

静止とは何か

斉藤全弘

次の入試問題(神戸大学 2012 年)を題材にして静止とは何かを考える。

図 1 のように地面に対して水平に一定の速さで回転する摩擦のある円盤の上に小物体が置かれている。次の問 1~4 に答えなさい。なお、解答の導出過程も示しなさい。ただし、重力加速度を g とし、文中に与えられた物理量の他に解答に必要な物理量があれば、それらを表す記号はすべて各自で定義し、明示しなさい。

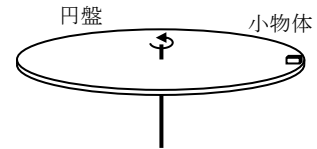


図 1

問 1, 問 2 省略

問 3 円盤の角速度を序々に増大させたところ、ある角速度 ω_0 で小物体は円盤に対して動き始めた。円盤に乗った観測者が見た場合の小物体が動き出す直前に小物体にはたらく力の名称と方向を右の図に記入しなさい。また、円盤に対する小物体の静止摩擦係数を μ_0 を用いて答えなさい。

問 3



問 4 省略

出題者が想定している問 3 の答は次のようなものであろう。

回転軸のまわりに角速度 ω_0 で回転している座標系から見れば、小物体は静止しており、小物体にはたらく力は図 2 のようになる。

小物体の質量を m 、回転軸からの距離を r 、垂直抗力の大きさを N 、静止摩擦係数を μ とすれば、小物体がすべり出す直前において、力のつりあいの式は、

$$0 = m r \omega_0^2 - \mu N \qquad 0 = N - m g$$

となる。これらより N を消去して μ を求めれば、次式を得る。

$$\mu = \frac{r \omega_0^2}{g}$$

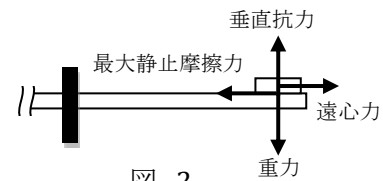


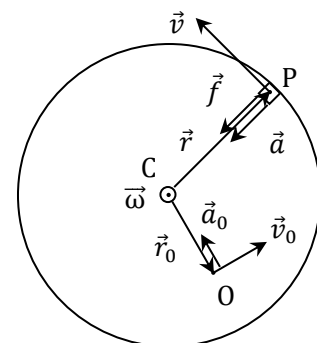
図 2

この答におかしなところはなにもないのだが、筆者は別解があると考える。

問題文には観測者が円盤上のどこに立っているのか明示されていないので、一般的な状況を想定し、図 3 のように観測者 O が小物体 P から離れた位置に立っているものとする。

地面(慣性系と見なす)から見たとき、円盤の中心 C に対する O と P の位置ベクトルを \vec{r}_0, \vec{r} とし、円盤の角速度を $\vec{\omega}$ とする。

$\vec{\omega}$ の向きは鉛直上向きである。



慣性系から見た場合

図 3

このとき、OとPの速度と加速度は、

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{\omega} \times \vec{r}_0 & \vec{a}_0 &= \vec{\omega} \times \vec{v}_0 = -\omega^2 \vec{r}_0 \\ \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} & \vec{a} &= \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

である。Pにはたらく静止摩擦力は、運動方程式より、

$$\vec{f} = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r}$$

と表される。つぎに、Oに対するPの相対運動に目を向けると、

$$\begin{aligned} \text{相対位置} &: \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_0 \\ \text{相対速度} &: \vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \\ \text{相対加速度} &: \vec{a}_r = \vec{a} - \vec{a}_0 = -\omega^2 \vec{\rho} \end{aligned}$$

であるから、Oから見たPは、半径 $\rho = |\vec{\rho}|$ の円周上を、一定の角速度 $\omega = |\vec{\omega}|$ で円運動していることがわかる。このとき、

$$\begin{aligned} m\vec{a}_r &= m\vec{a} - m\vec{a}_0 \\ &= \vec{f} + (-m\vec{a}_0) \end{aligned}$$

であるから、Pにはたらく静止摩擦力 \vec{f} と慣性力 $-m\vec{a}_0$ の合力が等速円運動の向心力の役目を果たしているのである

(図4参照)。以上のことから、神戸大学の問3の別解として次のようなものが考えられる。

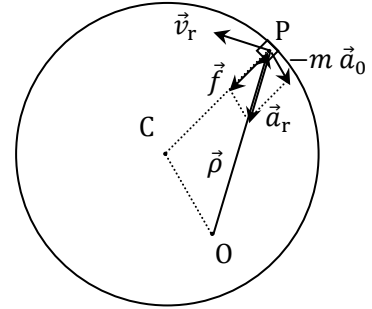


図4 回転円盤上の観測者Oが小物体Pを見た場合

図4

図5のように、円盤上の観測者Oが見たとき、質量 m の小物体にはたらく力の鉛直成分は重力 mg と垂直抗力 N で、水平成分は矢印の向きに最大静止摩擦力 \vec{f}_{\max} と慣性力 $-m\vec{a}_0$ である。ただし、 \vec{a}_0 は慣性系から見たときのOの加速度である。

