

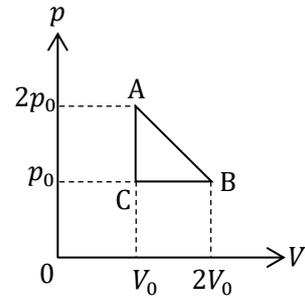
負の比熱とヴィリアル定理

斉藤全弘

§ 1. 比熱が負となる気体の状態変化

入試問題を解き慣れている人なら、次の問題は要注意であることを知っている。この問題は作問者がそれに気づいていないという意味で有名な問題である。

滑らかに動くピストンのついた円筒容器に単原子分子理想気体を入れ、図に示す通り、圧力 p と体積 V を A の状態から B, C の状態を経て再び A の状態にもどるように変化させた。ただし、すべての区間は直線に沿っての変化である。



- (a) A → B の過程で容器内の理想気体を得る熱量 Q_1 を求めよ。
 (b) B → C の過程で容器内の理想気体が失う熱量 Q_2 を求めよ。
 (c) C → A の過程における、容器内の理想気体の内部エネルギーの変化量 ΔU を求めよ。(ΔU の数値を求める計算問題は省略)
 (d) この装置を熱機関として利用したときの熱効率 e_1 を求めよ。
 (e), (f) は省略

[解 答]

単原子分子理想気体の内部エネルギー U は $\frac{3}{2} pV$ と表される。

- (a) 「気体を得る熱量 Q_1 」を過程 A → B で気体が外部から吸収する正味の熱量と解釈すれば、熱力学第 1 法則より、

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Delta U(A \rightarrow B) + W(A \rightarrow B) \\ &= \left\{ \frac{3}{2} p_0(2V_0) - \frac{3}{2} (2p_0)V_0 \right\} + \frac{1}{2} (2p_0 + p_0)(2V_0 - V_0) = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0}} \end{aligned}$$

- (b) $Q_2 = -\Delta U(B \rightarrow C) - W(B \rightarrow C)$
 $= -\left\{ \frac{3}{2} p_0 V_0 - \frac{3}{2} p_0(2V_0) \right\} - p_0(V_0 - 2V_0) = \underline{\underline{\frac{5}{2} p_0 V_0}}$

- (c) $\Delta U = \Delta U(C \rightarrow A) = \frac{3}{2} (2p_0)V_0 - \frac{3}{2} p_0 V_0 = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0}}$

過程 C → A で気体実際に吸収した熱量 Q_3 は、熱力学第 1 法則より ΔU に等しい。

- (d) 過程 A → B では途中の状態 D を境にして、気体は吸熱から放熱に転じる。状態 D の体積と圧力は $V_D = 15V_0/8$, $p_D = 9p_0/8$ である(後述)。過程 A → D で気体が吸収する熱量 Q_4 は、

$$\begin{aligned} Q_4 &= \Delta U(A \rightarrow D) + W(A \rightarrow D) \\ &= \left\{ \frac{3}{2} p_D V_D - \frac{3}{2} (2p_0)V_0 \right\} + \frac{1}{2} (2p_0 + p_D)(V_D - V_0) = \frac{49}{32} p_0 V_0 \end{aligned}$$

よって、この熱機関の熱効率は、

$$e_1 = \frac{W(A \rightarrow B) + W(B \rightarrow C) + W(C \rightarrow A)}{Q_3 + Q_4} = \frac{\frac{3}{2} p_0 V_0 - p_0 V_0 + 0}{\frac{3}{2} p_0 V_0 + \frac{49}{32} p_0 V_0} = \frac{16}{97}$$

この問題のように、過程 $A \rightarrow B$ の途中で気体が吸熱から放熱に転じる場合、「気体を得る熱量」の意味があいまいになる。過程 $A \rightarrow B$ における「実際の吸収熱」すなわち過程 $A \rightarrow D$ で吸収した熱量なのか、それとも「正味の吸収熱」すなわち過程 $A \rightarrow D$ で吸収した熱量から過程 $D \rightarrow B$ で放出した熱量を差し引いた熱量なのかははっきりしないのである。圧力-体積図で右下がりの直線に沿って状態が変化するときの吸収熱を問う場合には、この点に注意して問題文を書かねばならない。

