予備校講師も間違えるうなりの問題

斉藤　全弘

次の入試問題 (同志社大学 2019 年, 全学部日程 [理系]) にあるうなりに関する設問は，筆者にとっては初めて見る類いのものであった。

図 1 のように，2 点　A　，　B　に置かれた 2 つの音源 S_A , S_B が音波を互いの音源に向かって発しており，これらの間にマイクロフォンが置かれている。S_A , S_B が発する音波は同じ振幅で周波数 f の正弦波である。空気中の音速を V とし，A から B へ向かう向きを x 軸正の向きとする。AB 間の距離は音波の波長に比べて十分大きく，音源による音波の反射は無視できるとする。

第 2 段落と第 3 段落は省略

最後に，音源 S_A の振動数を $1.02 \times f$ にしたところ，点 C で静止したマイクロフォンでうなりが観測された。このとき，ある時刻におけるうなりの音の大きさ (合成波の振幅)は x 軸上で周期的に変化し，うなりの音の大きさが極大となる点が 間隔 $\boxed{\text{(オ)}}$ ごとに現れる。さらにマイクロフォンを x 軸正の向きに一定の速さ $\boxed{\text{(カ)}}$ で動かすと，うなりは観測されなくなった。

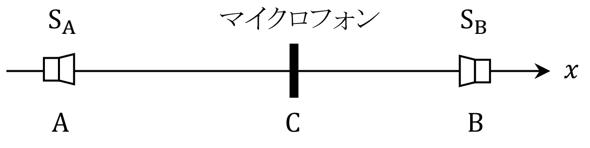


図 1

現時点 (2019 年 3 月 13 日) において各予備校が公表している設問 (オ) の正解は $50\dfrac{V}{f}$ であるが，間違っているので以下に正しい答えを与える。(注 1)

点 A , B の中点を原点とする x 軸を導入する。音源 S_A , S_B の位置をそれぞれ $x = -d$, $x = d$ とし，音源から発せられる音波の音圧を

$$p_A(-d\,, t\,) = p_0 \sin 2\pi f_A t \ , \qquad p_B(d\,, t\,) = p_0 \sin 2\pi f_B t$$

とする。問題文の第 3 段落で音源 S_B が発する音波の位相を音源 S_A に対して $\pi/4$ だけ遅らせているが，振動数が異なる場合には以下の論証に本質的な影響を与えないので，数式を簡単にするために，両者の初期位相を 0 とした。さらに，

$$\varDelta f = f_A - f_B\,, \quad \bar{f} = \frac{1}{2}\,(f_A + f_B)$$

とおき，$\varDelta f > 0$ ，　$\varDelta f \ll \bar{f}$ 　とする。

問題文に与えられている 2 つの音源は，音波を互いの音源に向かって発しているのだが，筆者

の論法をわかりやすくするために，まず，どちらの音源も x 軸の正の向きに音波を発しているとし，x 軸上の $x > d$ の領域で観測されるうなりを考察する。この領域での音圧 $p(x\,,t)$ は，2 つの音源から伝わってくる音圧 $p_{\mathrm{A}}\,, p_{\mathrm{B}}$ の重ね合わせであるから，

$$
\begin{aligned}
p(x\,,t) &= p_{\mathrm{A}}(x\,,t) + p_{\mathrm{B}}(x\,,t) \\
&= p_{\mathrm{A}}\left(-d\,, t - \frac{x+d}{V}\right) + p_{\mathrm{B}}\left(d\,, t - \frac{x-d}{V}\right) \\
&= p_0 \sin 2\pi f_{\mathrm{A}}\left(t - \frac{x+d}{V}\right) + p_0 \sin 2\pi f_{\mathrm{B}}\left(t - \frac{x-d}{V}\right) \\
&= P(x\,,t) \cdot Q(x\,,t)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
P(x\,,t) &= 2p_0 \cos\left\{2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}-f_{\mathrm{B}}}{2}\left(t - \frac{x}{V}\right) - 2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}+f_{\mathrm{B}}}{2}\,\frac{d}{V}\right\} \\
&= 2p_0 \cos\left\{2\pi\,\frac{\Delta f}{2}\left(t - \frac{x}{V}\right) - 2\pi \bar{f}\,\frac{d}{V}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(x\,,t) &= \sin\left\{2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}+f_{\mathrm{B}}}{2}\left(t - \frac{x}{V}\right) - 2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}-f_{\mathrm{B}}}{2}\,\frac{d}{V}\right\} \\
&= \sin\left\{2\pi \bar{f}\left(t - \frac{x}{V}\right) - 2\pi\,\frac{\Delta f}{2}\,\frac{d}{V}\right\}
\end{aligned}
$$

