宇宙ヨットの加速とエネルギー変換効率 （1）

斉藤　全弘

§1　Kulkarni – Lubin - Zhang の論文 (文献 1，以下 KLZ と略す) の概要

地上から放射されたレーザー光による宇宙ヨットの加速を論じるとき，理由はわからないが，専門家たちは光波ではなく光子を用いることが多い。どちらの方法で計算しても，前提条件が同じなら同じ結果が得られる。それを示すために，上記の論文の一部を簡略化し，筆者の考えも取り入れて，その要点を以下に記す。物理量の記号は筆者が文献 2 で用いたものに統一している。

(仮定 1)　宇宙ヨットは x 軸の正の向きに直線運動をし，帆は常に x 軸に垂直である。レーザー光は x 軸方向にのみ伝わる。

(1)　波長 λ のレーザー光源 L から放射される光子の運動量の大きさ p とエネルギー ϵ は，光速を c，プランク定数を h として，

$$p = \frac{h}{\lambda}\ ,\qquad \epsilon = \frac{h\,c}{\lambda} \tag{①}$$

(2)　光源 L に対する宇宙ヨット Y の速度が v のとき，Y が受け取るレーザー光の波長 λ' は，相対論的ドップラー効果により，

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\ ,\qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{②}$$

(仮定 2)　宇宙ヨット Y の帆がこのレーザー光を反射するとき，Y から見た反射波の帆における波長は λ' である。すなわち，反射に際して高調波は生じないとする。

(3)　L 系 (光源 L に対して静止している座標系) で静止している観測者が受け取る上記の反射波の波長 λ_{r} は，相対論的ドップラー効果により，

$$\lambda_{\mathrm{r}} = \lambda'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda\,\frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{③}$$

となる。この式は特殊相対論に関するアインシュタインの論文 (文献 3) に与えられている。

(4)　光源 L が放射する単位時間あたりのエネルギー Q は，単位時間あたりに放出する光子数を N として，

$$Q = N\,\epsilon = N\,\frac{h\,c}{\lambda} \tag{④}$$

(仮定 3)　出力 Q は時間的に一定とし，光線束 (ビーム) は広がらず，その断面積 S は光源 L からの距離 x に依存しないとする。

(5)　光源 L から放射される光子の個数密度 n は，

$$n = \frac{N}{S\,c} \tag{⑤}$$

(仮定 4) 宇宙ヨットの帆の面積 S_{Y} は S より大きく，放射されたレーザー光はいずれすべて帆に入射する。

(6) L 系から見たとき，速度 v の帆に入射する単位時間あたりの光子数 N_{i} は，

$$N_{\mathrm{i}} = n\,S\,(\,c - v\,) = N\,(\,1 - \beta\,) \qquad ⑥$$

(仮定 5) レーザー光は帆で全反射する。すなわち，一つの光子が帆に入射すれば一つの光子が帆から出てくる。

(7) L 系から見たとき，光源 L から距離 x のところを速度 v で通過する帆によって反射された光子の個数密度 n_{r} は，

$$n_{\mathrm{r}} = \frac{N_{\mathrm{i}}}{S\,(\,c + v\,)} = n\,\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \qquad ⑦$$

となる。これは帆の近傍における反射光の光子の個数密度である。他の場所，たとえば光源 L において，反射光の光子の個数密度が式 ⑦ の n_{r} になるのは，帆から光源 L まで反射光が戻る時間 $\Delta t = x\,/\,c$ が経ったときである。

(8) L 系から見て，一つの光子が帆に入射し，一つの光子が帆から出てくるとき，これら二つの光子は同一のものとは言えないが，ここでは一つの光子が瞬時に反射すると考える。その運動量の大きさとエネルギーを，

反射前 $(\,p\,,\,\epsilon\,)$，　反射後 $(\,p_{\mathrm{r}}\,,\,\epsilon_{\mathrm{r}}\,)$

とし，宇宙ヨットの運動量の大きさとエネルギーを，

反射前 $(\,p_{\mathrm{Y}}\,,\,\epsilon_{\mathrm{Y}}\,)$，　反射後 $(\,p_{\mathrm{Yr}}\,,\,\epsilon_{\mathrm{Yr}}\,)$

