

半透鏡での反射による位相のずれは π ではない (2)

§1 金属層での反射と透過

前回は、ガラス板（代用半透鏡）による光の振幅反射率と振幅透過率を求め、それらを用いて薄いガラス板での反射と透過による位相のずれが、それぞれ $\pm\pi/2$ と 0 になることを示した。今回は、ガラス板の片面に金属を蒸着した真正半透鏡を考察する。その金属層による光の振幅反射率と振幅透過率を求めるための公式を導出し、それに基づいて金属層での反射と透過による位相のずれを計算する。

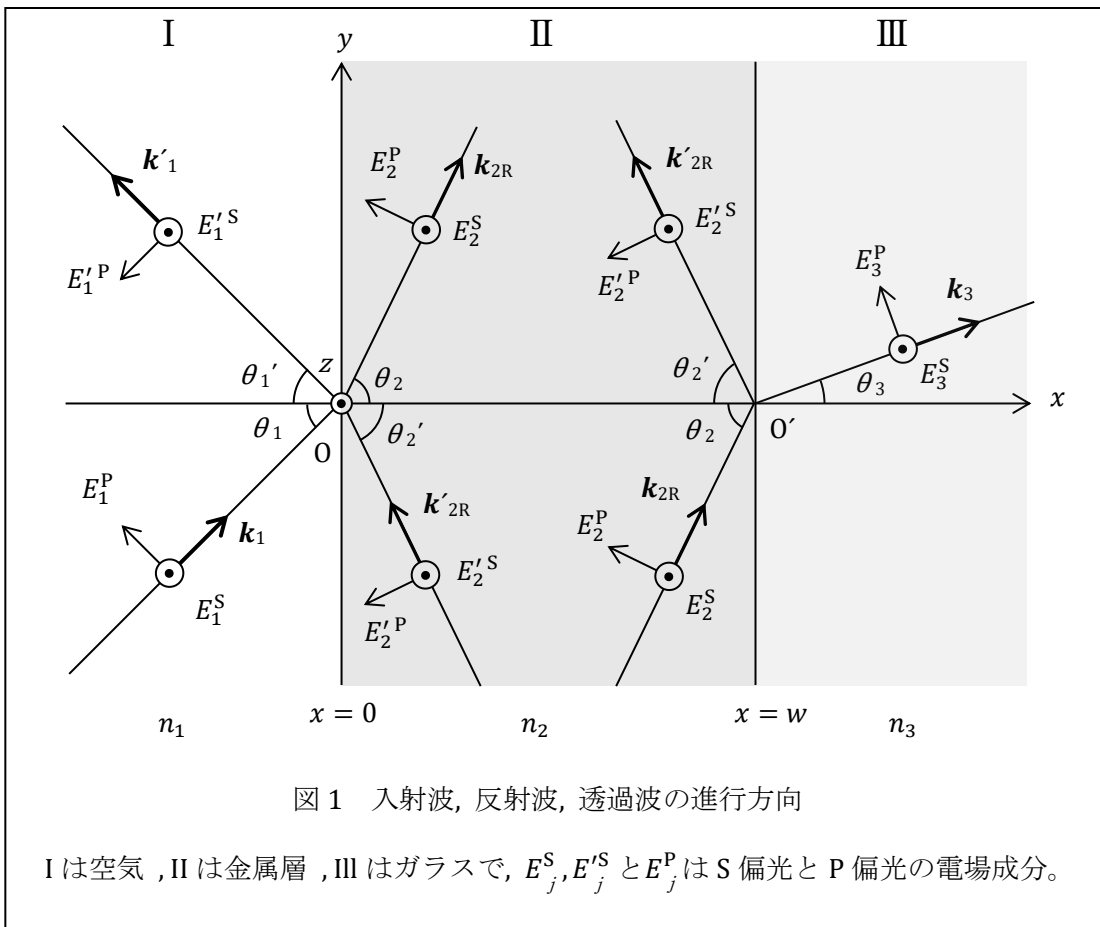


図1のIは空気, IIは厚さ w の金属層, IIIはガラス板である。いずれも一様かつ等方的で、それぞれの屈折率を $n_1=1$, $n_2 = n_R - in_i$, $n_3 \sim 1.5$ とする。IとIIの境界面に入射角 θ_1 で入射した波長 λ の平面波は、IIへ屈折した後、2つの境界面で多重反射をしながらIとIIIへ出ていく。このような無数の平面波が重なって、合成反射波（反射角 θ_1' ）と合成透過波（透過角 θ_3 ）が形成される。IIの中には θ_2 方向と θ_2' 方向に伝わる2つの合成平面波が存在している。