と表される。式 $P(x\,,t)$ ，$Q(x\,,t)$ で表される 2 つの波(以下それぞれを波 P，波 Q と呼ぶ)は，x軸の正の向きに同じ速さV で伝わるが，それらの振動数 $f_{\mathrm{P}}\,, f_{\mathrm{Q}}$ と波長 $\lambda_{\mathrm{P}}\,, \lambda_{\mathrm{Q}}$ は大きく異なっており，次の関係式を満たす。

$$
f_{\mathrm{P}} = \frac{\Delta f}{2} \ll \bar{f} = f_{\mathrm{Q}}
$$

$$
\lambda_{\mathrm{P}} = \frac{2V}{\Delta f} \gg \frac{V}{\bar{f}} = \lambda_{\mathrm{Q}}
$$

ある瞬間における音圧の波形を図で表せば，次のようになる。

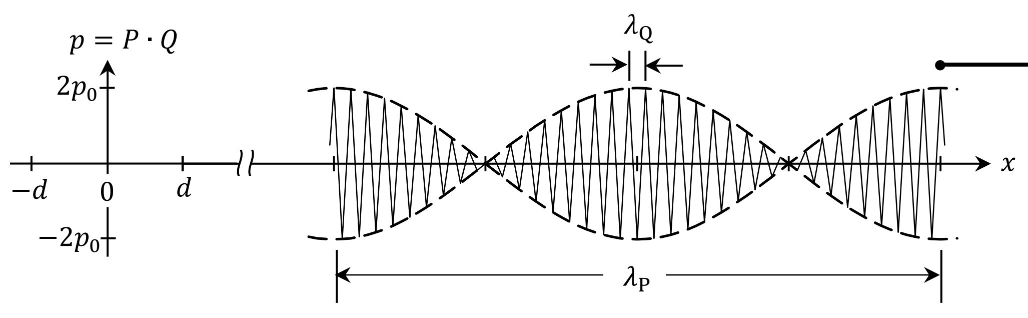


図 1　ある時刻における音圧 p の波形(波 P の 1 波長分だけを描いてある)

時間が経過すると，この模様全体がそのままの形で右向きに速さV で移動する。したがって，ある

位置でこの音波を受け取ると, $|p| = 2p_0$ となって音が大きくなる時刻の間隔, すなわち, うなりの周期 T は,

$$T = \frac{\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{P}}}{V} = \frac{1}{\Delta f}$$