とする。この反射では全運動量が保存されるので，

$$p + p_{\mathrm{Y}} = (\,-\,p_{\mathrm{r}}\,) + p_{\mathrm{Yr}} \qquad ⑧$$

が成り立つ。これより，一つの光子の反射による宇宙ヨットの運動量変化 Δp_{Y} は次のようになる。

$$\Delta p_{\mathrm{Y}} = p_{\mathrm{Yr}} - p_{\mathrm{Y}} = p + p_{\mathrm{r}} = \frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda_{\mathrm{r}}} = \frac{2}{1 + \beta}\,\frac{h}{\lambda} \qquad ⑨$$

(9) 速度 v の帆にはたらく放射圧を P とする。帆には単位時間あたり N_{i} 個の光子が入射するので，

単位時間あたりの力積 $P\,S$ = 単位時間あたりの運動量変化 $N_{\mathrm{i}}\,\Delta p_{\mathrm{Y}}$

が成り立つ。式 ⑥，⑨，④ を用いて P を求めれば，

$$P = \frac{1}{S}\,N\,(\,1\,-\beta\,)\,\frac{2}{1 + \beta}\,\frac{h}{\lambda} = \frac{2\,Q}{S\,c}\,\frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

となる。さらに，エネルギー流束密度 $I\,(= Q\,/\,S\,)$ を用いて表せば，

$$P = \frac{2\,I}{c}\,\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \qquad ⑩$$

となる。この式もアインシュタインの論文 (文献 3) に与えられている。

(10) 一つの光子の反射による宇宙ヨットのエネルギー変化 $\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}$ は，

$$\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}} = c\,\beta\,\Delta p_{\mathrm{Y}} \qquad ⑪$$

$$= \frac{2\,\beta}{1+\beta}\,\epsilon \qquad ⑫$$

となる (注　1) 。一方，光子のエネルギー変化 $\Delta\epsilon$ は，

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\mathrm{r}} - \epsilon = \frac{h\,c}{\lambda_r} - \frac{h\,c}{\lambda} = -\frac{2\,\beta}{1+\beta}\,\epsilon \qquad ⑬$$

となる。したがって，$\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}} = -\Delta\epsilon$ が成り立ち，光子が失ったエネルギーが宇宙ヨットのエネルギーの増加になる。すなわち，光子と宇宙ヨットの全エネルギーが保存される。

(11)　宇宙ヨット Y の速度が $c\,\beta$ のとき，一つの光子が帆で反射すると，そのエネルギー ϵ の減少量 $|\,\Delta\epsilon\,|$ が Y のエネルギーの増加量 $\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}$ になるのだから，一つの光子のエネルギーから宇宙ヨットのエネルギーへの変換効率として，

$$\eta = \frac{\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}}{\epsilon} = \frac{2\,\beta}{1+\beta} \qquad ⑭$$

を考えることができる。η は β の単調増加関数で，$\beta \rightarrow 1$ のとき $\eta \rightarrow 1$ となる。この極限値に専門家たちは興味を示すが，筆者にはその理由がわからない。

$\beta \rightarrow 1$ のとき，式 ③ より $\lambda_{\mathrm{r}} \rightarrow \infty$ となり，反射光子の運動量とエネルギーは 0 に近づく。よって，入射光子の運動量 p とエネルギー ϵ がそのまま宇宙ヨットの運動量変化 Δp_{Y} とエネルギー変化 $\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}$ になり，光子が宇宙ヨットに吸収される状態に近づく。ただそれだけのことである。ただし，このような入射光子の数 N_{i} は，$\beta \rightarrow 1$ のとき式 ⑥ より 0 に近づく。

(12)　宇宙ヨットを加速するときのエネルギー変換効率とは，レーザー光源から放射されたエネルギーのうち，宇宙ヨットのエネルギーに変換される割合のことである。

L 系から見て，ある時刻 t において帆に入射する単位時間あたりの光子数は，光源から単位時間あたりに放射される光子数 N ではなく，式 ⑥ の N_{i} である。したがって，微小時間 Δt の間に帆が得るエネルギー ΔE_{Y} は，

$$\Delta E_{\mathrm{Y}} = (\,N_{\mathrm{i}}\,\Delta t\,)\,\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}} = N\,(\,1-\beta\,)\,\Delta t\,\frac{2\,\beta}{1+\beta}\,\epsilon = \frac{2\,\beta\,(\,1-\beta\,)}{1+\beta}\,Q\,\Delta t \qquad ⑮$$

