コンヴィニエントな位相空間の圏について (joint work with 小田信行)

平嶋康昌

2018 年度ホモトピー論シンポジウム
東京工業大学

1. Convenient category

- コンヴィニエント圏とは、位相空間の圏で、小完備、余完備なデカルト的閉圏のことである。

- 「ここでは、(弱ハウスドルフ)コンパクト生成空間の圏 $\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ の上位互換であるようなコンヴィニエント圏 $\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ を構成する」という前宣伝は間違いであることがわかった(10月4日)。
正しくは「$\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$」である。

Theorem 1 X がコンパクト生成空間である必要十分条件は、X が弱ハウスドルフ空間で、BBT-積に関する対角写像 $\Delta_{\mathcal{C}_2} : X \to X \times_{\mathcal{C}_2} X$, $x \mapsto (x, x)$ が連続であることである。

2.

- 次の三つの条件を満たすクラス $\mathcal{D}$ を考察する。 $\mathcal{C}_2$ はコンパクトハウスドルフ空間全体のクラス、$\mathcal{WH}$ は弱ハウスドルフ空間の圏とする。

  条件 A $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{WH}$.

  条件 B $f : D \to W$ は等化写像とする。$D \in \mathcal{D}$ かつ $W \in \mathcal{WH}$ ならば $W \in \mathcal{D}$ がなりたつ。

  条件 C 任意の $\lambda \in \Lambda$ に関し $D_\lambda \in \mathcal{D}$ であるならば $D = \coprod_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda \in \mathcal{D}$ である。

- これらの条件を満たす $\mathcal{D}$ の例：

$$\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}, \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2) \cap \mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2), \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2), \mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2)$$

memo: 位相的、classes は充満部分圏と同一視

Proposition 2 条件 A をみたす $\mathcal{D}$ が、位相的かつ $\mathcal{WH}$ の余反照的充満部分圏であるための（必要）十分条件は、$\mathcal{D}$ が条件 B、 C をみたすことである。

$\mathcal{D}$ が条件 B、 C をみたせば、$\mathcal{D} = \mathcal{WHK}_{\mathcal{D}}$ （後述）となり、$\mathcal{D}$ は位相的かつ余反照的充満部分圏である（後述）ことがわかる。

Corollary 3 コンパクト生成空間の圏 $\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ は、条件 A をみたす $\mathcal{WH}$ の位相的かつ余反照的充満部分圏のうち一番小さい圏である。

条件 A により、$\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{WHK}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ となるからである。したがって特に、

$$\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$$

である。

memo: Kennison 1965, Vogt

4. 終位相（と始位相）

$\mathcal{A} = \{a : A \to X\}$ ：位相空間 X を的とする連続写像のクラスとする。

- $O \subset X$ が $\mathcal{A}$-開： $\forall a \in \mathcal{A}\,(\,a^{-1}(O)$ が A の開集合$\,)$
- $\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{A}$ の解集合（a solution set）である：

$$\forall a \in \mathcal{A}\ \exists s \in \mathcal{S}\ \exists b\,(\,a = s \circ b,\ b \text{ は連続写像})$$

Proposition 4 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{A}$ の解集合とする。次がなりたつ。

$$O \text{ が } \mathcal{A}\text{-開} \Leftrightarrow O \text{ が } \mathcal{S}\text{-開}\ (\,\Leftrightarrow O \in \mathcal{O}_{\mathcal{S}}\,)$$

- $\Rightarrow$ は自明。逆は、$\exists s, b\,(\,a^{-1}O = b^{-1}s^{-1}O\,)$ による。 □

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & X \\ S \arrow[ur, "s"] \arrow[r, dotted] & (X, \mathcal{O}_S) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$a = 1_X^{(X,\mathcal{O}_S)} \circ a_{(X,\mathcal{O}_S)} : A \to (X, \mathcal{O}_S) \to X$$

「位相 $\mathcal{O}$ は $\forall a \in \mathcal{A}$ を連続にする」$\Rightarrow$ 「$O \in \mathcal{O} \Rightarrow O$ は $\mathcal{A}$-開」$\Rightarrow$ 「$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$」により、

$$\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \text{ は、すべての } a \in \mathcal{A} \text{ を連続にする一番強い位相である}$$