となる。

次に, 2 つの音源が音波を互いの音源に向かって発している場合を考える。このとき A B 間の位置 $x(-d < x < d)$ における音圧は,

$$\begin{aligned} p(x\,,t) &= p_{\mathrm{A}}(x\,,t) + p_{\mathrm{B}}(x\,,t) \\ &= p_{\mathrm{A}}\left(-d\,,t - \frac{d+x}{V}\right) + p_{\mathrm{B}}\left(d\,,t - \frac{d-x}{V}\right) \\ &= p_0 \sin 2\pi f_{\mathrm{A}}\left(t - \frac{d+x}{V}\right) + p_0 \sin 2\pi f_{\mathrm{B}}\left(t - \frac{d-x}{V}\right) \\ &= P(x\,,t)\cdot Q(x\,,t) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} P(x\,,t) &= 2p_0 \cos\left\{2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}-f_{\mathrm{B}}}{2}\left(t - \frac{d}{V}\right) - 2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}+f_{\mathrm{B}}}{2}\,\frac{x}{V}\right\} \\ &= 2p_0 \cos\left\{2\pi\,\frac{\Delta f}{2}\left(t - \frac{d}{V}\right) - 2\pi \bar{f}\,\frac{x}{V}\right\} \\ Q(x\,,t) &= \sin\left\{2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}+f_{\mathrm{B}}}{2}\left(t - \frac{d}{V}\right) - 2\pi\,\frac{f_{\mathrm{A}}-f_{\mathrm{B}}}{2}\,\frac{x}{V}\right\} \\ &= \sin\left\{2\pi \bar{f}\left(t - \frac{d}{V}\right) - 2\pi\,\frac{\Delta f}{2}\,\frac{x}{V}\right\} \end{aligned}$$

と表される。$\Delta f > 0$を仮定しているので, 波 P と波 Q はともに x 軸の正の向きに伝わる進行波である。この場合も波 P と波 Q の振動数と波長は大きく異なっているのだが, 位相速度 $V_{\mathrm{P}}\,, V_{\mathrm{Q}}$ も大きく異なっていて, 次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{P}} &= \frac{\Delta f}{2} \ll \bar{f} = f_{\mathrm{Q}} \\ \lambda_{\mathrm{P}} &= \frac{V}{\bar{f}} \ll \frac{2V}{\Delta f} = \lambda_{\mathrm{Q}} \\ V_{\mathrm{P}} &= f_{\mathrm{P}}\,\lambda_{\mathrm{P}} = \frac{\Delta f}{2\bar{f}}\,V \ll V \ll \frac{2\bar{f}}{\Delta f}\,V = f_{\mathrm{Q}}\,\lambda_{\mathrm{Q}} = V_{\mathrm{Q}} \end{aligned}$$

波 Q は超音速で伝わる。問題文に与えられている事例では $V_{\mathrm{Q}} = 101V$ (マッハ 101)である。と言っても, エネルギーや情報が音速の 101 倍の速さで伝わるわけではない。気柱共鳴管でも, 同様の現象が見られる。

いま, 時刻 $t = t_0$ のとき, $x = x_0$で音圧が $2p_0$ になっているとして, 時刻が $t = t_0$ (赤), $t_0 + \frac{1}{4\bar{f}}$ (緑), $t_0 + \frac{1}{2\bar{f}}$ (青), $t_0 + \frac{3}{4\bar{f}}$ (紫)のときの波形をグラフで表すと, 図 2 のようになる。

この図は, m を大きな自然数として, $\frac{\lambda_{\mathrm{Q}}}{4} = \left(m + \frac{1}{6}\right)\lambda_{\mathrm{P}}$ を仮定して描かれている。

$V_{\mathrm{P}} \ll V_{\mathrm{Q}}$ であるから, 波 Q がたとえば 10 回振動して $10\,\lambda_{\mathrm{Q}}$ 進む間に波 P が進む距離は無視できるほど小さい。この間に x 軸上の各点で音圧が 10 回振動するので, 理論上ではこの音の大きさが

各点で確定する。この場合，図 2 からわかるように，$x = x_0 + n\dfrac{\lambda_P}{2}$ （n は整数）では音圧が振幅 $2p_0$ で振動するので音の大きさが極大となっている。よって，極大となる位置の間隔 Δx は，