となる。よって，レーザー光源から宇宙ヨットへのエネルギーの変換効率 e は，

$$e = \frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{Q\,\Delta t} = \frac{2\,\beta\,(\,1-\beta\,)}{1+\beta} \qquad ⑯$$

と表される。この効率は，$\beta = 0$ と $\beta \rightarrow 1$ のときに 0 となり，$\beta = \sqrt{2} - 1$ のときに極大値 $2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ をとる。η と e の関係については後で述べる。

(13)　帆で反射して光源へ戻るレーザー光の単位時間あたりのエネルギー Q_{r} は，

$$Q_{\mathrm{r}} = S\,c\,n_{\mathrm{r}}\,\frac{h\,c}{\lambda_{\mathrm{r}}} = S\,c\,n\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\,\frac{h\,c}{\lambda}\,\frac{1-\beta}{1+\beta} = Q\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \qquad ⑰$$

となる。この式は光波を用いて導出した式 [文献 2 の式 (76)] と同じである。

(14)　光源に戻らないエネルギーの一部が宇宙ヨットのエネルギー E_{Y} の増加となり，残りは光源と宇宙ヨットの間の空間にため込まれる電磁場のエネルギー U の増加となる。その増加率は，

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = Q - Q_{\mathrm{r}} - \frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t} = Q\,\frac{2\beta\,(1+\beta^2)}{(1+\beta)^2} \tag{18}$$

と表される。よって，$\beta \to 1$ の極限においては次のようになる。

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} \to Q\,, \quad \frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t} \to 0\,, \quad Q_{\mathrm{r}} \to 0\,, \quad e \to 0$$

§2　ＫＬＺに対する筆者の意見１

効率 η と効率 e について，ＫＬＺ は次のように書いている。

「効率 η は局所的に定義されており，物理的に測定可能である。ところが，効率 e は一人の観測者が局所的に測定することができない。そのため因果律との関係で問題が生じ，全く物理的ではない。」

これを補足的に説明すると次のようになる。η の定義式 ⑭ に現れる $\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}$ と ϵ は，光源Ｌから距離 x だけ離れたところで局所的に定義された物理量であるから，そこに静止している一人の観測者がそれらを測定することは，原理的には可能である。ところが，e の定義式 ⑯ に現れる $\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}$ は位置 x で定義され，Q は光源 ($x = 0$) で定義される物理量であるから，それらを一人の観測者が同時に測定することはできない。したがって，それができるとして定義された効率 e は物理法則に反すると言うのである。

そして，ＫＬＺは論文の最後で，

「効率 e は非物理的 (nonphysical) であるが，光源に対して静止している観測者から見て，宇宙ヨットがどのように加速されるのかを考察する際，その本質を見極めるのに役立つ (insightful である) ことがあり得る。」

と書いている。筆者には，この一文は自己矛盾しているように思える。

KLZ と筆者の間で齟齬を来している原因は，効率 e の定義である。

一般的には，$x = 0$ にあるレーザー光源の出力は時刻 t の関数である。それを $Q_0(t)$ とする。また，位置 x_1 に静止している観測者が測定する宇宙ヨットの通過時刻を t_1 とし，宇宙ヨットのエネルギー E_{Y} の時刻 t_1 における時間変化率を $\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}(t_1)$ とする。ただし，光源にある時計 と観測者 の時計は合わせてあるものとする。このとき，KLZ による効率 e の定義は，

$$e(t_1) = \frac{\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}(t_1)}{Q_0(t_1)}$$

である。このように同時刻における $\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}$ と Q_0 の比でなければならない理由が筆者には分からない。KLZ も述べているように，$x = 0$ から x_1 までレーザー光が伝わるのに時間がかかるのだから，この式が物理的に無意味なのは明らかである。筆者が採用する効率 e の定義は，

$$e(t_1) = \frac{\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}(t_1)}{Q_0\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right)} \tag{19}$$

である。本稿では，$Q_0(t) = Q =$ 一定 を仮定しているので，式⑲は式⑯になる。この仮定が成り

立たない場合には，$Q_0(t)$ の測定は $x = 0$ に静止している観測者 A が行い，t_1 と $\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}(t_1)$ の測定は $x = x_1$ に静止している観測者 B が行なって，測定後にデータを持ち寄り，式⑲から効率 $e(t_1)$を計算すればよい。しかし, KLZ は観測者が一人であることにこだわっているようなので，その場合には次のようにすればよい。