5. 終位相 2 (Prop. 2)

平嶋康昌

例 1 $\mathcal{D}_X = \{ f \in M\mathcal{WH} \mid Sf \in \mathcal{D},\ Tf = X \}$ を X-上 $\mathcal{D}$-テスト写像全体のクラスという。$\mathcal{D}$ が条件 A, B, C をみたせば $\mathcal{D}$ がいくら巨大でも $\mathcal{D}_X$ には解集合 $\mathcal{SD}_X$ が存在する。

$$\mathcal{SD}_X = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(X)} \{ 1_X^{(A,\mathcal{O})} : (A,\mathcal{O}) \to X \mid (A,\mathcal{O}) \in \mathcal{D} \}$$

任意の $f : D \to X\,(f \in \mathcal{D}_X)$ を、$1_X^{f(D)} \circ f_{f(D)} : D \to f(D) \subset X$ と分解し、さらに $f(D)$ の位相を $D \to (f(D),\mathcal{O})$ が等化写像になるように入れ替えた分解 $1_X^{(f(D),\mathcal{O})} \circ f_{(f(D),\mathcal{O})} : D \to (f(D),\mathcal{O}) \to X$ を考える。条件 B と $f_{(f(D),\mathcal{O})}$ が連続単射であることから $f_{(f(D),\mathcal{O})} \in \mathcal{SD}_X$ である。

[Prop. 2 の略証] Prop. 4 の帰結として $f : D \to X$ は次のように分解された。

$$f = \varepsilon_X \circ f_{k_\mathcal{D} X} : D \to k_\mathcal{D} X \to X$$

1) $k_\mathcal{D} X = (X, \mathcal{O}_{\mathcal{SD}_X}) \in \mathcal{D}$ がなりたつ（$\coprod_{1_X^{(A,\mathcal{O})} \in \mathcal{SD}_X} (A,\mathcal{O}) \to k_\mathcal{D} X$ は等化写像、条件 B、C による)。すなわち、$\mathcal{WHK}_\mathcal{D} = \mathcal{D}$ である。

2) $\varepsilon_X = 1_X^{k_\mathcal{D} X} : k_\mathcal{D} X \to X$ は コンマ圏 $(\iota \downarrow X)$ の終対象とみなすことができる（ε_X はモノ射)。$k_\mathcal{D} : \mathcal{WH} \to \mathcal{D}$ は包含射 $\iota : \mathcal{D} \subset \mathcal{WH}$ の右随伴である。

$$\mathcal{WH}(\iota D, X) \cong \mathcal{D}(D, k_\mathcal{D} X)(= \mathcal{WH}(\iota D, \iota k_\mathcal{D} X)),\ \varepsilon_X \circ \iota g \leftarrow g$$

例 2 $\mathcal{C}_{2X}$ を X-上テスト写像全体のクラスとする（$\mathcal{D} = \mathcal{C}_2$）。
このとき、$X \in \mathcal{WH}$ ならば

$$\mathcal{SC}_{2X} = \{1_X^L : L \subset X | 1_X^L \in \mathcal{C}_{2X}\}$$

は $\mathcal{C}_{2X}$ の解集合である（$\varphi = 1_X^{\varphi(K)} \circ \varphi_{\varphi(K)} : K \to \varphi(K) \subset X$）。

例 3 連続写像のクラス $\mathfrak{P}(X, Y)$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}\{\, & 1_X^{dX} \times 1_Y : dX \times Y \to X \times Y \,\} \\ & \cup \{\, 1_X \times \varphi : X \times K \to X \times Y \mid \varphi \in \mathcal{C}_{2Y} \,\}\end{aligned}$$

$Y \in \mathcal{WH}$ ならば、

$$\begin{aligned}& \mathcal{S}\mathfrak{P}(X, Y) = \\ & \quad \{\, 1_X^{dX} \times 1_Y : dX \times Y \to X \times Y \,\} \bigcup \{\, 1_X \times 1_Y^L \mid 1_Y^L \in \mathcal{SC}_{2Y} \,\}\end{aligned}$$

