $A \times I$ の π_A に関する充満閉集合であることから、 $\pi_A(F \times 1)$ は $\pi_A(A \times I)$ の閉集合である。さらに、 $\pi_A(F \times 1) \subset \pi_A((A - *) \times (0, 1])$ により $\emptyset \amalg \pi_A(F \times 1)$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -充満 (閉) 部分集合である。よって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle(\pi_A(F \times 1))$ は Z の閉集合であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle(\pi_A(A \times 1))$ の閉集合である。

$* \in F$ であるとき : $* \times I \subset F \times I$ により $F \times I$ は $A \times I$ の π_A -充満閉集合であるから、 $\pi_A(F \times I)$ は $\pi_A(A \times I)$ の閉集合である。この閉集合は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -充満ではないかもしれないが、 $(X^{[0]} \amalg A^{[0]}) \cup \pi_A(F \times I) \subset X^{[0]} \amalg \pi_A(A \times I)$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -充満閉集合である。なぜなら、 $\pi_A(F \times I) = (\pi_A(F \times I) \cap \pi_A(A \times 0)) \amalg (\pi_A(F \times I) \cap (\pi_A((A - *) \times (0, 1]))) = \pi_A(F \times 0) \amalg \pi_A((F - *) \times (0, 1])$ であるから、 $(X^{[0]} \amalg A^{[0]}) \cup \pi_A(F \times I) = X^{[0]} \amalg A^{[0]} \amalg \pi_A((F - *) \times (0, 1])$ が (先程の検討により ($P = \pi_A((F - *) \times (0, 1])$)) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -充満であるからである。 $C = \langle \cdot, \cdot \rangle((X^{[0]} \amalg A^{[0]}) \cup \pi_A(F \times I)) = \langle \cdot, \cdot \rangle(X^{[0]} \amalg A^{[0]} \amalg \pi_A((F - *) \times (0, 1])) = X^{[0]} \amalg \pi_A((F - *) \times (0, 1])$ は求める閉集合である ($C \cap \langle \cdot, \cdot \rangle(A^{[1]}) = \langle \cdot, \cdot \rangle(\pi_A(F \times 1))$)。

以上により、 $A \cong \pi_A(A \times 1) \rightarrow Z$ は埋め込みで、埋め込み $w : Z \rightarrow \pi_X(X \times I)$ との合成も埋め込みである。上の可換図式 (の右半分) により、 $i : A \rightarrow X$ も埋め込みである。 \square

註 Strøm が「基点は閉」と書いていないので、それに従った。

3 基点付 Puppe の補題

位相空間対 (X, A) にかんしてつぎの左可換図式、基点付位相空間対 $(X, A, *)$ にかんして右可換図式を考える。左図式は集合としてのプッシュアウト図式であり、右もそうである。なぜなら $\pi(Z) = \pi(X \times 0 \cup A \times I) = \pi(X \times 0) \cup \pi(A \times I)$ であり、 $A \times I$ が π に関し充満であることにより $\pi(X \times 0) \cap \pi(A \times I) = \pi(X \times 0 \cap A \times I) = \pi(A \times 0)$ となるからである。ただし、 $\pi = \pi_X : X \times I \rightarrow X \times I / * \times I$ である。

$$\begin{array}{ccc} A \cong A \times 0 & \xrightarrow{\subset} & A \times I \\ \downarrow \subset & & \downarrow \subset \\ X \cong X \times 0 & \xrightarrow{\subset} & Z = X \times 0 \cup A \times I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \cong \pi(A \times 0) & \xrightarrow{\subset} & \pi(A \times I) \\ \downarrow \subset & & \downarrow \subset \\ X \cong \pi(X \times 0) & \xrightarrow{\subset} & \pi(Z) \end{array}$$

Puppe の補題とは「 $1_{X \times I}^Z : Z \subset X \times I$ がレトラクトなら、上の左可換図式が (位相空間としての) プッシュアウトである (i.e. Z は 1_X^A の写像柱である)」をいう。証明は以下の二つの補題 (hiray [4] Puppe の補題, 補題 1.1 と 2.1 の再録) による。基点付 Puppe の補題とは、右可換図式についての同様の主張をいう。基点付でない場合と同じ補題を用いて証明しようとする、 $\pi(X \times 0)$ は $\pi(Z)$ の閉部分空間」が成り立たず「基点が閉」という条件を付けなければならない。すなわち、「基点が閉 ($* \in X$ が閉) で $1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} : \pi(Z) \subset \pi(X \times I)$ がレトラクトなら、上の右可換図式はプッシュアウトである (i.e. $\pi(Z)$ は 1_X^A の約写像柱である)」が基点付 Puppe の補題である。