光源での出力 $Q_0(t)$ の情報を，宇宙ヨットを加速するためのレーザー光とは別のレーザー光に載せ，観測者 B に送信する。観測者 B は時刻 t_1 のときに，その情報を受信すると同時に $\frac{\Delta E_{\mathrm{Y}}}{\Delta t}(t_1)$ を測定すればよいのである。

§3 KLZ に対する筆者の意見 2

効率 η と効率 e の関係を表す式として，KLZ は次のような効率 η' を計算している。

$$\eta' = \frac{\text{宇宙ヨットの}\textbf{運動エネルギー}\text{が微小時間 } dt \text{ の間に増加する量}}{\text{レーザー光源が微小時間 } d\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ の間に放射する全エネルギー}}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{Y}}}{\mathrm{d}t}\,dt}{Q \cdot \left(dt - \frac{dx}{c}\right)} = \frac{e}{1-\beta} = \frac{2\beta}{1+\beta} = \eta$$

ただし，Q が一定で，光線束が回折によって広がらないことを仮定している。これが η と e の関係を表す式であると意味ありげに言うのだが，筆者に言わせれば，$\eta' = \eta$ となるように η' の定義式の分母を導入しただけであって，この式になにか特別な意味があるとは思えない。

時刻 t のときに位置 x にある宇宙ヨットが微小時間 dt の間に $dx = v\,dt$ だけ進むならば，分母の $Q \cdot \left(dt - \frac{dx}{c}\right)$ は微小時間 dt の間に帆に入射するエネルギーを表す。一つの光子が帆に入射するときのエネルギー変換効率が η で，η は帆への入射光子数 $N'dt$ には依存しない。だから，$\eta' = \eta$ が成り立つのである。式で表せば，

$$\eta' = \frac{N'dt\ \Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}}{N'dt\ \epsilon} = \frac{\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}}{\epsilon} = \eta$$

という自明な式である。なお，η' の定義式の分子を**運動エネルギー**の増加量と言えるのは，$v \ll c$ の場合である。

筆者の意見では，宇宙ヨットのエネルギー変換効率を論じるとき，効率 η は不要である。

§4 Kipping の論文 (文献 4) に対する反論

(A) Kipping は§1 の (仮定 2) とそれから導かれる式 ③ は間違っていると主張する (注 2) 。ある瞬間における宇宙ヨット Y の速度を $c\beta$ として，一定速度 $c\beta$ で Y と並走する座標系 Y を導入する。Y 系から見て，反射光の振動数が入射光の振動数に等しいとすると，一つの光子が帆で反射するとき，光子のエネルギーが変化しないのだから，エネルギー保存則より宇宙ヨットのエネルギーも変化しない。したがって，Y 系から見て宇宙ヨットは静止したままとなる。ところが，光子の反射によって帆は力積を受けるので，宇宙ヨットは動き出すはずである。この矛盾は反射のときにレーザー

光の振動数が変化すると仮定すれば解消する，とKippingは言う。

そこで，Kippingは次のような式を立てる。L系から見たとき，入射光の振動数をν_{i}とし，反射光の振動数ν_{f}を未知数とする。また，宇宙ヨットの反射前の速度を$c\,\beta_{\mathrm{i}}$とし，反射後の速度$c\,\beta_{\mathrm{f}}$を未知数とする。一つの入射光子と宇宙ヨットの全エネルギーと全運動量が保存されるとすれば，宇宙ヨットの静止質量をmとして，

$$h\,\nu_{\mathrm{i}}+\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}}=h\,\nu_{\mathrm{f}}+\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{f}}^2}} \tag{⑳}$$

$$\frac{h\,\nu_{\mathrm{i}}}{c}+\frac{m\,c\,\beta_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}}=-\frac{h\,\nu_{\mathrm{f}}}{c}+\frac{m\,c\,\beta_{\mathrm{f}}}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{f}}^2}} \tag{㉑}$$