図1のように、座標軸 (x, y, z) を設定し、太い矢印の向きに伝わる入射波および合成波の波数ベクトルを $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_3$ とする。その実部（添字 R で表す）が光波の伝

播方向を表すので,

$$\begin{aligned}\tan \theta_j &= k_{jyR} / k_{jxR} \quad (j=1, 2, 3) \\ \tan \theta'_j &= -k'_{jyR} / k'_{jxR} \quad (j=1, 2)\end{aligned}\quad (1)$$

が成り立つ。それぞれの領域での複素表示による電場成分は、角振動数を ω として,

$$\begin{aligned}E_j &= A_j \exp(i[\omega t - k_{jx}x - k_{jy}y]) \quad (j=1, 2) \\ E'_j &= A'_j \exp(i[\omega t - k'_{jx}x - k'_{jy}y]) \quad (j=1, 2) \\ E_3 &= A_3 \exp(i[\omega t - k_{3x}(x-w) - k_{3y}y])\end{aligned}$$

と表される。磁束密度は $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega$ から求めることができる。ここでは y 軸方向の並進対称性がある場合を考えているので、波数ベクトルの y 成分は正の実数である。

境界面 $x=0$ と $x=w$ での電磁場に対する境界条件は、電場成分 E_y, E_z と電束密度成分 $D_x = \varepsilon E_x$ と磁束密度成分 B_x, B_y, B_z のすべてが境界面の両側で等しくなることである。 $\varepsilon = \varepsilon_0(c k/\omega)^2$ は媒質の誘電率である。ただし、 ε_0 は真空の誘電率、 c は真空での光速で、透磁率はすべて真空の透磁率に等しいとしている。

まず、S 偏光の場合を考える。 $x=0$ での E_z の連続性より、

$$A_1 \exp(-ik_{1y}y) + A'_1 \exp(-ik'_{1y}y) = A_2 \exp(-ik_{2y}y) + A'_2 \exp(-ik'_{2y}y)$$

を得る。これが任意の y に対して成り立つことから、

$$k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y} = k'_{2y} \quad (2)$$

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 \quad (3)$$

を得る。これらは B_x の連続性から導くこともできる。一方、屈折率の定義式 $n^2 = (c k/\omega)^2 = (c/\omega)^2 (k_x^2 + k_y^2)$ より、

$$\frac{k_1^2}{n_1^2} = \frac{k_1'^2}{n_1'^2} = \frac{k_2^2}{n_2^2} = \frac{k_2'^2}{n_2'^2} = \frac{k_3^2}{n_3^2} \quad (4)$$

が成り立つ。これと(2)より、

$$k'_{1x} = -\sqrt{k_1'^2 - k_1'^2} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1y}^2} = -k_{1x} = -k_1 \cos \theta_1 \quad (5)$$

$$k'_{2x} = -k_{2x} = -k_1 \sqrt{n_2^2 - (\sin \theta_1)^2} \quad (6)$$

を得る。さらに(1),(2),(4)と(5),(6)より、 $\theta'_1 = \theta_1$ 、 $\theta'_2 = \theta_2$ となる。同様にして、 $x=w$ での E_z または B_x の連続性より、

$$k_{2y} = k'_{2y} = k_{3y} \quad (7)$$

$$A_2 \exp(-ik_{2x}w) + A'_2 \exp(+ik_{2x}w) = A_3 \quad (8)$$

を得る。ここで、

$$g = \exp(-ik_{2x}w) \quad (9)$$

とおけば、(8)は

$$gA_2 + g^{-1}A'_2 = A_3 \quad (10)$$

となる。さらに(1),(2),(4)と(7)より、 $n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3$ と

$$k_{3x} = k_1 \sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1}$$

を得る。

つぎに, $x=0$ と $x=w$ での B_y の連続性から,

$$k_{1x}(A_1 - A'_1) = k_{2x}(A_2 - A'_2) \quad (11)$$

$$k_{2x}(gA_2 - g^{-1}A'_2) = k_{3x}A_3 \quad (12)$$

を得る。(3),(10),(11)と(12)から A_2 と A'_2 を消去し, 振幅反射率 $r=A'_1/A_1$ と振幅透過率 $t=A_3/A_1$ を求めれば,

$$r = \frac{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})}{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})}$$

$$t = \frac{4gk_{1x}k_{2x}}{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})}$$