吸熱から放熱に転じることに気がつかないと、(d)の答は $1/6$ になる。このような間違いをする可能性がある入試問題がいくつかあるが (たとえば、法政 2020, 名古屋工業 2017, 名古屋市立 2016, 宇都宮 2014, 徳島 2013, 近畿 2013, 防衛 2008), 状態 D の存在に関する誘導をつけて、受験生が解答時間内に答えられるように工夫をしている入試問題もある (たとえば、新潟 2016, 奈良県立医科 2016, 千葉 1989)。

一般的に、図 1 のように圧力-体積図で物質量 n , 定積モル比熱 C_V の理想気体が状態 A から状態 B まで直線 AB に沿ってゆっくり膨張する場合あるいは逆向きに収縮する場合を考える。この直線の傾きの絶対値を a とすれば、線分 AB 上の任意の状態 X での圧力 p , 体積 V , 温度 T は、気体定数を R として、

$$pV = nRT, \quad p = p_A - a(V - V_A)$$

を満たす。状態 X から体積が ΔV ($|\Delta V| \ll V$) だけ変化したとき、この変化に対応する圧力変化を Δp , 温度変化を ΔT とする。これらの間には2次の微小量を無視すれば、

$$p\Delta V + V\Delta p = nR\Delta T, \quad \Delta p = -a\Delta V$$

が成り立つ。これら 2 式より Δp を消去すれば、

$$\Delta T = \frac{1}{nR} (p - aV)\Delta V \tag{1}$$

を得る。直線 $p = aV$ と直線 AB の交点を状態 C とする。 $\Delta V > 0$ の場合、式(1)より、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_B}{V_B} > a \\ \frac{p_A}{V_A} > a > \frac{p_B}{V_B} \\ a > \frac{p_A}{V_A} \end{array} \right\} \text{であれば、温度は} \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \text{ で上昇しつづける。} \\ A \rightarrow C \text{ で上昇し、} C \rightarrow B \text{ で下降する。} \\ A \rightarrow B \text{ で下降しつづける。} \end{array} \right.$$

この微小変化の間に気体が外部にする仕事は $\Delta W = p\Delta V$, その間の内部エネルギーの変化量は $\Delta U = C_V n\Delta T$ であり、吸収熱は

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta U = p\Delta V + \frac{C_V}{R} (p - aV)\Delta V$$

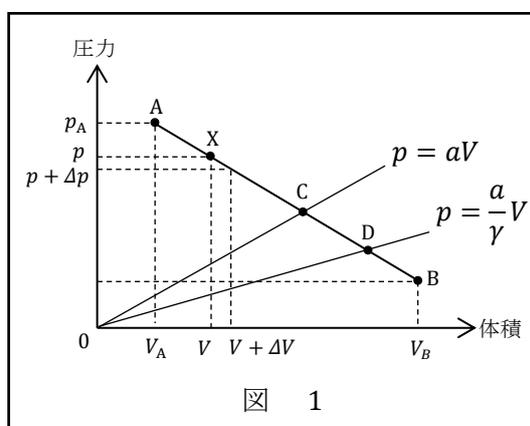


図 1

$$= \frac{C_p}{R} \left(p - \frac{a}{\gamma} V \right) \Delta V \quad \left(\text{ただし, } \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} \right) \quad (2)$$

となる。直線 $p = \frac{a}{\gamma} V$ と直線 AB の交点を状態 D とする。 $\Delta V > 0$ の場合、式(2)より、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_B}{V_B} > \frac{a}{\gamma} \\ \frac{p_A}{V_A} > \frac{a}{\gamma} > \frac{p_B}{V_B} \\ \frac{a}{\gamma} > \frac{p_A}{V_A} \end{array} \right\} \text{であれば, 気体は} \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \text{ で熱を吸収しつづける。} \\ A \rightarrow D \text{ で熱を吸収し, } D \rightarrow B \text{ で熱を放出する。} \\ A \rightarrow B \text{ で熱を放出しつづける。} \end{array} \right.$$

たとえば上記の入試問題では、 $a = p_0/V_0$, $\gamma = 5/3$ であるから、

$$\frac{p_A}{V_A} = \frac{2p_0}{V_0} > \frac{3}{5} \frac{p_0}{V_0} > \frac{p_0}{2V_0} = \frac{p_B}{V_B}$$