$$\Delta x = \frac{\lambda_P}{2} = \frac{V}{2\bar{f}}$$

である。問題文に与えられている事例は，$f_B = f$ ，$f_A = 1.02\,f$ であるから，

$$\Delta f = 0.02f \ , \ \bar{f} = 1.01f$$

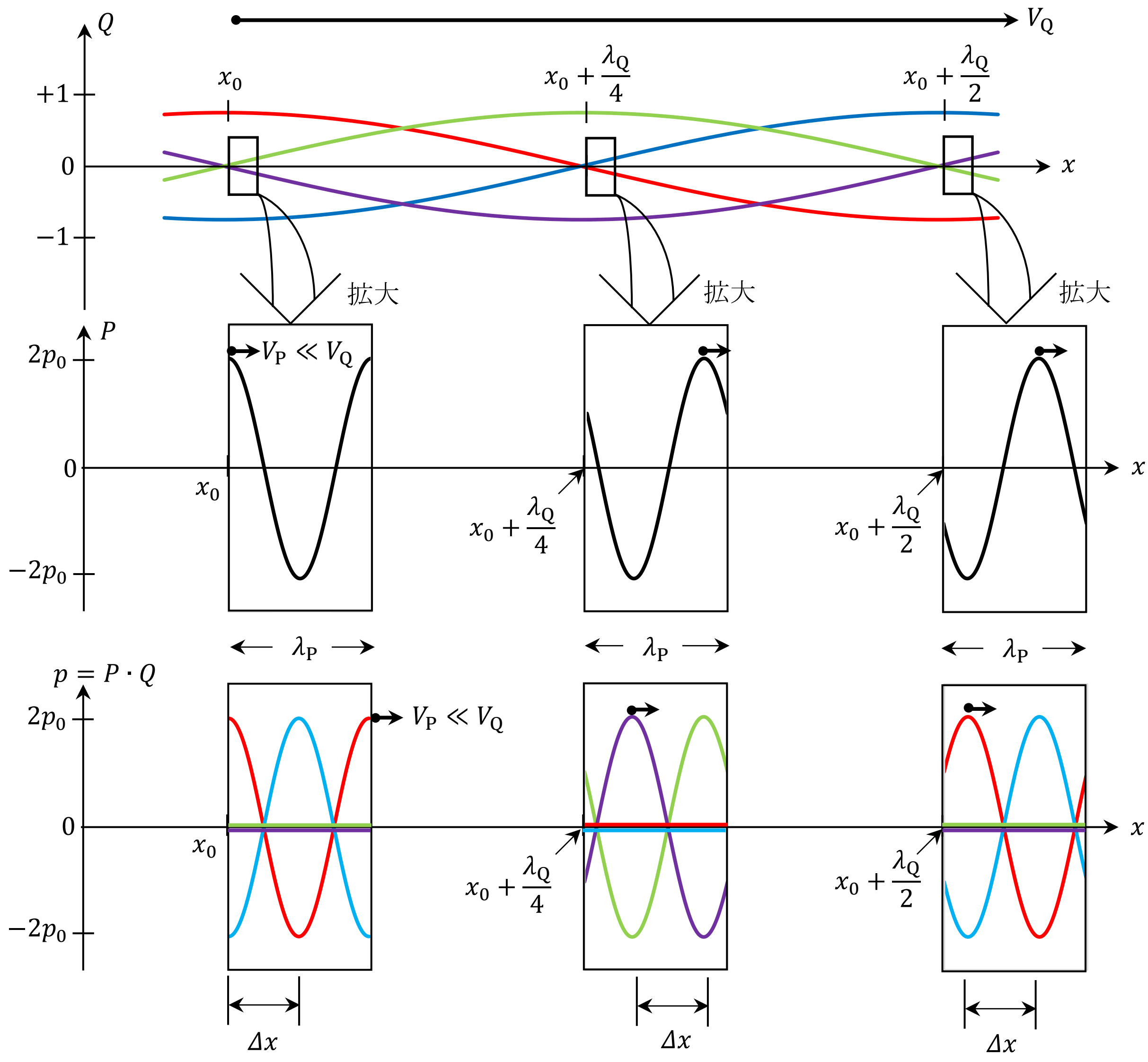


図　2　　$x = x_0$ で音圧 p が極大値 $2p_0$ となる瞬間 t_0 から波 Q の $\frac{1}{4}$ 周期の 1 倍，2 倍，3 倍経過したときの波形（3 つの区間を拡大して描いてある。）