が成り立つ。これらをν_{f}とβ_{f}について解けば，

$$\nu_{\mathrm{f}}=\nu_{\mathrm{i}}\left(\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}+2\,r\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}}\right) \tag{㉒}$$

$$\beta_{\mathrm{f}}=\frac{4\,r^4\,(1-\beta_{\mathrm{i}})^2+\beta_{\mathrm{i}}+2\,r\,(1-\beta_{\mathrm{i}})\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}\;-2\,r^2\left(1-\beta_{\mathrm{i}}^2\right)}{1-4\,r^2\,(1-\beta_{\mathrm{i}})\left(\beta_{\mathrm{i}}-r^2\,(1-\beta_{\mathrm{i}})\right)} \tag{㉓}$$

$$r=\frac{h\,\nu_{\mathrm{i}}}{m\,c^2} \tag{㉔}$$

となる。これらの式をもとにして，Kippingはさまざまな計算をし，他の研究者が得た結果との相違点を論じている。論文出版後に判明した間違いを訂正して，計算をやり直した結果も，KLZの結論からわずかにずれており，このずれは，実際に宇宙ヨットを太陽に最も近い恒星ω Cen.へ送り込むとき，目標とする外惑星Proxima Centauri bへの接近に影響すると言う。これらについてはここでは触れない。と言うのは，後で述べるように，Kippingが指摘する矛盾は別の考え方で解消できるからである。ちなみに，式㉓は次のようなもっとすっきりした式に書き換えることができる。

$$\beta_{\mathrm{f}}=\frac{\beta_{\mathrm{i}}+2\,r\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}\;+2\,r^2\,(1-\beta_{\mathrm{i}})}{1+2\,r\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}\;+2\,r^2\,(1-\beta_{\mathrm{i}})} \tag{㉓′}$$

(B) 特殊相対論とその結論の一つである相対論的ドップラー効果の式を認めるならば，Y系から見たときの入射光の振動数ν_{i}'と反射光の振動数ν_{f}'は，それぞれ，

$$\nu_{\mathrm{i}}'=\sqrt{\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}}\;\nu_{\mathrm{i}}\;,\qquad \nu_{\mathrm{f}}'=\sqrt{\frac{1+\beta_{\mathrm{i}}}{1-\beta_{\mathrm{i}}}}\;\nu_{\mathrm{f}} \tag{㉕}$$

と表される。そして，式㉕と式㉒よりν_{f}'とν_{i}'の比を求めれば，

$$\frac{\nu'_{\mathrm{f}}}{\nu'_{\mathrm{i}}}=\frac{1+\beta_{\mathrm{i}}}{1-\beta_{\mathrm{i}}}\,\frac{\nu_{\mathrm{f}}}{\nu_{\mathrm{i}}}=\frac{1}{1+2\dfrac{h\,\nu_{\mathrm{i}}}{m\,c^2}\sqrt{\dfrac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}}}=\frac{1}{1+2\,r'} \tag{26}$$

$$r'=\frac{h\,\nu'_{\mathrm{i}}}{m\,c^2} \tag{27}$$

となる。さらに，式 ㉖ を，波長 $\lambda'_{\mathrm{i}}=c\,/\,\nu'_{\mathrm{i}}$ ，$\lambda'_{\mathrm{f}}=c\,/\,\nu'_{\mathrm{f}}$ を用いて表せば，

$$\frac{\lambda'_{\mathrm{f}}}{\lambda'_{\mathrm{i}}}=1+2\,\frac{h}{m\,c\,\lambda'_{\mathrm{i}}}$$

となる。これより，反射による波長変化 $\Delta\lambda'$ は，

$$\Delta\lambda'=\lambda'_{\mathrm{f}}-\lambda'_{\mathrm{i}}=2\,\frac{h}{m\,c} \tag{28}$$

と表される。$\dfrac{h}{m\,c}$ は宇宙ヨットのコンプトン波長である。たとえは，$m=1\ \mathrm{g}$ の場合，

$$\Delta\lambda'=2\times\frac{6.6\times10^{-34}\ \mathrm{Js}}{1\times10^{-3}\ \mathrm{kg}\times3\times10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}}}=4.4\times10^{-39}\ \mathrm{m}$$

となる。このような途轍もなく小さな値になるであろうことは，計算をしなくても推測できることである。このことから，Y 系から見たとき，帆での反射によるレーザー光の波長 (振動数) の変化は無視してよい，と言える。