を満たす。よって過程 A → B の途中の状態 D で気体は吸熱から放熱に転じる。そのときの体積 V_D と圧力 p_D は、

$$p_D = 2p_0 - \frac{p_0}{V_0} (V_D - V_0) \quad \text{と} \quad p_D = \frac{3p_0}{5V_0} V_D$$

より、 $V_D = 15V_0/8$, $p_D = 9p_0/8$ となる。

以上のことから、直線 AB に沿って状態 C から状態 D まで膨張すれば、気体は熱を吸収しているのに温度が下がることになる。すなわち、この間の比熱は負となる。この区間では、仕事をするときに必要なエネルギーを賄うのに吸収した熱量だけでは足りず、内部エネルギーの一部を取り崩して不足分を補っている。その結果温度が下がるのである。

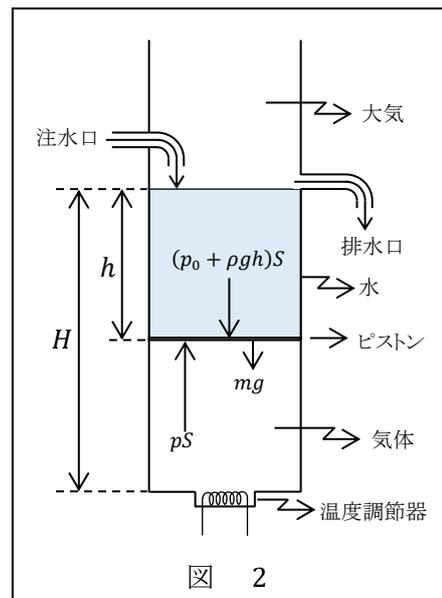
図1の状態変化 A → B の具体例として大学入試でよく見かけるのは図 2 のようなものである。シリンダー内の気体の温度を上げればピストンが上昇し、水が排水口からあふれ出す。逆に温度を下げたとき、水の注入がなければ水面は下降するが、注水口から常に水を注入すれば、水面の高さは一定に保たれる。このとき、大気圧を p_0 , 水の密度を ρ , シリンダーの断面積を S , 重力加速度を g とすれば、質量 m のピストンのつりあいより、気体の圧力は

$$p = p_0 + \rho gh + \frac{mg}{S}$$

と表される。気体の体積は $V = S(H - h)$ であるから、これら 2 式より h を消去すれば、

$$p = \left(p_0 + \rho gH + \frac{mg}{S} \right) - \frac{\rho g}{S} V$$

となり、 $p - V$ 図で右下がりの直線となる。



§2 人工衛星の落下運動

前節で述べた気体の負の比熱とよく似た現象が、徐々に落下する人工衛星の運動を扱った次の入試問題(長崎大学, 1988 年度)に見られる。

(問題文の前半を簡潔にまとめ、文中にある小物体という用語を人工衛星に書き換えた。)

質量 m の人工衛星が地球の中心を中心とする半径 r の円軌道を描いている。万有引力定数を G , 地球の質量を M とする。この人工衛星の運動エネルギー K , 無限遠を基準とする位置エネルギー U , 力学的エネルギー E は、それぞれ

$$K = \boxed{(1)} \quad , \quad U = \boxed{(2)} \quad , \quad E = \boxed{(3)}$$

と表される。よって、 E と U と K の間には、次のような簡単な整数比

$$E : U : K = (-1) : \boxed{(4)} : \boxed{(5)} \quad (i)$$

が存在し、力学的エネルギーの補給や損失がなければ、人工衛星は永久に円運動を続ける。現実には、大気との摩擦などにより、人工衛星は力学的エネルギーを失い、 r は変化する。しかし、摩擦が小さく、力学的エネルギーの変化が十分ゆっくりであれば、この場合も式 (i) の関係は成立する。人工衛星が多数回の公転をくりかえすうち、 E が x だけ減少したとすると、その間に U は $\boxed{(6)}$ だけ減少するが、 K は逆に $\boxed{(7)}$ だけ増加することになる。よって人工衛星は進行方向と逆向きに摩擦力を受けるにもかかわらず、その速さは大きくなる。

[解答]

(1) 人工衛星の速さを v とすれば、運動方程式の向心成分は

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \therefore K = \frac{1}{2} mv^2 = \underline{\underline{\frac{GMm}{2r}}}$$

$$(2) \quad U = - \int_r^\infty \frac{GMm}{r^2} dr = - \underline{\underline{\frac{GMm}{r}}}$$

$$(3) \quad E = K + U = - \underline{\underline{\frac{GMm}{2r}}}$$

(4) ,(5) これら 3 つの式より、 $K = -E$, $U = 2E$ が成り立つから、

$$E : U : K = (-1) : \underline{\underline{(-2)}} : \underline{\underline{(+1)}} \quad (i)$$