補題 3.1 $Z = F \cup B$ で F は Z の閉集合とする。 C は、 $F \cap C$ が F の (したがって Z の) 閉集合でありかつ $B \cap C$ が B の閉集合であるような Z の部分集合とする。このとき、

$$\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - B_0)\}$$

がなりたつ。ただし、 $C_+ = C - F, B_0 = F \cap B$ とする。

証明 分割 $Z = F \amalg (B - F)$ にしたがって、 $C = (C \cap F) \cup (C - F) = (C \cap F) \cup C_+$ として計算する。 $\mathbf{Cl}C = C \cup \mathbf{Cl}C = C \cup \mathbf{Cl}(C \cap F) \cup \mathbf{Cl}C_+ = C \cup \mathbf{Cl}C_+$ ($F \cap C$ が F の (したがって Z の) 閉集合である) から最後の等号がなりたつ。

分割 $Z = (F - B) \amalg B$ により、 $\mathbf{Cl}C_+ = \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - B)\} \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap B\}$ であるが、「 $B \cap C$ が B の閉集合」であるから $\mathbf{Cl}C_+ \cap B = \mathbf{Cl}_B C_+ \subset \mathbf{Cl}_B (C \cap B) = C \cap B \subset C$ となり、 $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - B)\} = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - B_0)\}$ がえられる。 \square

補題 3.2 補題 3.1 と同じ条件に加えて、 $F - \mathbf{Cl}B_0$ が Z の開集合であるとする。

(1) $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)\}$ がなりたつ。

(2) 任意の $x \in \mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)$ にたいして、部分集合 W_x が存在して $x \in \mathbf{Cl}W_x, W_x \subset \mathbf{Cl}C_+ \cap B_0$ がなりたてば、 $\mathbf{Cl}C = C$ 、すなわち Z は F と B の貼り合わせである。

証明 (1) $B_0 \subset \mathbf{Cl}B_0 \subset F$ により分割 $F - B_0 = (F - \mathbf{Cl}B_0) \amalg (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)$ がえられ、

$$\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - \mathbf{Cl}B_0)\} \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)\}$$

となる。 $C_+ \cap (F - \mathbf{Cl}B_0) \subset (C - F) \cap F = \emptyset$ と $F - \mathbf{Cl}B_0$ が開集合であることから $\mathbf{Cl}C_+ \cap (F - \mathbf{Cl}B_0) = \emptyset$ である。よって、 $\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)\}$ である。

(2) $\mathbf{Cl}C_+ \cap B \subset C$ であった (補題 3.1 の証明、下から 2 行目)。両辺に $\cap F$ をほどこせば、 $\mathbf{Cl}C_+ \cap B_0 \subset C_0$ で $C_0 = F \cap C$ は閉である。

任意に $x \in \mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0)$ をとる。 $W_x \subset \mathbf{Cl}C_+ \cap B_0 \subset C_0$ より、 $x \in \mathbf{Cl}W_x \subset C_0$ である。したがって、 $\mathbf{Cl}C_+ \cap (\mathbf{Cl}B_0 - B_0) \subset C_0 \subset C$ である。(1) により、 $\mathbf{Cl}C = C$ となる。 \square

註 任意の $D \subset F \subset Z$ について、 $\mathbf{Cl}D \subset \mathbf{Cl}F = F$ により $\mathbf{Cl}D = \mathbf{Cl}D \cap F = \mathbf{Cl}_F D$ である、とくに $\mathbf{Cl}B_0 = \mathbf{Cl}_F B_0$ である (あたりまえ)。

補題 3.3 $f : X \rightarrow Y$ は閉写像で $A \subset X$ は f -充満とする。このとき、 $f_{f(A)}^A : A \rightarrow f(A)$ は閉全射である。

証明 $C \subset A$ は A の閉集合とする。 $C = F \cap A$ であるような X の閉集合 F が存在し、 A が充満であるから $f_{f(A)}^A(C) = f(C) = f(F \cap A) = f(F) \cap f(A)$ がなりたち、 $f_{f(A)}^A(C)$ は $f(A)$ の閉集合である。 \square

命題 3.4 $(X, A, *)$ は、基点が閉であるような基点付位相空間対とする。 Z の任意の閉部分空間 F について、 $\pi(F)$ は $\pi(Z)$ の閉集合である。したがって、 $\pi(X \times 0), \pi(A \times t) (t \in (0, t])$ は $\pi(Z)$ の閉集合である。