式 ⑳ と式 ㉑ を立式するとき，次のようなことが暗黙のうちに仮定されている。一つの光子が巨視物体に入射して跳ね返されるとき，巨視物体は剛体のように振る舞い，物体全体で光子による力積を受けとめる，としているのである。しかし，実際に光子による力積を受けとめるのは，物体の構成要素，主として電子，である。

物体内に自由電子があって，これが光子を逆向きに跳ね返すと仮定しても，レーザー光の波長は電子のコンプトン波長 $\dfrac{h}{m_{\mathrm{e}}\,c}=2.4\times10^{-12}\ \mathrm{m}$ の 2 倍しか伸びない。この伸びは可視レーザー光の波長 (～ 10^{-7} m) に比べれば，無視できるほど小さい。

誘電体の帆に可視レーザー光が入射する場合には，個々の束縛電子は光子の衝突によって振動を始める。光子の集団は，その数密度が時間的にも空間的にも変化する波動となって押し寄せる。束縛電子とこのような光子の集団との相互作用を扱うとき，古典電磁気学では次のように考える。

振動数 ν'_{i} の可視レーザー光の電場成分が束縛電子を振動数 ν'_{i} で強制振動させる。振動する電子はマックスウェル方程式に従って振動数 ν'_{i} の電磁波を周囲に放射する。すべての束縛電子から放射される素元電磁波を重ね合わせたときに，反射方向でのみ強め合えば，入射光は全反射し，反射光の振動数は ν'_{i} となる。大雑把な見方かもしれないが，大筋では正しいであろう。

それでは，Kipping が指摘する矛盾はどのようにすれば解消されるのであろうか。

(C)　巨視物体の静止質量には，その構成要素である原子核と電子の静止質量の和の他に，それらの間の相互作用や熱運動のエネルギーと等価な質量も含まれている。

Y 系から見たとき，静止質量 m の宇宙ヨットに振動数 ν'_{i} の光子が一つ入射し，振動数を変えることなく跳ね返されるとする。このとき宇宙ヨットの静止質量が $\varDelta\mu$ だけ変化し，速度が $c\,\beta'_{\mathrm{f}}$ になったとする。この光子と宇宙ヨットの全エネルギーと全運動量が保存されるとすれば，

$$h\,\nu'_{\mathrm{i}} + m\,c^2 = h\,\nu'_{\mathrm{i}} + \frac{(\,m + \varDelta\mu\,)\,c^2}{\sqrt{1 - \beta'^2_{\mathrm{f}}}} \tag{29}$$

$$\frac{h\,\nu'_{\mathrm{i}}}{c} = -\frac{h\,\nu'_{\mathrm{i}}}{c} + \frac{(\,m + \varDelta\mu\,)\,c\,\beta'_{\mathrm{f}}}{\sqrt{1 - \beta'^2_{\mathrm{f}}}} \tag{30}$$

が成り立つ。これらを β'_{f} と $\varDelta\mu$ について解けば，

$$\beta'_{\mathrm{f}} = 2\,r', \qquad r' = \frac{h\,\nu'_{\mathrm{i}}}{m\,c^{\,2}} \tag{31}$$

$$\varDelta\mu = m\left(\sqrt{1 - \beta'^{\,2}_{\mathrm{f}}} - 1\right) \tag{32}$$

となる。$r' \ll 1$ であるから，$\varDelta\mu$ は次のような近似式で表される。

$$\varDelta\mu = -2\,m\,r'^{\,2} \tag{33}$$

宇宙ヨットの具体例として，高校生用の演習問題で取り上げた微小探査機を採用する。その静止質量 m は 5 g，照射レーザー光の波長 λ_{i} は 6×10^{-7} m，振動数 ν_{i} は 5×10^{14} Hz，光源での出力 Q は 30 GW である。この具体例では，質量欠損 $-\varDelta\mu$ は次のような途轍もなく小さな値となる。

$$-\varDelta\mu = 2 \times 5\ \mathrm{g} \times \left\{\frac{6.6 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js} \times 5 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}}{5 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg} \times (\,3 \times 10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}}\,)^2}\right\}^2 = 5.4 \times 10^{-66}\ \mathrm{g}$$

光源での出力 Q がそのまま L 系で静止している帆への入力になるとすれば，帆に入射する単位時間あたりの光子数 N_{i} は，

$$N_{\mathrm{i}} = N = \frac{Q}{h\,\nu_{\mathrm{i}}} = \frac{30 \times 10^{9}\ \mathrm{Js^{-1}}}{6.6 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js} \times 5 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}} = 9.1 \times\ 10^{28}\ \mathrm{s^{-1}}$$