(6) ,(7) E が x だけ減少したとき、 U が y だけ減少し、 K が z だけ増加したとすると、題意より、

$$(E - x) : (U - y) : (K + z) = (-1) : \underline{\underline{(-2)}} : \underline{\underline{(+1)}} \quad (ii)$$

が成り立つ。(i)と(ii)より、 $y = \underline{\underline{2x}}$, $z = \underline{\underline{x}}$ を得る。

人工衛星は大気による摩擦のために力学的エネルギーの一部を摩擦熱として失うが、運動エネルギーは増加する。一方、前節で扱った気体は状態 D から状態 C に向かう過程で熱を放出するが、温度は上昇する。これら 2 つの物理現象は、次の対応関係に着目すれば、よく似ていることがわかる。

人工衛星の力学的エネルギー \Leftrightarrow 気体の内部エネルギー
 摩擦熱 \Leftrightarrow 放出熱

地球が重力を及ぼして人工衛星にする仕事 \Leftrightarrow 容器外のものがピストンを押して気体にする仕事

人工衛星の運動エネルギー ⇔ 気体の温度

しかし、この対応関係に基づく類似性はどんな場合でも成り立つわけではない。人工衛星は円に近い軌道を描きながら徐々に落下し、気体は状態 D から状態 C へ直線 AB に沿ってゆっくり変化する、という制約のもとに成り立つのである。

この制約があるとき、人工衛星の運動エネルギー K と位置エネルギー U は

$$2K + U = 0 \tag{3}$$

を満たしながら落下する。これが 2 つの現象の類似性をもたらす要因となっている。ところで、この数式は恒星系(たくさんの星の集合体)に対して成り立つヴィリアル定理と同じ形をしている。ただし恒星系の場合、 K は恒星系の全運動エネルギーの時間平均であり、 U は重力による恒星系の全位置エネルギーの時間平均である(証明は次節)。これと上で述べた 2 つの現象の類似性から、恒星系は負の「比熱」をもつことが予想される。

理想気体の温度は個々の分子の運動エネルギーの平均値を表す物理量であるから、単独の分子には温度を定義できない。同様に、質点としての人工衛星には温度を定義できないが、恒星系では個々の星の運動エネルギーの平均値が存在し、これが気体の温度に対応するのである。そのため、何らかの原因で恒星系の力学的エネルギー E が ϵ だけ減少して「熱」として失われると、運動エネルギーの時間平均 K が ϵ だけ増加して恒星系の「温度」が上昇する。すなわち、恒星系は負の「比熱」をもつと考えられるのである。

§3 ヴィリアル定理 (Virial theorem)

N 個の星から成る恒星系を考える。個々の星に番号をつけ、 i 番目の星の質量を m_i 、ある位置からみた位置ベクトルを \vec{r}_i とする。この恒星系の慣性モーメント I は

$$I = \sum_i^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i$$

その時間変化率の半分を J とすると、

$$J = \frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} = \sum_i^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

となる。 J は作用の次元をもつ量である。さらに J の時間変化率を求めると、

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_i^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i$$

となり、星 i が他の星から受ける重力の合力を \vec{f}_i とすると、運動方程式から、

$$\frac{dJ}{dt} = 2 \times \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i^N \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i \equiv 2K_T + V \tag{4}$$

となる。 K_T はこの恒星系の全運動エネルギーであり、 V はエネルギーの次元をもつ量でヴィリアルと呼ばれる。図 3 を参考にしながら V を変形すると次のようになる。

星 i が星 j から受ける重力を \vec{f}_{ij} とすると、

$$\begin{aligned} V &= \sum_i^N \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i \\ &= \sum_{i,j(i<j)}^N \vec{f}_{ij} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i,j(j<i)}^N \vec{f}_{ij} \cdot \vec{r}_i \end{aligned}$$