証明 $* \times I \subset Z = X \times 0 \cup A \times I$ であるから、補題 3.3 により、 $\pi_{\pi(Z)}^Z : Z \rightarrow \pi(Z)$ は閉写像である。
 $X \times 0, A \times t (t \in (0, 1])$ は $Z = X \times 0 \cup A \times I$ の閉集合で、結論がえられる。 \square

あとで必要になるので、 $\pi(x, 0) \in \pi(X \times 0) \subset \pi(Z)$ の基本近傍を調べておく。

補題 3.5 $\pi(x, 0) \in O$ であるような $\pi(Z)$ の任意の開集合 O に関して、次がなりたつ。

- (1) $x = *$ ならば、 $* \in U$ であるような X の開集合 U が存在して、 $\pi(U \times I) \cap \pi(Z) \subset O$ となる。
- (2) $x \neq *$ ならば、 $* \notin U \wedge x \in U$ であるような X の開集合 U と正数 ε が存在して、 $\pi(U \times [0, \varepsilon)) \cap \pi(Z) \subset O$ となる。

略証 (1) $\pi(X \times I)$ の開集合 G で $O = G \cap \pi(Z)$ であるようなものが存在する。チュウブ補題により $* \times I \subset U \times I \subset \pi^{-1}G$ であるような X の開集合 U が存在する。 $\pi(U \times I) \subset G$ であるから $\pi(U \times I) \cap \pi(Z) \subset G \cap \pi(Z) = O$ となる。

(2) (1) と同様に、 $\pi(X \times I)$ の開集合 G で $O = G \cap \pi(Z)$ であるようなものが存在する。 $(x, 0) \in \pi^{-1}G$ であるから開集合 $U \subset X$ 正数 ε が存在して、 $U \times [0, \varepsilon) \subset \pi^{-1}G$ となるものが存在するが、加えて $* \notin U$ を満たすように小さく取り替えておく。この取り換えにより $U \times I$ は π -充満開集合で、 $\pi(U \times I)$ は $\pi(X \times I)$ の開集合になり、 $\pi(U \times I) \subset G$ となる。ゆえに、 $\pi(U \times I) \cap \pi(Z) \subset G \cap \pi(Z) = O$ である。 \square

基点付 Puppe の補題の証明

- 1) 補題 3.1 の条件が次のように充たされている。 $\pi(Z) = \pi(X \times 0) \cup \pi(A \times I)$ で $\pi(X \times 0)$ は $\pi(Z)$ の閉集合である。 $C \cap \pi(X \times 0)$ が $\pi(X \times 0)$ の (したがって $\pi(X \times I)$ の) 閉集合であり、 $C \cap \pi(A \times I)$ が $\pi(A \times I)$ の閉集合であるような $C \subset \pi(Z)$ については、 $\pi(X \times 0) \cap \pi(A \times I) = \pi(X \times 0 \cap A \times I) = \pi(A \times 0)$ であるから、補題 3.1 により、

$$\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\pi(X \times 0) - \pi(A \times 0))\}$$

となる。

- 2) 補題 3.2 の条件「 $\pi(X \times 0) - \mathbf{Cl}\pi(A \times 0)$ は $\pi(Z)$ の開集合」がなりたつ。 証明 命題 3.3 により $\pi = \pi_{\pi(Z)}^Z : Z \rightarrow \pi(Z)$ は閉写像であるから $\mathbf{Cl}\pi(A \times 0) = \pi(\mathbf{Cl}_Z(A \times 0)) = \pi(\mathbf{Cl}_X A \times 0)$ である (2 番目の等号は、補題 3.2 の後の註を参照)。よって、 $\pi(X \times 0) - \mathbf{Cl}\pi(A \times 0) = \pi(X \times 0) - \pi(\mathbf{Cl}_X A \times 0) = \pi(X \times 0) - \pi(\mathbf{Cl}_X A \times 0 \cup * \times I) = \pi(X \times 0 - \mathbf{Cl}_X A \times 0 - * \times I) = \pi(X \times 0 - \mathbf{Cl}_X A \times 0) = \pi((X - \mathbf{Cl}_X A) \times 0)$ となるが、 $(X - \mathbf{Cl}_X A) \times 0 = (X - \mathbf{Cl}_X A) \times I \cap Z$ でこれは Z の充満な開集合である ($(X - \mathbf{Cl}_X A) \times 0 \cap * \times I = \emptyset$ により充満)。したがって、 $\pi(X \times 0) - \mathbf{Cl}\pi(A \times 0) = \pi((X - \mathbf{Cl}_X A) \times 0)$ は $\pi(Z)$ の開集合である。