となる。このとき，宇宙ヨットの単位時間あたりの質量欠損 $-\dfrac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}$ は，

$$-\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t} = N_{\mathrm{i}}\,(\,-\varDelta\mu\,) = 4.9 \times 10^{-40}\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$$

となる。この質量欠損と等価なエネルギーは，

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}\right)c^2 = 4.4 \times 10^{-23}\ \mathrm{Js^{-1}}$$

である。

入射レーザー光の波長に関係なく，反射率が 100 % となる帆を実際に作ることは困難であるから，帆への入力 $Q = 3 \times 10^{10}\ \mathrm{Js^{-1}}$ の一部が帆に吸収されることは避けられない。吸収されたエネルギーの一部は熱放射として宇宙空間に放出され，残りが熱エネルギーとなる。この熱エネルギーに比べれば，$\left(-\dfrac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}\right)c^2$ は大海の一滴にもならない。

(D)　最後に，L 系から見て，宇宙ヨットが運動している場合に同様の計算をしてみよう。

宇宙ヨットの速度が $c\,\beta_{\mathrm{i}}$ のときに，帆に振動数 ν_{i} の光子が一つ入射し，振動数 $\nu_{\mathrm{f}} = \nu_{\mathrm{i}}\,\dfrac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}$ の光子として瞬時に反射されるとする。その結果，宇宙ヨットの静止質量が m から $m+\Delta\mu$ に変化し，速度が $c\,\beta_{\mathrm{f}}$ になったとする。このとき全エネルギーと全運動量の保存則より，

$$h\,\nu_{\mathrm{i}} + \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}} = h\,\nu_{\mathrm{i}}\,\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}} + \frac{(\,m+\Delta\mu\,)\,c^2}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{f}}^2}} \qquad ㉞$$

$$\frac{h\,\nu_{\mathrm{i}}}{c} + \frac{m\,c\,\beta_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}} = -\frac{h\,\nu_{\mathrm{i}}}{c}\,\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}} + \frac{(\,m+\Delta\mu\,)\,c\,\beta_{\mathrm{f}}}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{f}}^2}} \qquad ㉟$$

が成り立つ。これらを β_{f} と $\Delta\mu$ について解けば，

$$\beta_{\mathrm{f}} = \left(\beta_{\mathrm{i}} + 2\,r\sqrt{\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}}\right)\left(1 + 2\,r\,\beta_{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}}\right)^{-1} \qquad ㊱$$

$$\Delta\mu = m\left(\sqrt{1-4r^2\,\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}} - 1\right) \qquad ㊲$$

$$r = \frac{h\,\nu_{\mathrm{i}}}{m\,c^2}$$

となる。$r \ll 1$ であるから，r の 1 次の項まで残して β_{f} の近似式を求めれば，

$$\beta_{\mathrm{f}} = \beta_{\mathrm{i}} + 2\,r\sqrt{\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}}\,(\,1-\beta_{\mathrm{i}}^2\,) \qquad ㊳$$

となる。式 ㊳ より，光子が一つ反射するときの宇宙ヨットの速度変化 $c\,\Delta\beta = c\,\beta_{\mathrm{f}} - c\,\beta_{\mathrm{i}}$ が求まる。微小時間 Δt の間に帆に入射する光子数は $N_{\mathrm{i}}\,\Delta t$ であるから，この間の宇宙ヨットの速度変化 $c\,\Delta B$ は，

$$c\,\Delta B = (\,N_{\mathrm{i}}\,\Delta t\,)\,(\,c\,\Delta\beta\,) = N(\,1-\beta_{\mathrm{i}}\,)\,\Delta t \cdot 2\,c\,r\sqrt{\frac{1-\beta_{\mathrm{i}}}{1+\beta_{\mathrm{i}}}}\,(\,1-\beta_{\mathrm{i}}^2\,)$$
$$= \frac{2\,(\,N\,h\,\nu_{\mathrm{i}}\,)}{m\,c}\,(\,1-\beta_{\mathrm{i}}\,)^2\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2}\;\Delta t$$