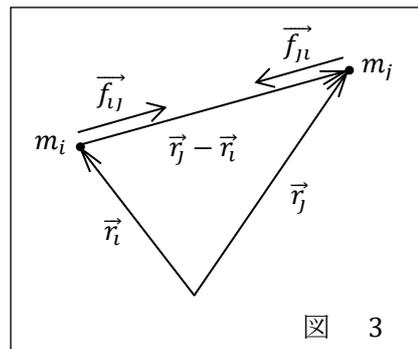


図 3

第 1 項は星 i に重力を及ぼしている星の番号 j が i より大きいものからの寄与で、第 2 項はその逆のものからの寄与である。もちろん $\vec{f}_{ii} = \vec{0}$ である。第 2 項の添字 i と j を交換すると、

$$V = \sum_{i,j(i<j)}^N \vec{f}_{ij} \cdot \vec{r}_i + \sum_{j,i(i<j)}^N \vec{f}_{ji} \cdot \vec{r}_j$$

作用・反作用の法則より、 $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$ が成り立つから、

$$V = \sum_{i,j(i<j)}^N \vec{f}_{ij} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

万有引力定数を G とすれば、 $\vec{f}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$ であるから、

$$V = \sum_{i,j(i<j)}^N \frac{-Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \sum_{i,j(i<j)}^N \frac{-Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

となる。右辺はこの恒星系の全位置エネルギー U_T である。これを式(4)に代入して、

$$\frac{dJ}{dt} = 2K_T + U_T \quad (5)$$

を得る。次に、この式の両辺の時間平均をとると、

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dJ}{dt} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau 2K_T(t) dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U_T(t) dt$$

時間平均を $\langle \rangle$ で表すと、

$$\frac{J(\tau) - J(0)}{\tau} = 2\langle K_T \rangle + \langle U_T \rangle$$

となる。もし時間が経過してもすべての星の位置 \vec{r}_i と速度 \vec{v}_i が有限の範囲内に収まっておれば、 $J(\tau)$ は有限となり、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき、

$$0 = 2\langle K_T \rangle + \langle U_T \rangle \quad (6)$$

が成り立つ。これをヴィリアル定理という。

ヴィリアル定理は二重星 ($N = 2$) でも成り立つ。§2 で扱ったゆっくり落下する人工衛星の場合、地球の速度は $\vec{0}$ で人工衛星の運動は準定常状態にあるので、式(6)の $\langle K_T \rangle$ と $\langle U_T \rangle$ を人工衛星の運動エネルギー K と位置エネルギー U の公転周期にわたる時間平均値 $\langle K \rangle$ と $\langle U \rangle$ で置き換えた式が成り立つ。軌道が円に近い場合には瞬間値の K と U で置き換えればよい。すなわち式(3)は特殊な状況でのヴィリアル定理を表していたのである。

§4 ヴィリアル定理の応用

(A) F. Zwicky による「暗黒物質」の発見 (文献 1)

かみのけ座銀河団は 1000 個以上の銀河から成る球状の銀河集団である。天球面上に投影した銀河の個数密度 $n_p(\mathbf{r})$ は中心からの距離 r の関数として図 4 のように変化する。この分布関数と球対称性から計算で求まる 3 次元空間での個数密度分布 $n(\mathbf{r})$ は等温ガス球の質量密度分布とよく似ている。対称的でなめらかな分布関数は、この銀河団が準定常状態にあることを示唆しており、その慣性モーメント I は平均的な銀河が銀河団の直径程度の距離を移動する時間ではほとんど

ど変化しないと考えられる。もしそうなら、式(5)より、

$$0 = 2K_T + U_T \quad (7)$$

が成り立つ。Zwicky はこの銀河団に含まれる明るい銀河が放つ可視光の線スペクトルから、ドップラー効果を用いて、それらの後退速度 v_r を測定した(文献2)。銀河団の中心に対する銀河の速度分布関数が等方的だとすれば、その速度分散 $\overline{v^2}$ は、

$$\overline{v^2} \sim 3\overline{(\Delta v_r)^2} = 3\overline{\{v_r - \bar{v}_r\}^2}$$

から求まり、銀河団の全運動エネルギー K_T は、銀河団の全質量を M_T として、

$$K_T \sim \frac{1}{2} M_T \overline{v^2} \quad (8)$$

と表される。次に、銀河団の全位置エネルギー U_T を求めるために、銀河団を一樣密度 ρ で半径 R の球 ($\rho = 3M_T/4\pi R^3$) に置き換えて、近似的に、

$$U_T \sim - \int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{4\pi}{3} r^3 \rho \right) (4\pi r^2 \rho) dr = - \frac{3}{5} \frac{GM_T^2}{R} \quad (9)$$