- 3) 命題 3.2 (1) により、

$$\mathbf{Cl}C = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap (\pi(\mathbf{Cl}_X A \times 0) - \pi(A \times 0))\} = C \cup \{\mathbf{Cl}C_+ \cap \pi(\mathbf{Cl}_X A - A) \times 0\}$$

がえられる。

- 4) ‘射影’ $P : \pi(X \times I) \rightarrow \pi(X \times 0)$ を $\pi(x, t) \mapsto \pi(x, 0)$ で定義する。 $\pi(Z) \subset \pi(X \times I)$ のレトラクションを $r : \pi(X \times I) \rightarrow \pi(Z)$ とし、 $R = P \circ 1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} \circ r : \pi(X \times I) \rightarrow \pi(X \times 0)$ とする。 $\pi(p, 0) \in \mathbf{Cl}C_+ \cap \pi((\mathbf{Cl}_X A - A) \times 0)$ であるような $p \in \mathbf{Cl}_X A - A$ にたいし、道 $w_p : I \rightarrow \pi(X \times 0)$ を $t \mapsto P(r(\pi(p, t))) = R(\pi(p, t))$ で定義し、 $W_p = w_p((0, 1])$ とおく。

- 5) $W_p \subset \pi(A \times 0)$ がなりたつ。なぜなら、 $t \in (0, 1]$ にたいし $A \times t (= (X \times t) \cap Z)$ は Z の閉集合で $\pi : Z \rightarrow \pi(Z)$ は閉写像であったから $\pi(A \times t)$ は $\pi(Z)$ の閉集合である。 $r(\pi(p, t)) \in r \circ \pi(\mathbf{Cl}_X A \times t) = r \circ \pi(\mathbf{Cl}_{X \times I}(A \times t)) = \mathbf{Cl} r(\pi(A \times t)) = \mathbf{Cl} \pi(A \times t) = \pi(A \times t)$ により、 $w_p(t) = P(r(\pi(p, t))) \in P(\pi(A \times t)) \subset \pi(A \times 0)$ となるから。
- 6) $\pi(p, 0) = w_p(0) \in w_p(\mathbf{Cl}_I(0, 1]) \subset \mathbf{Cl}_{\pi(X \times 0)} W_p = \mathbf{Cl} W_p$ である。
- 7) $W_p \subset \mathbf{Cl} C_+$ がなりたつ。証明 その否定は、 $w_p(t_+) = R(\pi(p, t_+)) \notin \mathbf{Cl} C_+$ であるような $t_+ \in (0, 1]$ が存在することである。すなわち、 $w_p(t_+) \in O \subset \pi(Z)$ かつ $O \cap C_+ = \emptyset$ であるような t_+ と開集合 $O \subset \pi(Z)$ が存在する (O は $w_p(t_+)$ の基本近傍に取り換えてよい (補題 3.5))。1) $w_p(t_+) = *$ のばあい $t_+ \in (0, 1], * \in U$ であるような t_+ と X の開集合 U で $\pi(U \times I) \cap \pi(Z) \cap C_+ = \emptyset$ となるものが存在する ($U \times I$ は π -充満)。ところで、 $C_+ \subset \pi((A - *) \times (0, 1])$ であった ($C_+ \subset \pi(A \times I) - \pi(X \times 0) = \pi(A \times I - X \times 0 - * \times I)$) から、 $\pi(U \times I) \cap \pi(Z) \cap C_+ \cap \pi((A - *) \times (0, 1]) = \pi((U \cap A - *) \times (0, 1]) \cap \pi(Z) \cap C_+$ となり、

$$\pi((U \cap A - *) \times (0, 1]) \cap \pi(Z) \cap C_+ = \emptyset$$

となる。いま、 $P \circ r \circ \pi(-, t_+) : X \rightarrow \pi(X \times 0)$ の $x = p \neq *$ における連続性により、 $P(r(\pi(U_0 \times t_+))) \subset \pi(U \times 0) \wedge p \in U_0 \wedge * \notin U_0$ である X の開集合 U_0 が存在する ($U_0 \times I$ は π -充満)。すると、 $P(r(\pi((U_0 \cap A) \times t_+))) = P(\pi((U_0 \cap A) \times t_+)) = \pi((U_0 \cap A) \times 0) \subset \pi(U \times 0)$ すなわち、