赤: $t = t_0$ ，緑: $t = t_0 + \frac{1}{4}\frac{1}{\bar{f}}$ ，青: $t = t_0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\bar{f}}$ ，紫: $t = t_0 + \frac{3}{4}\frac{1}{\bar{f}}$

となる。よって，設問(オ)の答は

$$\Delta x = \boxed{\frac{V}{2.02\,f}}$$

である。各予備校が公表している正解は，

$$50\ \frac{V}{f} = \frac{V}{0.02\,f} = \frac{V}{\Delta f} = \frac{1}{2}\ \lambda_{\mathrm{Q}}$$

であるが，この長さはΔxとは無関係である。

時刻 $t = t_0$ から時間が経過すると，波 P は速さ$V_{\mathrm{P}}\ (\ll V_{\mathrm{Q}})$ でゆっくりx 軸の正の向きに移動する。したがって，A B 間のある位置で音の大きさを観察すると，

$$T = \frac{\lambda_{\mathrm{P}}/2}{V_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\Delta f}$$

の周期で音の大きさが変化する。

数式に埋もれてしまって本質的な点を捉えにくかったかもしれないが，次のような極端な例を考えれば，正解が $\frac{V}{2\bar{f}}$ になることが容易にわかる。いま，2 つの音源から同じ振動数 f の音波が発せられているとすると，問題文の第 2，3 段落で論じられているように，A B 間に定常波が生じ，音の大きさの極大点が間隔 $\frac{V}{2f}$ で並ぶ。ここで音源 A の振動数を f から $\frac{1}{3600}$ Hz だけ大きくすると，周期が 1 時間のうなりが生じ，A B 間ではどこでも 1 日に 24 回，振動数 $f(\fallingdotseq \bar{f})$ の音が大きくなる。これもれっきとしたうなりである。振動数を変えた直後，音の大きさが極大となる位置は原理的には元の位置からずれるであろうが，そのずれは無視できるほど小さい。したがって，このうなりが生じているとき，うなりの大きさが極大となる点の間隔は $\frac{V}{2f} \fallingdotseq \frac{V}{2\bar{f}}$ である。

(注 1) 2019 年 3 月 26 日に駿台予備校が正しい答えに訂正した。

追記 1 (2019/07/06)

2019 年 7 月 6 日現在，河合塾，代々木ゼミナール，東進 がそれぞれのホームページに載せている設問（オ）の正解は $50V/f$ のままである。教学社の「2020 年版大学入試シリーズ 同志社大学(全学部日程 [理系])」にある正解も $50V/f$ である。

2019 年 6 月 29 日に，日本物理教育学会近畿支部主催の「物理教育を考える会 I」(大学入試問題検討会) が京都教育大学藤森キャンパスで開かれた。筆者は体調不良のために出席しなかったが，出席した人から，同志社大学の出題者は $50V/f$ を正解としていたとの連絡を受けた。検討会では，駿台予備校以外の解答がすべて一致しているので，こちらのほうが正解であろうとい

う雰囲気になったらしい。そこでその出席者は，ネット上にその正解を間違いとする文書があるとして，筆者の「熱中物理」を紹介したとのことである。この段階で同志社大学は，設問(オ)の解答に何か問題があることを認識したはずである。

本文の図 2 に描いた一例が示すように，$\lambda_{\mathrm{Q}}/2$ は音の大きさが極大となる点の間隔ではないし，一般的には，ある極大点から$\lambda_{\mathrm{Q}}/2$ 離れたところは極大点ですらないのである。なぜこのような間違いが生じてしまったのか。筆者が想像するに，その原因は間違った類推にあると思われる。図 1 の波 Q は音声信号を電波で送信するときの振幅変調の搬送波に，波 P が信号波に対応するのだが，図 2 の場合，図 1 から類推して，波長の短い波 P が搬送波に，波長の長い波 Q が信号波に対応すると思い込んでしまったのではないだろうか。図 1 では波 P と波 Q が同じ位相速度V で進行するので，波 Q が波 P の信号(圧力変動)を乗せて運ぶという考え方が成り立つ。しかし，図 2 では波 P と波 Q の位相速度が異なり，信号を担っている波 P はゆっくりとした速さV_{P}で伝わり，波 Q は音速よりはるかに大きい速さ V_{Q}で伝わる。このような場合には波 Q を搬送波と呼ぶことはできない。波 Q は超音速で波 P を追い抜いていくことによって各点の空気を振動数 $\bar{f}$ で振動させるのである。