となる。$\Delta t \to 0$ の極限をとれば，宇宙ヨットの加速度 a は次のようになる。

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{c\,\Delta B}{\Delta t} = \frac{2\,Q}{m\,c}\,(\,1-\beta_{\mathrm{i}}\,)^2\sqrt{1-\beta_{\mathrm{i}}^2} \qquad ㊴$$

当然のことながら，この加速度は光波を用いて導出した加速度 [文献 2 の式 (77)] と一致する。

同様に，宇宙ヨットの質量減少率は，r^2 の項まで残して近似計算をすれば，

$$-\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t} = N_{\mathrm{i}}\,(\,-\Delta\mu\,) \fallingdotseq 2\,N\,m\,r^2\,\frac{(\,1-\beta_{\mathrm{i}}\,)^2}{1+\beta_{\mathrm{i}}} \qquad ㊵$$

となる。$\beta_i = 0$ の場合，式 ㊵ は (C) で得た結果と一致する。

文献 1　N . Kulkarni ,P . M . Lubin , Q . Zhang :
Relativistic solutions to directed energy , Proc . of SPIE Vol . 9981 , Aug . 2016
文献 2　斉藤全弘　：宇宙ヨットの相対論的運動方程式とその解,
https://www.eonet.ne.jp/～excitingphysics/mondai15.pdf
文献 3　アインシュタイン　：　相対性理論　，内山龍雄　　訳・解説　岩波文庫
文献 4　D . Kipping : Relativistic Light Sails , A . J . , 153 : 277 , 2017 June

(注　1)　式 ⑪ の証明

宇宙ヨットの帆が一つの光子を反射するとき，理論的には β と宇宙ヨットの静止質量 m がそれぞれ $\Delta\beta$ と $\Delta\mu$ だけ変化し，その結果，ϵ_{Y} と p_{Y} がそれぞれ $\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}}$ と Δp_{Y} だけ変化する，と考えられる。このとき，

$$\epsilon_{\mathrm{Y}} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{と} \quad p_{\mathrm{Y}} = \frac{m\,c\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

の全微分は，

$$\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial\,\epsilon_{\mathrm{r}}}{\partial\,\beta}\,\Delta\beta + \frac{\partial\,\epsilon_{\mathrm{r}}}{\partial\,m}\,\Delta\mu = \frac{m\,c^2\,\beta}{(\,1-\beta^2\,)^{3/2}}\,\Delta\beta + \frac{c^2}{(\,1-\beta^2\,)^{1/2}}\,\Delta\mu$$

$$\Delta p_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial\,p_{\mathrm{Y}}}{\partial\,\beta}\,\Delta\beta + \frac{\partial\,p_{\mathrm{Y}}}{\partial\,m}\,\Delta\mu = \frac{m\,c}{(\,1-\beta^2\,)^{3/2}}\,\Delta\beta + \frac{c\,\beta}{(\,1-\beta^2\,)^{1/2}}\,\Delta\mu$$

と表される。これらより $\Delta\beta$ を消去すれば，

$$\Delta\epsilon_{\mathrm{Y}} = c\,\beta\,\Delta p_{\mathrm{Y}} + c^2\,(\,1-\beta^2\,)^{1/2}\,\Delta\mu$$

となる。§ 4 の (C) で議論するように，宇宙ヨットでは十分よい近似で $\Delta\mu = 0$ とすることができるので，式 ⑪ が成り立つのである。

(注 2)　このように「アインシュタインは間違っている」と公言するのは勇気が要る。Kipping は論文のなかで，

「アインシュタインとその後継者たちは，杓子定規に言えば，すべて間違っている，
と断定してここで議論することに，いくばくかのおそれを抱いている。」

と書いている。過去において数え切れないほどの人たちが，とくに相対論について，「アインシュタインは間違っている」と書いてきたが，結局は無視されるかアホ・バカ呼ばわりされて，葬り去られてしまった。Kipping と Einstein の争点は，相対論そのものではなく，古典電磁気学についてであると筆者は思うのだが，それでも普通の研究者なら，「アインシュタインは間違っている」と公言することには躊躇する。しかしながら，Kipping の主張が正しいかどうかを判断するには，彼の論文を読み込まなくてはならない。その過程で物理に対する理解が深まるので，「アインシュタインは間違っている」と主張する論文は，それなりに読む価値がある。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約　は　こちらへ