$$U_0 \cap A \subset U \cap A$$

となる。さて、 $\pi(p, 0) \in \mathbf{Cl} C_+$ であるからその近傍 $\pi(U_0 \times I) \cap \pi(Z)$ は C_+ と交わらなければならない。さきほどと同じ変形により、 $\emptyset \neq \pi(U_0 \times I) \cap \pi(Z) \cap C_+ = \pi(U_0 \times I) \cap \pi(Z) \cap C_+ \cap \pi((A - *) \times (0, 1]) = \pi((U_0 \cap A) \times (0, 1]) \cap \pi(Z) \cap C_+ \subset \pi((U \cap A - *) \times (0, 1]) \cap \pi(Z) \cap C_+$ となり、

$$\pi((U \cap A - *) \times (0, 1]) \cap \pi(Z) \cap C_+ \neq \emptyset$$

であるから、矛盾が生じている。ii) $w_p(t_+) \neq *$ のばあい $t_+ \in (0, 1], w_p(t_+) \in U$ であるような t_+ と X の開集合 $* \notin U$ と正数 ε で $\pi(U \times [0, \varepsilon)) \cap \pi(Z) \cap C_+ = \emptyset$ となるものが存在するが、あとは i) の場合と同様であるから省略する。

- 8) 補題 3.2 (2) の W_p に関する条件 5), 6), 7) がなりたち、 $\mathbf{Cl} C = C$ が結論付けられた。

命題 3.6 $(X, A, *)$ は、基点が閉である基点付位相空間対であるとする。 (X, A) が基点付コファイバード対であるための必要十分条件は、 $\pi(Z) \subset \pi(X \times I)$ がレトラクトであることである。

証明 [必要条件] (X, A) が基点付コファイバード対であるとする。つぎの HEP* 図式の拡張ホモトピー $r : \pi(X \times I) \rightarrow \pi(Z)$ については、 $r^{X^{[0]}} = 1_{\pi(Z)}^{X^{[0]}}$, $r^{\pi(A \times I)} = 1_{\pi(Z)}^{\pi(A \times I)}$ が成り立つから、 $r^{X^{[0]} \cup \pi(A \times I)} = r^{\pi(Z)} = 1_{\pi(Z)}$ となる。よって、 $\pi(Z)$ は $\pi(X \times I)$ のレトラクトである。

$$\begin{array}{ccc}
A^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(A \times I) \\
c \downarrow & & c \downarrow \\
X^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(X \times I) \\
& & \searrow c \\
& & \pi(Z)
\end{array}$$

[十分条件] 包含写像 $1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} : \pi(Z) \subset \pi(X \times I)$ にレトラクション $r : \pi(X \times I) \rightarrow \pi(Z)$ が存在するものとする。基点付 Puppe の補題により、 $\pi(Z) = X^{[0]} \cup \pi(A \times I)$ は張り合わせで下左可換図式はプッシュアウト図式である。下中の HEP* 図式の余錐 $f \circ \epsilon_{[0]}^{-1} : X^{[0]} \rightarrow W$, $h : \pi(A \times I) \rightarrow W$ を左プッシュアウト図式の余錐として、普遍解 $w : \pi(Z) \rightarrow W$ がえられる (下右可換図式)。

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc} A^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(A \times I) \\ c \downarrow & & c \downarrow \\ X^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(Z) \end{array} & & \begin{array}{ccc} A^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(A \times I) \\ c \downarrow & & c \downarrow \\ X^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(X \times I) \\ & & \searrow h \\ & & W \end{array} \\
& & \searrow f \circ \epsilon_{[0]}^{-1} \\
& & W
\end{array}$$

$w \circ r : \pi(X \times I) \rightarrow W$ は上中 HEP* 図式の拡張ホモトピーになる。なぜなら、

$$\begin{aligned}
(w \circ r) \circ 1_{\pi(X \times I)}^{X^{[0]}} &= (w \circ r) \circ (1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} \circ 1_{\pi(Z)}^{X^{[0]}}) = w \circ (r \circ (1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} \circ 1_{\pi(Z)}^{X^{[0]}})) = w \circ 1_{\pi(Z)}^{X^{[0]}} = f \circ \epsilon_{[0]}^{-1}, \\
(w \circ r) \circ 1_{\pi(X \times I)}^{A \times I} &= (w \circ r) \circ (1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} \circ 1_{\pi(Z)}^{A \times I}) = w \circ (r \circ (1_{\pi(X \times I)}^{\pi(Z)} \circ 1_{\pi(Z)}^{A \times I})) = w \circ 1_{\pi(Z)}^{A \times I} = h
\end{aligned}$$