は解集合である。

- このとき、BBT-積 $X \times_{\mathcal{C}_2} Y$ は $(X \times Y, \mathcal{O}_{\mathcal{S}\mathfrak{P}(X,Y)})$ で定義される。ここで、$dX = (X, \mathcal{P}(X))$ である。

- BBT-積は結合律をみたす。

7. 終位相 4 (始位相、指数法則)

平嶋康昌

例 4 連続写像のクラス $\mathfrak{F}(Y, Z)$ を次で定義する（$\mathcal{T}op\,(-, Z)$ にコンパクト開位相を入れた写像空間を $C_{\mathrm{cpt}}(-, Z)$ と表記）。

$$\{\,\varphi^* : C_{\mathrm{cpt}}(Y, Z) \to C_{\mathrm{cpt}}(K, Z) \mid \varphi \in \mathcal{C}_{2Y}\,\}$$

このとき、$Y \in \mathcal{WH}$ ならば

$$\mathcal{S}\mathfrak{F}(Y, Z) = \{\,(1_Y^L)^* : C_{\mathrm{cpt}}(Y, Z) \to C_{\mathrm{cpt}}(L, Z) \mid 1_Y^L \in \mathcal{S}\mathcal{C}_{2Y}\,\}$$

が解集合になる（詳細は省略）

写像空間 $C_{2M}(Y, Z)$ は $\mathcal{S}\mathfrak{F}(Y, Z)$ に関する始位相 $\mathcal{O}^{\mathcal{S}\mathfrak{F}(Y,Z)}$ を用いて、

$$C_{2M}(Y, Z) = (\mathcal{T}op\,(Y, Z), \mathcal{O}^{\mathcal{S}\mathfrak{F}(Y,Z)})$$

で定義される。

BBT-積とこの写像空間により、指数法則が導かれる。すなわち、

Proposition 5 任意の $Y \in \mathcal{WH}, X, Z \in \mathcal{T}op$ について、

$$e : \mathcal{T}op\,(X \times_{C_2} Y, Z) \to \mathcal{T}op\,(X, C_{2M}(Y, Z)), f \mapsto e(f) : x \mapsto f(x, -)$$

は自然な全単射である。

meno: 「$Y, Z \in \mathcal{WH} \Rightarrow C_{2M}(Y, Z) \in \mathcal{WH}$」、Escardo-Lawson-Simpson

8. 指数法則

$$e : \mathcal{T}op\,(dX \times Y, Z) \to \mathcal{T}op\,(dX, (\mathcal{T}op\,(Y, Z), \mathcal{O})),\ g \mapsto [x \mapsto g(x, -)]$$

はいかなる位相 $\mathcal{O}$ に関しても well defined 、はすぐにわかる。

$$\begin{tikzcd}
 & X \times K \arrow[d, "1\times\varphi"] & \\
dX \times Y \arrow[r] & X \times_{C_2} Y \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}op\,(X \times_{C_2} Y, Z) \arrow[r, "(1\times\varphi)^*"] \arrow[d, "(1_X^{dX}\times 1_Y)^*"] & \mathcal{T}op\,(X \times K, Z) \arrow[r, "e"] & \mathcal{T}op\,(X, C_{cpt}(K, Z)) \arrow[d, "(1_X^{dX})^*"] \\
\mathcal{T}op\,(dX \times Y, Z) \arrow[r, "e"] & \mathcal{T}op\,(dX, C_{2M}(Y, Z)) \arrow[r, "(\varphi^*)_*"] & \mathcal{T}op\,(dX, C_{cpt}(K, Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d] & f \circ (1 \times \varphi) \arrow[r, "e"] & {[\, x \mapsto f(x, \varphi(-)) \,]} \arrow[d, "(1_X^{dX})^*"] \\
f \circ 1_X^{dX} \arrow[r, "e"] & {[\, x \mapsto f(x, -) \,]} \arrow[r] & {[\, x \mapsto f(x, -) \circ \varphi(-) \,]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dotted, "e(f)"] & C_{2M}(Y, Z) \arrow[r, "\varphi^*"] & C_{cpt}(K, Z)
\end{tikzcd}$$

$$f \neq g \Rightarrow e(f) \neq e(g)$$

9. the cetralizer of $\mathcal{C}_2$ 等

$(\mathcal{WH}, \times_{\mathcal{C}_2})$ を非可換モノイドのように見なして、部分クラス $\mathcal{C}_2$ の中心化（the centralizer of $\mathcal{C}_2$) $\mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2) = \{\, X \mid \forall K \in \mathcal{C}_2 \,(\, K \times_{\mathcal{C}_2} X \cong X \times_{\mathcal{C}_2} K \,)\,\}$$