となる。

P 偏光の場合も同様の計算によって次式を得る(文献 1)。

$$r = \frac{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x})}{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})}$$

$$t = \frac{4gn_1n_2n_3k_{1x}k_{2x}}{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})}$$

エネルギー反射率 R とエネルギー透過率 T は

$$R = |r|^2$$

$$T = |t|^2 k_{3x}/k_{1x}$$

から求めることができる。また, 複素数の r と t を極座標表示

$$r = |r| \exp(i \delta_r)$$

$$t = |t| \exp(i \delta_t)$$

で表せば, 偏角 δ_r と δ_t はそれぞれ入射波に対する合成反射波と合成透過波の位相のずれを表し,

$$\delta_r = \text{Arg}(r) \quad , \quad \delta_t = \text{Arg}(t)$$

から求めることができる。ただし, δ_t は図 1 の O 点と O' 点での位相の差であることに注意しなければならない。これらの結果が示すように, 半透鏡の金属層での反射と透過による位相のずれは, 金属層の複素屈折率 n_2 と厚さ w , ガラス板の屈折率 n_3 および入射波の偏りと入射角 θ_1 に依存する。

§2 金属の複素屈折率

角振動数 ω の光波に対する金属の複素屈折率 $n_2 = n_R - i n_i$ は

$$n_2 = \sqrt{1 + \{i \epsilon_0 \rho \omega (1 + i \omega \tau)\}^{-1}}$$

$$\tau = m / (N e^2 \rho)$$

で与えられる(文献 2)。ここに, ρ は金属の抵抗率, τ は自由電子の平均自由時間で, N は自

由電子の個数密度, m と e は電子の質量と電気量である。ただし, この式では束縛電子からの寄与が考慮されていない。1 個の原子が f 個の自由電子を供給しているとする,

$$N = f N_A D / \mu$$

と表される。ただし, N_A はアボガドロ定数, D は金属の密度, μ は単位物質質量当たりの質量である。

一例として銀の複素屈折率を計算してみよう。物理定数表によれば,

$$D = 10.5 \text{ g/cm}^3 \quad \rho = 1.62 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$$

である。これらを上式に代入すれば, 波長 λ [nm] の光波に対する複素屈折率は

$$n_2 = \sqrt{1 - \{3.70\lambda^2 / (7.07 \times 10^4 f^{-1} - i\lambda)\}}$$

となる。 $f=1$ として計算すると,

$$\lambda=380[\text{nm}] \text{ のとき, } n_2 = 0.00793 - 2.56i$$

$$\lambda=770[\text{nm}] \text{ のとき, } n_2 = 0.0308 - 5.48i$$

となる。 f の値を変えて計算すると, 可視領域では n_R と n_i はともに f と λ の単調増加関数であることがわかる。このように光をよく反射する金属の可視領域での屈折率は

$$n_2 = n_R - i n_i \quad (n_i \sim 1, n_R \ll n_i)$$

と表される。

§3 数値計算

簡単のために, 真正半透鏡の金属層の複素屈折率が $n_2 = -i n_i$ である場合を考察する。この場合, 金属層の厚さ w が大きければ, 入射波は金属層の表面で全反射する。しかし, $w \ll \lambda$ であれば, 金属層内を y 軸の正の向きに伝わるエバネッセント波の一部がガラス側に漏れ出し, 透過波になる。あるいは粒子の観点からすれば, 光子が空気側からガラス側へトンネル効果によって透過すると考えることもできる。