であるから。よって、 (X, A) は基点付コファイバード対である。 \square

次の命題は hiray [3] の、基点非拘束版の書き直しである。Ström [10] には、この命題は言及されていない。

命題 3.7 基点付コファイブレーションの、基点付写像による余基底変換は、基点付コファイブレーションである。

証明 (1) (X, A) を基点付コファイバード対とし、基点保存連続写像 $h; A \rightarrow B$ による余基底変換として、接着対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を構成する。 (Y, B) は h による (X, A) の余基底変換である。

(2) このように定義すれば、これから導かれる $\underline{f \times 1} : (\pi(X \times I), \pi(A \times I)) \rightarrow (\pi_Y(Y \times I), \pi_Y(B \times I))$ は接着対の写像になる。

集合のレベルで相対恒等写像であることを示せばよい。くだらないことから書いてみる。 $\pi(X \times I) = * \amalg ((X - *) \times I)$ と同値関係を用いず定義した。 $* \in A$ により $A \times I$ は π -充満であるから、 $\pi(X \times I) = \pi(A \times I) \amalg (\pi(X \times I) - \pi(A \times I)) = \pi(A \times I) \amalg \pi((X - A) \times I) = \pi(A \times I) \amalg ((X - A) \times I)$ である。同様に、 $\pi_Y(Y \times I) = \pi(B \times I) \amalg ((Y - B) \times I)$ である。ところで、 $Y = B \amalg (X - A)$ であり、 $f = h \amalg 1_{X-A}$ であるから、 $\pi_Y(Y \times I) = \pi(B \times I) \amalg ((X - A) \times I)$ で $\underline{f \times 1}_I = \underline{h \times 1} \amalg 1_{(X-A) \times I} : \pi(A \times I) \amalg ((X - A) \times I) \rightarrow \pi_Y(B \times I) \amalg ((X - A) \times I)$ となる。

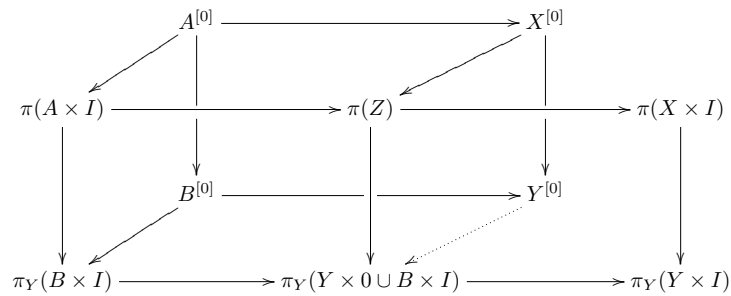
(3) これを、命題 1.14 を用いて、 $\pi(A \times I) \subset \pi(Z) \subset \pi(X \times I)$ によって二つの余デカルト的対の写像 $\underline{f \times 1}_{\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)}^{\pi(Z)} : (\pi(Z), \pi(A \times I)) \rightarrow (\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I), \pi_Y(B \times I))$, $\underline{f \times 1} : (\pi(X \times I), \pi(Z)) \rightarrow$

$(\pi_Y(Y \times I), \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I))$ に分解する。

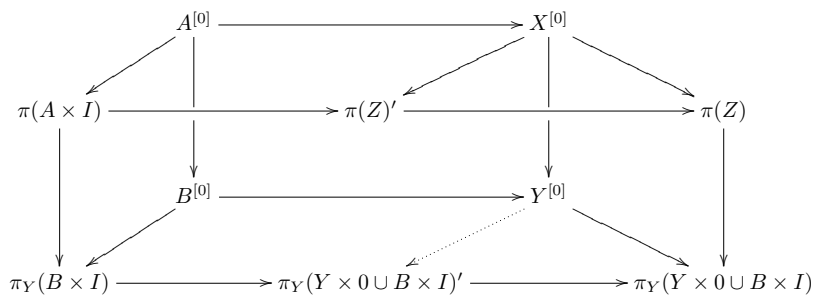
(4) [ここで $* \in X, * \in Y$ は閉であることを仮定する] (X, A) は基点付コファイバード対であるから、命題 3.6 によってレトラクション $r : \pi(X \times I) \rightarrow \pi(Z), r^{\pi(Z)} = 1_{\pi(Z)}$ が存在する。(3) の後者の余デカルト的対の写像をプッシュアウト図式に直し、余錐 $1_{\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)} : \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I) \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I), \underline{f \times 1_{\pi(Z)}}_{\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)} \circ r : \pi(X \times I) \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)$ に対する普遍解 $R : \pi_Y(Y \times I) \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)$ が定まる。 $R^{\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)} = 1_{\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)}$ であるから 命題 3.6 により、 (Y, B) は基点付コファイバード対である。[これで、基点が閉の場合の証明終り (もちろん hiray [3] に書いた通り Puppe の補題をもちいずとも証明可能 (省略))]