代数のアナロジーによって、$\mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2)$ は積に関し閉じている。

$\mathfrak{P}(X, K)$ には解集合 $\{1_{X\times K}\}$ が存在することから $X \times_{\mathcal{C}_2} K = X \times K$ であり、$\mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2) = \{\, X \mid \forall K \in \mathcal{C}_2 \,(\, K \times_{\mathcal{C}_2} X = K \times X \,)\,\}$ となり、BBT-積の非可換性の原因となる積の非対称性を位相的に解消することになり、$\mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2)$ は可換になる。

$\mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2)$ を $\mathcal{WH}$ の充満部分圏とみなすとき、BBT-積は圏論的な積ではないので、少し小さく取り直す。

$\mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2), \mathcal{WH}\mathcal{Z}_{\mathcal{C}_2}$ を

$$\mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2) = \{\, X \in \mathcal{WH} \mid \Delta_{\mathcal{C}_2} : X \to X \times_{\mathcal{C}_2} X, x \mapsto (x, x) \text{ は連続写像} \,\}$$

$$\mathcal{WH}\mathcal{Z}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WH}Z(\mathcal{C}_2) \cap \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$$

で定義する。

$$\begin{tikzcd}
X \times_{C_2} X \arrow[r, "h\times_{C_2}k"] & Y \times_{C_2} Z \arrow[d] \\
X \arrow[u] \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "(h,k)"] & Y \times Z
\end{tikzcd}$$

10. $\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ is a convenient category

- $\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ は $\mathcal{WH}$ の余反照的充満部分圏となる（条件 A, B, C が容易に示されるから）。
- 包含関手 $\iota : \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WHK}_{\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}} \subset \mathcal{WH}$ の右随伴 $k_{\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}}$ を $z_{\mathcal{C}_2}$ とリネイムしておけば、

$$z_{\mathcal{C}_2}(X \times Y) = z_{\mathcal{C}_2}X \times_{\mathcal{C}_2} z_{\mathcal{C}_2}Y = z_{\mathcal{C}_2}(X \times_{\mathcal{C}_2} Y)$$

等もなりたつ。

- $\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ で指数法則がなりたつ（$\mathcal{WH}$ における指数法則からの形式的な変形）。
- 内的な指数法則

$$e : Map(X \times_{\mathcal{C}_2} Y, Z) \cong Map(X, Map(Y, Z))$$

等もなりたつ。

- 極限に関しても、MacLane の教科書 Proposition 2 （p.186 新版） in chap. VII の証明を 「**Haus**, **CGHaus**, K を $\mathcal{WH}, \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}, z_{\mathcal{C}_2}$ 」で置き換えればそのままなりたつ。

Theorem 6 $\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ はコンヴィニエント圏である。

11. $\mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$!!!

平嶋康昌

Lemma 7 $Y \in \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$ とする。$F \subset Y$ が $\mathcal{C}_2{}_Y$- 閉ならば、$\Delta_{\mathcal{C}_2}(F) \subset Y \times_{\mathcal{C}_2} Y$ は閉集合である。

- $(1_Y^{dY} \times 1_Y)^{-1}\Delta_{\mathcal{C}_2}(F) = \amalg_{y \in F}\{y\} \times \{y\} \subset dY \times Y$ は閉集合（Y が T_1 であるから）。
- $(1_Y \times \varphi)^{-1}\Delta_{\mathcal{C}_2}(F) = G(\varphi^{\varphi^{-1}(F)}) = G(\varphi) \cap (Y \times \varphi^{-1}(F))$ は閉。

$$\begin{tikzcd}
G(\varphi_F^{\varphi^{-1}(F)}) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & F \times \varphi^{-1}(F) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & Y \times K \arrow[d, "1_Y \times \varphi"] \\
\Delta(F) \arrow[r, "\subset"] & F \times F \arrow[r, "\subset"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Theorem 1 $\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$ が成り立つ。