で表せるとする。実際の密度分布は一樣から程遠いのであるが、 $n(r)$ に比例する密度分布 $\rho(r)$ を用いて計算しても、数係数の $3/5$ が少し変わる程度で桁は変わらない。Zwicky は R に対応する角距離 r として図4の右端の値 $160'$ を採用し、 M_T の下限値 $M_{T \min}$ に余裕をもたせるために、式(9)の数係数を5とした。これは M_T を変えずに一樣密度球の半径 R を $3R/25$ にすると同等である。このとき、式(7)、(8)、(9)より、

$$0 \sim M_{T \min} \overline{v^2} - 5 \frac{GM_{T \min}^2}{R}$$

が成り立ち、

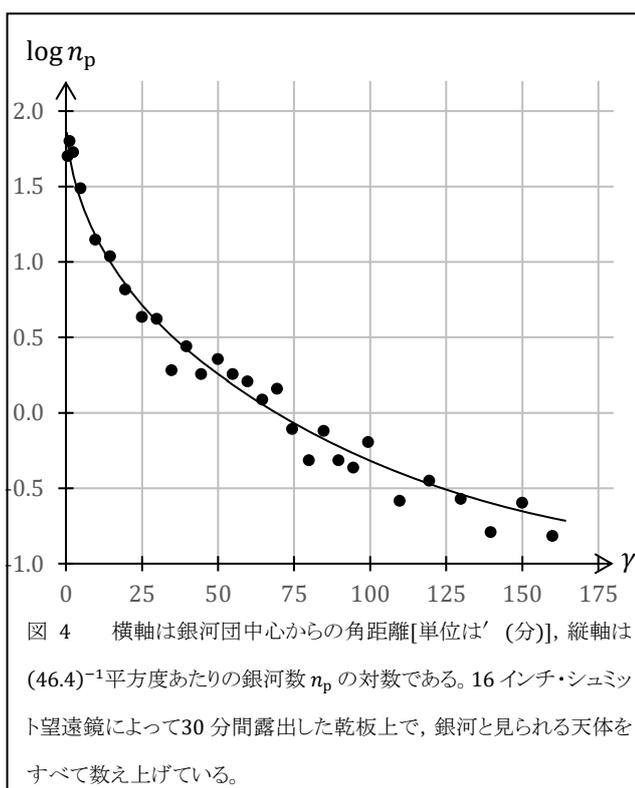
$$M_T \geq M_{T \min} = \frac{R \overline{v^2}}{5G}$$

を得る。1937年当時知られていた、かみのけ座銀河団までの距離 d は 13.8Mpc である(文献3)。この d から $R = 0.642\text{Mpc}$ ($1\text{Mpc} = 3.08 \times 10^{19}\text{km}$) を得る。また、 v_r の測定から Zwicky が得た $\overline{(\Delta v_r)^2}$ の値は $5 \times 10^5 \text{km}^2 \text{s}^{-2}$ である(注1)。これらを用いて計算した $M_{T \min}$ の値は、

$$M_{T \min} \sim 4.5 \times 10^{13} M_\odot \quad (M_\odot \text{は太陽の質量})$$

となる。一方、かみのけ座銀河団全体の光度は、

$$L_T \sim 8.5 \times 10^{10} L_\odot \quad (L_\odot \text{は太陽の光度})$$



であるので(注 2), この銀河団の質量-光度比 (Mass-Luminosity ratio) γ は,

$$\gamma = \frac{M_T}{L_T} \gtrsim \frac{M_{T \min}}{L_T} \sim 530 \frac{M_\odot}{L_\odot}$$

となる。銀河系内の太陽近傍では $\gamma \sim 3 M_\odot/L_\odot$ であることが観測からわかっている。このことから、かみのけ座銀河団の質量の大部分は目に見えない物質が担っていると考えられる。Zwicky はそれを「暗黒(冷)物質」[*dunkle (kalte) Materie*] と名付けた(文献 2)。