[基点が閉を仮定しない場合]

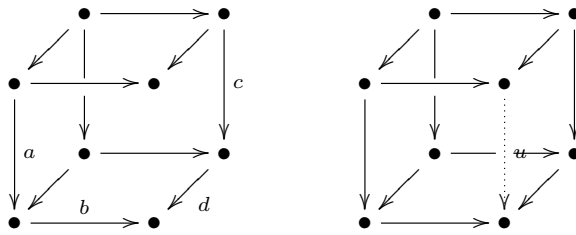
(5)



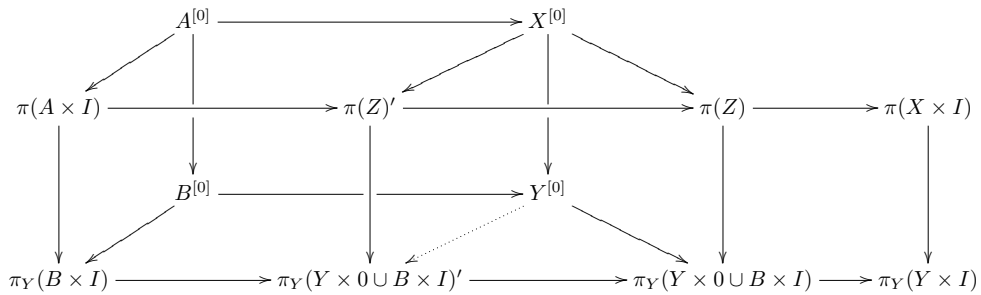
上の可換図式の前面は、(3) の分解であり、自然な包含写像による部分空間の可換図式を添加したものである。(3) により、左右前面の四角図式は両方ともプッシュアウトであり、左後面は余基底変換に同相であるからやはりプッシュアウトである。左上面は基点が閉でないので、Puppe の補題が使えず、プッシュアウトではないかもしれないが、ただ集合の可換図式としてみれば、プッシュアウトである。ということは、 $\langle 1_{\pi(A \times I)}, 1_{\pi(Z)}^{X^{[0]}} \rangle : \pi(A \times I) \amalg X^{[0]} \rightarrow \pi(Z)$ が等化写像になるように位相を強く取り替えれば ($\pi(Z)'$ と表記しておく) 左上面はプッシュアウトになり、 $\pi(Z)'$ は 1_X^A の約写像柱と見なすことができる。左底面も同様に $\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)$ の位相を取り換えて $\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)'$ としておく。以下の可換図式がえられるが、 $\pi(Z)' \rightarrow \pi(Z), \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)' \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)$ は集合の写像としては恒等写像であることに注意。



以下の立方体型の可換図式が与えられているとする (圏は何でもよい)。上面の四角図式がプッシュアウトであるとする。このとき、 $b \circ a, d \circ c$ をプッシュアウト図式の余錐と考えれば、(右図式において) 前面と右側面が可換になるような普遍解が〈唯一つ〉存在する。



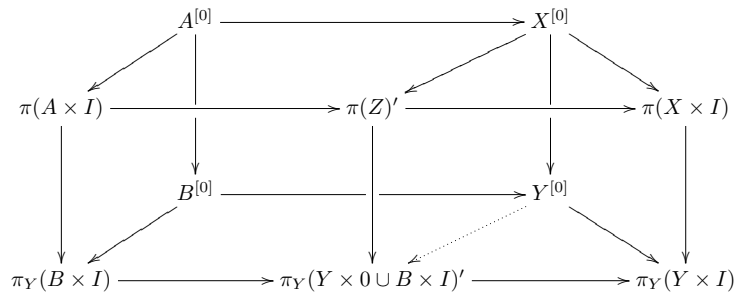
これを上の位相空間の可換図式に適用すれば、普遍解 $\pi(Z)' \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)'$ が存在して、次の図式の左立方体が可換図式になる。