Oに対するPの相対運動は角速度 ω_0 の等速円運動で、その相対加速度を \vec{a}_r とすれば、

$$m\vec{a}_r = \vec{f}_{\max} + (-m\vec{a}_0)$$

が成り立つ。よって、

$$\vec{f}_{\max} = m(\vec{a}_0 + \vec{a}_r) = m\vec{a}$$

となる。ただし、 \vec{a} は慣性系に対するPの加速度である。

一方、円盤とPの間の静止摩擦係数を μ とすれば、

$$|\vec{f}_{\max}| = \mu N$$

であるから、

$$\mu = \frac{|\vec{f}_{\max}|}{N} = \frac{m|\vec{a}|}{mg} = \frac{r\omega_0^2}{g}$$

となる。ただし、 r は円盤の中心からPまでの距離である。

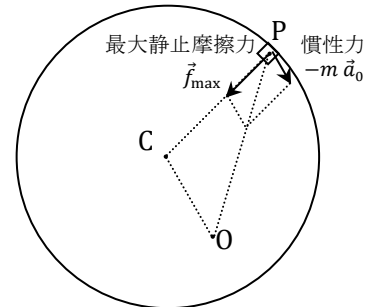
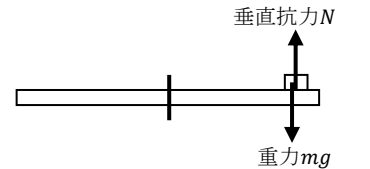


図5

どちらの解答も円盤上の観測者 O が小物体 P の運動状態を見て立式しているのだが、運動状態が 2 つあるというのはどういうことなのであろうか？

答は次のとおりである。

観測者 O が小物体 P を見てその運動を解析するためには、座標軸を設定しなければならない。その座標軸が 2 つの解答で異なっているのである。

まず、観測者 O を原点として円盤に固定された図 6 のような回転座標系 (x, y) を採用すれば、小物体 P の位置座標の値は変化しない。このとき P は座標系 $O - x y$ に対して静止しているという。このような回転座標系でも力のつりあいの式が成り立つとすると、最初の解答のように、 P には遠心力 $m\omega^2 \vec{r}$ がはたらいていると考えなければならない。

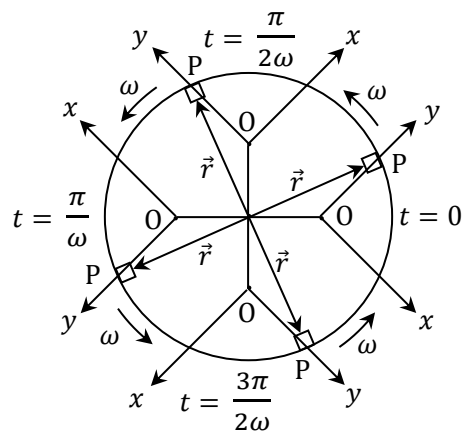


図 6

つぎに、観測者 O を原点として、 x' 軸と y' 軸が慣性系の X 軸と Y 軸に平行な座標軸を採用すれば、小物体 P の位置座標は原点 O に対して一定の角速度 ω で回転する(図 7 参照)。このような座標系 $O - x' y'$ (これをなんと言うのだろうか)でも運動方程式が成り立っているとすると、別解のように、 P には慣性力 $-m\vec{a}_0$ がはたらいていると考えなければならない。

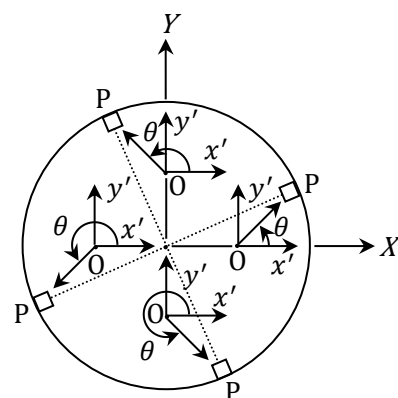


図 7

静止衛星 S を地上から観測するとき、地上の景色に対して S が静止していると見る立場が座標系 $O - x y$ に対応し、天上の星座に対して S が円運動していると見る立場が座標系 $O - x' y'$ に対応する。ここでいう静止の定義は次のようなものである。

ある座標軸を設定して、物体の座標の値が時間的に変化しないとき、その物体はその座標軸に対して静止していると言う。

当然のことながら、静止は絶対的な概念ではない。円盤上の観測者 O が小物体 P を見ているのだが、座標軸の設定の仕方によって、同じ物体 P が静止していると言うこともできるし、運動していると言うこともできるのである。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)