- $F \subset Y \in \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$ が $\mathcal{C}_2{}_Y$- 閉ならば、$F = \Delta_{\mathcal{C}_2}^{-1}(\Delta_{\mathcal{C}_2}(F))$ は閉であり、$(\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} \subset)\, \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ である。。

memo: $Y \in \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2) \Leftrightarrow Y \in \mathcal{WH}$ かつ $\Delta_{\mathcal{C}_2} : Y \to Y \times_{\mathcal{C}_2} Y,\ y \mapsto (y, y)$ は連続

12. $\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$

平嶋康昌

$\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$：ここでは議論が簡明。だが、「なぜそのことが成り立つのか」という問いには「成り立つからなりたつ」という自同律か「テスト空間がコンパクトハウスドルフで、空間が弱ハウスドルフであるから」というしかない（と思う)。

$\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$：ここでは、「テスト空間がコンパクトハウスドルフで、空間が弱ハウスドルフである」が根本にあるが、積がうまく構造化されているので〈理由づけに困らない〉すべてがスピノザのような必然性の連鎖のようにみえる（贔屓の引き倒し？)。

$\mathcal{WH}\Delta(\mathcal{C}_2)$：積が非可換なままデカルト的閉圏（風）にしたもの。単独では、〈積に関して閉じているか？〉〈余極限のかたちはどうなっているのか〉などに答えられない。役に立たないと思ってお払い箱にしたつもりが、いつの間にか復権。

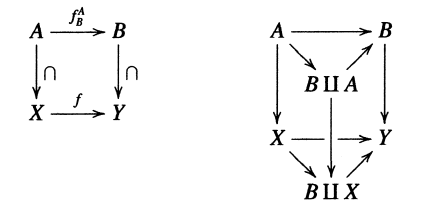
なぜ等号が成り立つか、$\mathcal{WH}$ の部分圏で構成したからだということは、証明からわかる。（ユニヴァースをもう一度持ち出して、）$\mathcal{WH}$ を外せばばらばらになりそうである。

平嶋康昌

$\mathcal{WH}$ の余極限は、$\mathcal{T}op$ のそれから位相が変わるだけではなく、形が変わる〈可能性がある〉ので、直観との折り合いが悪い。$\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}(= \mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2})$ の余極限もそれを引き継いでいる。
McCord (1968 Transaction) で $\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ では以下の命題が成り立つことがしめされているので、通常のホモトピー論については問題がない。

Proposition 8 閉対の写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ が（$\mathcal{T}op$ のなかで）余デカルト的であるとする。$X, B \in \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ ならば、$A, Y \in \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ がなりたつ。

Proposition 9 X は閉部分空間の増大列 $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ の和に終位相を入れたものである。すべての X_n について $X_n \in \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ ならば $X \in \mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ である。



Lemma 10 $f:(X,A)\to(Y,B)$ が命題 8 の前提をみたし、f は等化写像であるとする。このとき、任意のコンパクトハウスドルフ部分空間 $L\subset X$ について

$$f^L : L\subset X\to Y$$

はコンパクト写像である。

1) $f^{-1}(f(L))=f^{-1}(f(L))\cup L=(f^{-1}(f(L\cap A))\cup f^{-1}(f(L-A)))\cup L=f^{-1}(f(L\cap A))\cup L$ である。$L\cap A$ は $L\in\mathcal{C}_2$ の閉部分空間であるから $L\cap A\in\mathcal{C}_2$ であり、$f_B^{L\cap A}\in\mathcal{C}_{2B}$ である。したがって $B\in\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ より、$f(L\cap A)=f_B^{L\cap A}(L\cap A)$ は B の、また Y の閉集合である。ゆえに、$f(L)\subset Y$ は閉である。
4) $L=$ 1-point をとれば、f が全射であることから Y は T_1 空間である。
5) 任意の閉部分集合 $F\subset L$ をとれば、$F\in\mathcal{C}_2$ であるから、$f(F)$ も閉、すなわち、f^L は閉写像であり Y が T_1 空間であることから結論が得られる。

memo:「接着写像が閉写像なら、特性写像もそう」、
「$f(A)\cap f(X-A)\subset B\cap(Y-B)=\emptyset$ である（def. : A は f に関し充満
$\Leftrightarrow A=f^{-1}f(A)\Leftrightarrow X-A$ は f に関し充満）」