ここで、この可換図式を〈集合の〉可換図式と考えれば、左立方体と中プリズム型のプリズム型の部分（の上下水平射が恒等写像であることから）が縮退してひとつの立方体となり、縦射 $\pi(Z)' = \pi(Z) \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)' = \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)$ が二つ生じた可換図式となる。立方体の天井四角図式は、集合のプッシュアウトであるから、普遍解の一意性により、このふたつの縦射は（集合の写像として一致するので）連続写像としても一致しなければならない。よって、プリズム型の部分も可換図式となる。

また、左の立体図式において後面はプッシュアウト図式であったが、上面と底面もプッシュアウトになるように位相を取り換えたのであった。したがって、前面もプッシュアウトになる。なぜなら、後面と底面はプッシュアウトであるから「後面と底面の合成四角」がプッシュアウトなる。つぎに、「後面と底面の合成四角」は「上面と前面の合成四角」と（図式の可換性により）一致することから、「上面と前面の合成四角」もプッシュアウトである。ゆえに、上面と「上面と前面の合成四角」がプッシュアウトであることから、前面もプッシュアウトであることになる。

さらに、前面の二つの左中四角図式は、前面左四角と「左と中の合成四角」がプッシュアウトであるから中四角図式もプッシュアウトである。ゆえに前面中と右四角の合成もプッシュアウトになる。つぎの、可換図式が得られた。この可換図式の前面右四角が、今得られたプッシュアウトであることに注意。



この可換図式の上面全体は、セクション 2 定義と基本性質 3) で述べた、「 $i : A \rightarrow X$ が基点付コファイブレーションであるための必要十分条件は、 s にレトラクション $r : \pi(X \times I) \rightarrow Z(i)$ が存在することである」の解説に書いた以下の左可換図式と同一である（ただし i を $1_X^A : A \subset X$ に、 $Z(i)$ を $\pi(Z)'$

に直している)。下面全体は同様に、下右図式と同一である。

$$\begin{array}{ccc}
 A^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(A \times I) \\
 c \downarrow & & c \downarrow \\
 X^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(Z)' \\
 & \searrow c & \nearrow c \\
 & & \pi(X \times I)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi(B \times I) \\
 c \downarrow & & c \downarrow \\
 Y^{[0]} & \xrightarrow{c} & \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)' \\
 & \searrow c & \nearrow c \\
 & & \pi_Y(Y \times I)
 \end{array}$$

(X, A) はコファイバード対であるから $s : \pi(Z)' \rightarrow \pi(X \times I)$ にレトラクションが存在する。この証明の (3) に書いたように、上の上の可換図式の前面右四角がプッシュアウトであるから $\pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)' \rightarrow \pi_Y(Y \times I)$ にレトラクションが存在する。したがって、余基底変換 (Y, B) は基点付コファイバード対である。 \square

註 上の可換図式の約写像柱を定義するプッシュアウト図式が、すべて包含写像になっているのは、おかしなことではない (系 1.7)。

もう一つ書いておくことは、二つの上可換図式の普遍解 (前々々可換図式の $\pi(Z)' \rightarrow \pi(Z) \subset \pi(X \times I), \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)' \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I) \subset \pi_Y(Y \times I)$) にはレトラクションが存在するから埋め込みである。そうなると、 $\pi(Z)' \rightarrow \pi(Z), \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)' \rightarrow \pi_Y(Y \times 0 \cup B \times I)$ は集合の写像として恒等写像であったから、位相空間としても恒等写像でなければならない。長い迂回を経て、結局は (3), (4) と同じことになったわけである。「基点が閉」という仮定ひとつで、迂回の必要がなくなる。

参考文献

- [1] Brown, R., Topology, EllisHorwood, 1988
- [2] hiray, プッシュアウトについて, www.eonet.ne.jp/~hymath/
- [3] hiray, プッシュアウトについて (実践編), www.eonet.ne.jp/~hymath/
- [4] hiray, Puppe の補題, www.eonet.ne.jp/~hymath/
- [5] May, J. P., Ponto, K., More Concise algebraic Topology, The university of Chicago Press, 2012
- [6] 西田吾郎, ホモトピー論, 共立, 1985
- [7] Puppe, D., Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. 18(1967)
- [8] Schubert, H., Categories, Springer, 1972
- [9] Strøm, A., Note on cibrations II, Math. Scand. 22(1968)
- [10] Strøm, A., The homotopy category is a homotopy category, Arch. Math., 1972
- [11] tom Dieck, T., Algebraic topology, Ems, 2008
- [12] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978