追記 2　　(2019 年 07 月 29 日)

入試問題検討会から 1 か月が経過したが，事態に変化はなく，このまま多数決で正解は $50V/f$ になってしまいそうである。くどくなるが，$50V/f$ が間違っている理由をもう一つ挙げておく。もし音の大きさが極大となる点の間隔が $50\dfrac{V}{f}=\dfrac{1}{2}\lambda_{\mathrm{Q}}=\dfrac{V}{\Delta f}$ であるならば，波 Q の速さV_{Q} は $\dfrac{2\bar{f}}{\Delta f}V$ であるから，ある位置 $x\ (-d<x<d)$ で観察したとき，音の大きさが極大となる時刻の間隔（うなりの周期）は $\dfrac{\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{Q}}}{V_{\mathrm{Q}}}=\dfrac{1}{2\bar{f}}$ となり，正しい周期 $\dfrac{1}{\Delta f}$ とはならない。

追記 3　　同志社大学に対する反論　(2019 年 09 月 01 日)

検討会に出席した別の人からの情報で，同志社大学の考え方が見えてきた。問題文の

「ある時刻におけるうなりの音の大きさ(合成波の振幅)は x 軸上で周期的に変化し，うなりの音の大きさが極大となる点が 間隔 $\boxed{\text{(オ)}}$ ごとに現れる。」

に，(合成波の振幅) という括弧書きがあるので，正解は $50V/f$ であり $V/(2.02f)$ ではない，というのが同志社大学の主張で，この括弧書きは答を一つに絞り込むために挿入されたようである。筆者の考えではこの主張は間違っているので，ここで反論する。

まず「音の大きさ」から始める。音波の進行波があるとき，進行方向に垂直な面を単位面積あたり単位時間あたりに通過するエネルギーを音波の強さあるいは音波強度という。日常用語ではそれを音の大きさという言葉で表している。この進行波の音圧振幅を P_{m} とすれば，音波強度 I は，空気の密度を ρ ,音速を c として，

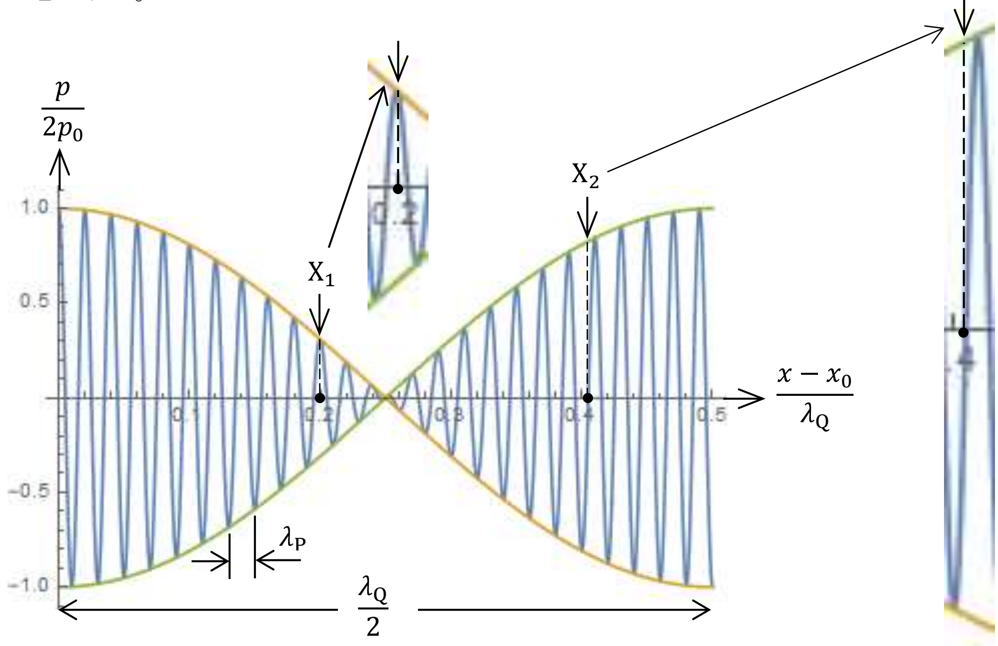
$$I = \frac{1}{\rho\, c}\left(\frac{P_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