15. Prop. 8 の証明

Proposition 8 閉対の写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ が（$\mathcal{T}op$ のなかで）余デカルト的であるとする。$X,B\in\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ ならば、$A,Y\in\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ がなりたつ。

1) 命題 8 の前提は、$\langle 1_Y^B, f\rangle:(B\amalg X, B\amalg A)\to(Y,B)$ が余デカルト的であることと同値であるから、前提を f は相対同相であるとしても一般性は失われない。
2) $A\in\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ は省略。条件 B により、$Y\in\mathcal{WH}$ をいえば $Y\in\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ を示したことになる。
3) $Y\in\mathcal{WH}$ は、任意のテスト写像 $\varphi:K\to Y$ についてそのグラフ $G(\varphi)=\{\,(k,\varphi(k))\mid k\in K\,\}\subset K\times Y$ が閉集合であることと同値である。

   （ $[\Rightarrow]$ $(\varphi,1_K):K\to Y\times K$ の像 $=G(\varphi)$, $[\Leftarrow]$ $p_Y:Y\times K\to Y$ は閉写像かつ $p_Y(G(\varphi))=\varphi(K)$ ）
4) K は局所コンパクトであるから $1_K\times f:K\times X\to K\times Y$ は等化写像である。したがって、$(1_K\times f)^{-1}G(\varphi)\subset K\times X$ が閉集合であることを示せばよい。

16. 証明の続き

5) 直積位相は構造がない。$K \times X = K \times_{\mathcal{C}_2} X$ を利用する。
$(1_K^{dK} \times 1_X)^{-1}(1_K \times f)^{-1}G(\varphi) = \coprod_{k \in K}\{k\} \times f^{-1}(\varphi(k)) \subset dK \times X$ は閉集合である（Lemma 8 により Y は T_1 空間）。
6) $(1_K \times 1_Y^L)^{-1}(1_K \times f)^{-1}G(\varphi) = (1_K \times f^L)^{-1}G(\varphi) \subset K \times L$ は閉集合である。なぜなら、
7) $f^L : L \subset X \to Y$ はコンパクト写像であった。コンパクト写像の直積 $(1_K \times f^L)$ はコンパクト写像である。一般的に、「コンパクト集合のコンパクト写像による逆像はコンパクトである」。グラフは定義域と同相であるから $G(\varphi)$ はコンパクトである。よって、$(1_K \times f^L)^{-1}G(\varphi) \subset K \times L$ はコンパクトである。ハウスドルフ空間 $K \times L$ のコンパクト集合は閉である。

Proposition 11 (1) $X, Y \in \mathcal{WH}$ に対し、

$$k_{\mathcal{C}_2}(X \times Y) \to X \times_{\mathcal{C}_2} Y \to X \times Y$$

は連続である。
(2) $X, Y \in \mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ に対し、$k_{\mathcal{C}_2}(X \times Y) = X \times_{\mathcal{C}_2} Y$ が成り立つ。

(1) は、「$O \subset X \times Y$ が $\mathfrak{P}(X, Y)$-開 ならば、$\mathcal{C}_{2X \times Y}$-開」による。 (2) は $\mathcal{S}\mathfrak{P}(X, Y)$ に属する写像の定義域がすべてコンパクト生成空間で、その圏における条件 B, C によって $X \times_{\mathcal{C}_2} Y \in \mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ となり (1) により結論を得る。

これより、$\mathcal{WHK}_{\mathcal{C}_2}$ における指数法則が 〈$\mathcal{WHZ}_{\mathcal{C}_2}$ のそれと同様に〉 $\mathcal{WH}$ における指数法則も形式的変形により求められる。コンヴィニエント圏であることの証明が並行的に得られる。

18. 錯誤

平嶋康昌

$K \in \mathcal{C}_2$, $Y \in \mathcal{WH}$ であるとき、$\mathcal{SP}(K, Y)$ に関する終位相は等化写像