その後、観測精度が向上し、現在の観測値は,

$$d \sim 100 \text{Mpc}, \quad \sqrt{v^2} \sim 1100 \text{km s}^{-1}$$

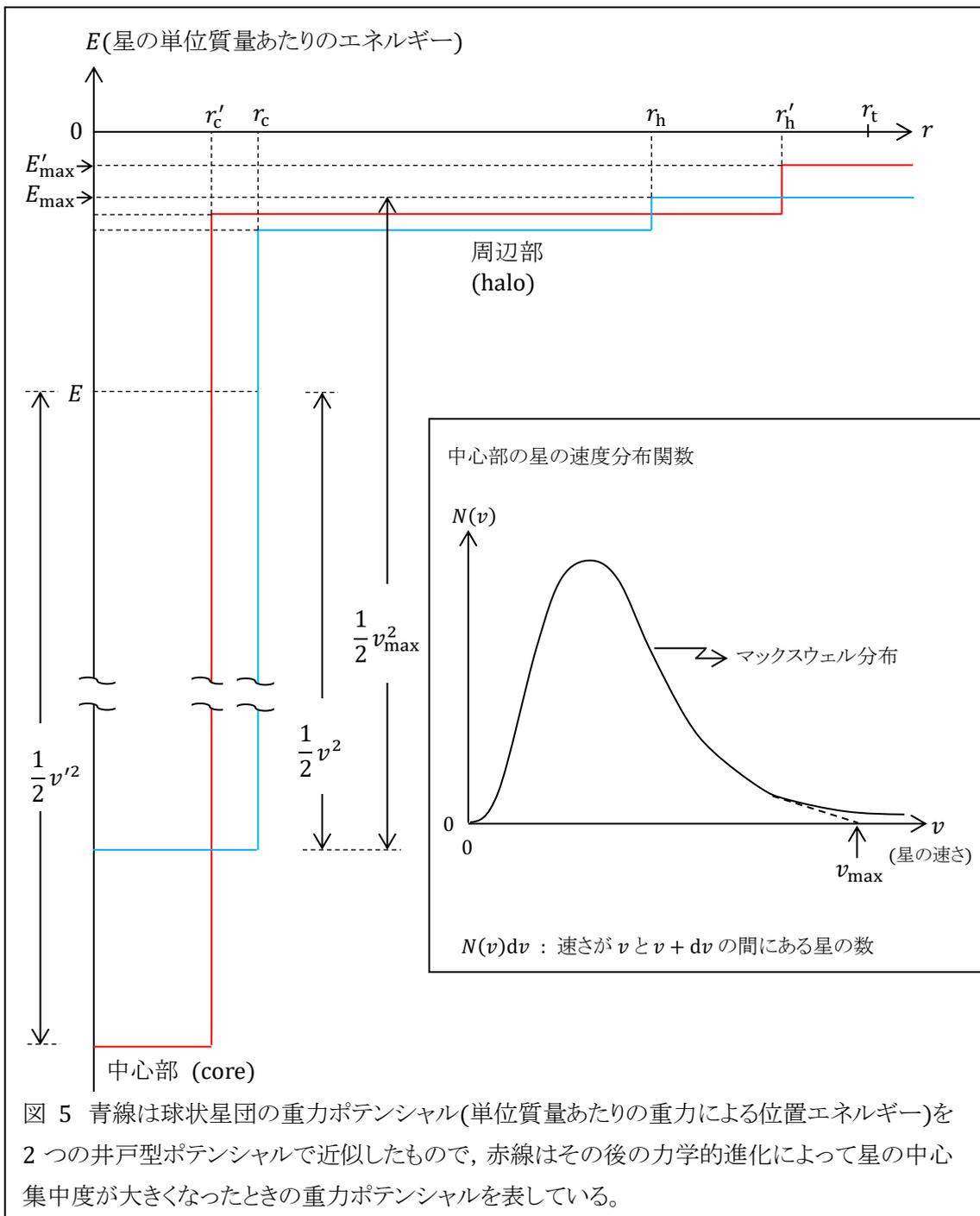
となっている。これらをもとに計算し直すと $\gamma \gtrsim 70$ となり、目に見える物質が占める質量の割合は高々数%であることがわかる。現在では X 線の観測から、銀河団に閉じ込められている高温ガス (Hot Dark Matter) の質量が目に見える物質の質量を上まわることがわかっているが、それでも上記の γ の値を説明するには程遠く、質量の大部分は、1930 年代に Zwicky が主張したように、正体のわからない「暗黒物質」[(Cold) Dark Matter] が担っていると考えられている。