以下では, $n_1=1, n_3=1.5, \theta_1=45^\circ$ とする。このとき, $\theta_3 = 28.13^\circ$ で,

$$k_{1x} = k_{1y} = k_1 / \sqrt{2}$$

$$k_{2x} = -i k_1 \sqrt{n_i^2 + 0.5}$$

$$k_{3x} = k_1 \sqrt{1.5^2 - 0.5}$$

となる。これらを用いれば, r と t および R と T は n_i と g の関数となる。ここでは $n_i = 2.5$ (紫) と $n_i = 5.5$ (赤) の 2 つ場合について数値計算をする。それぞれの場合において, まず g ($0 < g < 1$) にいくつかの適当な値を代入して R と T の値を計算する。次にそれらをもとにして, $R=T=0.5$ を満たす g の値 g_0 を反復収束法で求める。 g_0 が求まれば, (9) より金属層の厚さ w を計算することができる。このようにして求めた g_0 と w/λ , およびそのときの r, t, δ_r, δ_t の値を S 偏光と P 偏光に分けて表 1 に与えてある。

$r', t', \delta_r', \delta_t'$ の欄は光波が逆行する場合, すなわちガラス板から金属層へ入射角 $\theta_3 = 28.13^\circ$ で入射する場合の値である。 R と T は (n_1, k_{1x}) と (n_3, k_{3x}) の交換に対して対称

であるから、逆行させても値は変わらない。これらの結果が示すように、 δ_r と δ_t の値は π や 0 ではない。また、金属層の厚さは、 n_i が 2.5 程度の紫のときは波長の 3.5~5.0 % で、 n_i が 5.5 程度の赤のときは波長の 0.9~1.4 % でなければならない。

表1 半透鏡の金属層による振幅反射率と振幅透過率、
および反射と透過に伴う位相のずれ

n_i	S 偏光		P 偏光	
	2.5	5.5	2.5	5.5
g_0	0.5629	0.7306	0.4441	0.6054
w / λ	0.03521	0.00901	0.04972	0.01440
r	-0.5544+0.4389i	-0.6020+0.3710i	0.2875-0.6460i	0.4797-0.5195i
t	0.4488+0.2567i	0.4027+0.3242i	0.4948+0.1497i	0.4143+0.3092i
δ_r [rad]	2.4719	2.5893	-1.1521	-0.8252
δ_t [rad]	0.5196	0.6778	0.2938	0.6411
r'	-	-0.2339+0.6673i	0.1189-0.6970i	0.3615-0.6077i
t'	0.09727+0.7004i	0.7534+0.6065i	0.9257+0.2801i	0.7751+0.5784i
δ_r' [rad]	1.7088	1.9079	-1.4019	-1.0342
δ_t' [rad]	0.5196	0.6778	0.2938	0.6411

§4 真正半透鏡を用いたマイケルソン干渉計

前回、代用半透鏡を用いたマイケルソン干渉計での干渉条件を導いた。真正半透鏡を用いた場合でも、同様の計算によって干渉条件を導き出せる。紙幅の関係で、ここでは結論だけを以下に記す。計算の詳細は文献(3)にある。

まず、金属層の複素屈折率が純虚数である場合、検出器 D に達する光と光源 S に戻る光のエネルギーの割合 F_D と F_S は、 $F_D + F_S = 1$ を満たすことがわかる。 $F_D = 1$ または 0 とおけば D での干渉条件を得る。代用半透鏡の場合と違って、半透鏡のガラス板の厚さ d が波長に比べて十分小さいときでも、その干渉条件は大学入試問題などで正解とされる常識的な干渉条件と一致しない。

次に、複素屈折率の実部が 0 でない場合には、金属層で光の吸収が起こる。この場合、具体例に対して F_D と F_S を数値計算で求めると、 d が特定の値をとるときに、 D での干渉条件が常識的な干渉条件と一致することがあるが、それは例外であり、一般的には一致しない

ことが確かめられる。副産物として、金属層でのエネルギーの吸収率や補償板から光学系の外へ出ていくエネルギーの割合も計算することができる。

参考文献

- (1) 斉藤全弘 : マイケルソン干渉計における光波の干渉, 駿台フォーラム 第 21 号(2003)p.95.
- (2) ファインマン, レイトン, サンズ : ファインマン物理学 IV , 岩波書店(1971) p.178.
- (3) 斉藤全弘 : <http://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/>

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)