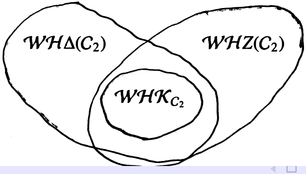
$$(dK \times Y) \amalg (K \times k_{\mathcal{C}_2} Y) \to K \times_{\mathcal{C}_2} Y$$

を導く（終位相の推移性）。

$$\begin{tikzcd} & K \times L \arrow[d, "\cap"] \\ dK \times Y \arrow[r, "1_K^{dK} \times 1_Y"] & K \times Y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} K \times L \arrow[r, "\subset"] & K \times k_{C_2} Y \arrow[d, "1_K \times \varepsilon_Y"] \\ dK \times Y \arrow[r] & K \times Y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & K \times k_{C_2} Y \arrow[d, "1_K \times \varepsilon_Y"] \\ dK \times Y \arrow[r] & K \times Y \end{tikzcd}$$

- $Y \in \mathcal{WHZ}(C_2) \Leftrightarrow (dK \times Y) \amalg (K \times k_{C_2} Y) \to K \times Y$ は等化写像
- $Y \in \mathcal{WH}\Delta(C_2) \Leftrightarrow Y \to Y \times_{C_2} Y,\ y \mapsto (y, y)$ は連続

右辺を通して、$\mathcal{WHK}_{C_2} \subset \mathcal{WHZ}_{C_2} = \mathcal{WHZ}(C_2) \cap \mathcal{WH}\Delta(C_2)$ の別証がえられる（$\mathcal{WH}\Delta(C_2) \subset \mathcal{WHZ}(C_2)$ だとは夢にも思わなかった）。



19. 時間調整 1

集合論の専門家の見解は、次の通り。「X が的（余定義域）であるような連続写像のクラス $\mathcal{A} = \{a : A \to X\}$ について、$\mathcal{A}$ がクラスであるからには $a \in \mathcal{A}$ はある集合論の論理式 $p(a) = p(a, x_1, \cdots, x_N)$ で書かれていなければならない
（$\mathcal{A} = \{\, a \,|\, p(a) \,\}$）。
"$O \subset X$ は $\mathcal{A}$-開である" もちゃんと書いてやればある論理式 $q(O)$ で書かれる。したがって、$\{\, O \,|\, q(O) \,\}$ はクラスであるがちょっとおまじないをして、
$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \{\, O \in \mathcal{P}(X) \,|\, q(O) \,\}$ と書きさえすれば $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ は**集合**である。」

我々のまとめであるから、間違っているかもしれない。

これに従えば、任意の空間 X, Y について $X \times_{\mathcal{C}_2} Y = (X \times Y, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}(X,Y)})$ が定義できるはずである。

今回は、これは〈括弧に入れて〉従わなかった。
従ったとしても、終（始）位相に関するいろんな性質は、自動的に成り立つわけではない。とくに、終位相の推移性は一般には成り立たないだろう（クラス個のクラスの結合？）。
また個々のの空間 $X \times_{\mathcal{C}_2} Y$ の存在は認められても、関手 $\cdot \times_{\mathcal{C}_2} \cdot$ の存在に留保がつくかもしれない。

20. 時間調整 2

$\mathcal{A} = \mathcal{C}_2$ の場合。以下は論理式ではない !! が、論理式に書き直すことができる。

- $\langle \varphi, K, \mathcal{O}_1 \rangle$ は空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ 上のテスト写像：

$$\langle \varphi, K, \mathcal{O}_1 \rangle \in \mathcal{C}_{2\langle X, \mathcal{O} \rangle} \leftrightarrow \langle \varphi, K, \mathcal{O}_1, X, \mathcal{O} \rangle \in MTop \wedge \langle K, \mathcal{O}_1 \rangle \in \mathcal{C}_2$$

- 空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ の部分集合 $O \in \mathcal{P}(X)$ が $\mathcal{C}_{2\langle X, \mathcal{O} \rangle}$-開 ：

$$q(O) \leftrightarrow \forall \varphi \forall K \forall \mathcal{O}_1 \left(\langle \varphi, K, \mathcal{O}_1 \rangle \in \mathcal{C}_{2\langle X, \mathcal{O} \rangle} \rightarrow \varphi^{-1} O \in \mathcal{O}_1 \right)$$