(B) 球状星団の力学的進化

球状星団は $10^5 \sim 10^6$ 個の星(年齢 $\sim 10^{10}$ 年)が球状に分布する天体で、銀河系では 150 個余り発見されている。星団内の星の個数密度分布は図 4 と似ており、中心集中度に差はあるがどの星団も同じような形をしている。そのため天体写真を一見しただけでは他の星団と見分けがつかない。この事実は球状星団が準定常状態にあることを示唆しており、(A)で述べたように常に式(7)が成り立ち、球状星団は負の比熱をもつと考えてよい。

球状星団の力学的進化の本質的な点を説明するために、図 5 のような単純なモデルを考える。球状星団を中心部(core)と周辺部(halo)の 2 つに分け、重力ポテンシャル(単位質量あたりの位置エネルギー)を 2 つの井戸型ポテンシャル(青線)の和で近似する。この図が示すように、中心部にあるエネルギーの高い星はいずれ周辺部に達し、その構成員となって大部分の時間をそこで過ごす。周辺部にある星の個数密度は小さいので、そこでの星同士の遭遇による影響は無視できる。しかし、中心部ではその影響が顕著になるまでの時間(緩和時間)が $\sim 10^9$ 年程度であるので無視できない。星団の半径 r_h には、銀河系による潮汐力のために、 $r_h < r_t$ の制限がある。 r_t より外側の星は潮汐力によって星団から剥ぎ取られてしまう。有限の半径 r_h は中心部にある星の速さに上限値 v_{\max} があることを意味する。そのため星の速度分布関数 $N(v)$ は、挿入図の破線のように平衡状態でのマックスウェル分布からずれている。星同士の遭遇によってこのずれた分布からマックスウェル分布に戻るまでのおおよその時間が緩和時間である。したがって緩和時間の間に中心部から周辺部に移る星が増え、それに伴って中心部から周辺部へ運動エネルギーの移動(「熱の流れ」)が起こる。またその間に星同士の遭遇によって v_{\max} が増加し、周辺部の半径は r_h から $r'_h (< r_t)$ へ増加する。すなわち、周辺部の領域が拡大する。一方、「熱の流れ」によってエネルギーを失った中心部は、負の比熱のために、その全運動エネルギーが増加する。運動の勢いが増加した星々を重力によって中心部に引きつけておくためには、中心部は収縮しなければならない。その結果、

図 5 の赤線のように中心部の井戸型ポテンシャルの半径が減少し、深さが増加する。すなわち、中心部の全位置エネルギーの絶対値が大きくなる。このような中心部から周辺部への「熱の流れ」がつづく、中心部の密度がどこまでも大きくなり、一種の暴走が生じる。このような暴走を重力・熱的破局(*gravothermal catastrophe*)という。実際の球状星団でこのような暴走が生じているのかどうか、もし生じているとすると最終的にどうなるのか、暴走を止めるものがあるとするればそれは何か、等々、論じるべきことは多々あるが、それは専門家の領域に属することなので、ここで打ち止めとする。



文献

- 1 F. Zwicky : On the masses of nebulae and of clusters of nebulae , Ap.J. 86 , 217-246 , 1937
- 2 F. Zwicky : Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln ,
Helvetica Phy . Acta 6 , 110-127 , 1933
- 3 E . Hubble and M . L . Humason : The velocity – distance relation among extra – galactic
nebulae , Ap.J. 74 , 43-80 , 1931

(注 1) かみのけ座銀河団に含まれていると思われる銀河の v_r の測定値が文献 2 に与えられている。それらは, 8500, 7900, 7600, 7000, 6900, 6700, 6600 (単位は km s^{-1}) の 7 つで, これらから計算した $\overline{(\Delta v_r)^2} = \overline{v_r^2} - (\overline{v_r})^2$ の値は $4.3 \times 10^5 \text{km}^2 \text{s}^{-2}$ となるが, Zwicky はこれを $5 \times 10^5 \text{km}^2 \text{s}^{-2}$ にしている。

(注 2) Zwicky はこの数値の出所を論文に記していない。かみのけ座銀河団に含まれる 265 個の銀河のみかけの写真等級の度数分布が文献 3 に与えられている。これをもとにして 1000 個の銀河全体の光度を筆者が計算してみたところ, $(0.83 \sim 1.3) \times 10^{11} L_\odot$ となった。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)