で与えられる。振幅 P_{m} は，測定位置で音圧 p が時間的に少なくとも 1 周期に亘って振動しないと求まらない。ある位置でのある瞬間の音圧 p の値しか情報がないとすれば，振幅 P_{m} は求まらない，したがって音波強度も求まらない。

次に，設問 (オ) で問題となっている合成波の振幅に移る。合成波の音圧 p は，本文の記号を用いれば，

$$p(x,t) = p_{\mathrm{A}}(x,t) + p_{\mathrm{B}}(x,t) = P(x,t) \times Q(x,t)$$

と表される。ここで時刻を $t = t_0$ に固定し，音圧の波形を描けば，次図の青色のようになる。同志社大学は，橙色と緑色の包絡線 [$\pm Q\,(x,t_0)$] の幅 (あるいはその半分) を合成波の振幅と呼んでいると思われる。



次に，「ある時刻におけるうなりの音の大きさ」と「(合成波の振幅)」の関係であるが，これら 2 つの量が同値ではないにしても，2 つの量の間に正の相関があることを指していると筆者には読み取れる。そうだとすると，合成波の振幅が大きいところで音の大きさが大きく，合成波の振幅が小さいところで音の大きさが小さいことになる。たとえば，図の位置 X_1 より位置 X_2 の方が音が大きいことになる。上述のように音の大きさを知るためには，各点で音圧が時間的に少なくとも 1 回は振動しなければならない。その微小時間の間に，点 X_1 では音圧が振幅 $P_{\mathrm{m}} = 2\,p_0$ で振動するが，点 X_2 では振動しない。したがって，音の大きさは点 X_2 より点 X_1 の方が大きいのである。このように，包絡線からは音が大きくなる点の位置，したがってそれらの点の間隔は求まらない。

正しい答を得るには，(合成波の振幅) を次のように解釈すればよい。同志社大学は，まず時刻を固定し，音圧の波形の包絡線から (合成波の振幅) を推定して間違ったのである。この操作を逆にして，まず位置 x を固定し，各点での音圧の一周期に亘る時間変化から (合成波の振幅) を

x の関数として求める。これから直ちに，うなりの音の大きさが極大となる点の間隔は，どの時刻でも，$\lambda_{\mathrm{P}}/2$ であることがわかる。

以下は又聞きに基づいているので，もしかすると聞き間違いということもありうるが，同志社大学は，括弧書きの (合成波の振幅) がもし問題文中になければ，正解が 2 つあると言われても仕方がないという主旨の発言をしたようである。とんでもないことである。括弧書きがあろうがなかろうが正しい答えは一つ，V / ($2.02f$) である。どうしても $50\,V/f$ を正解とする設問にしたいのであれば，音の大きさには言及しないで，

「ある時刻における合成波の包絡線の幅が最も大きくなる点が，x 軸上で間隔 $\boxed{\text{(オ)}}$ ごとに現れる。」

とすればよい。

筆者が疑問に思うのは，同志社大学がなぜこのような設問を採用したのかという点である。間隔 $50\,V/f$ が物理学の興味深い話題につながるとはとても思えないのである。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は [こちらへ]