問題 9　浮沈子とガリレオ温度計

水の浮力を用いた浮沈子というおもちゃとエチルアルコールの浮力を用いたガリレオ温度計について考察する。

大気圧を p_0，重力加速度の大きさを g，水の密度を ρ とする。ρ の値は水圧に依らず一定である。空気の密度は ρ に比べれば無視できるほど小さい。

(A) 水が静止しているとき，水圧は方向に依らない（パスカルの法則）。すなわち，水圧 p の位置に微小面積 ΔS の平面があるとき，その平面の片面にはたらく水圧による力の向きは平面に垂直で，その大きさは，平面がどの方向を向いていても，$p\,\Delta S$ である。

(1) 容器内の水が静止しているとき，深さ y での水圧はいくらか。

(2) 水中に，図 1 のような断面積 S，高さ h の四角柱があるとき，四角柱にはたらく浮力の大きさは $\rho\,S\,h\,g$ であることを示せ。

(3) 図 2 のような一つながりの容器に水を入れる。水が容器を満たして静止したとき，同じ高さの 2 点 A と B の水圧は等しいことを示し，それを用いて，水面の高さは両側で同じであることを示せ。

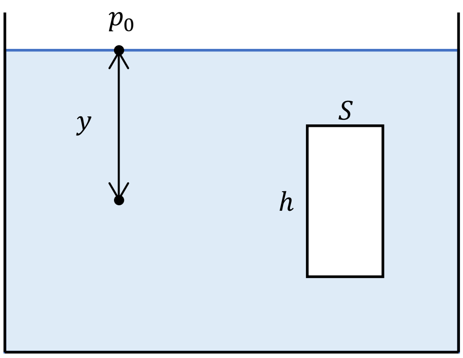


図　1

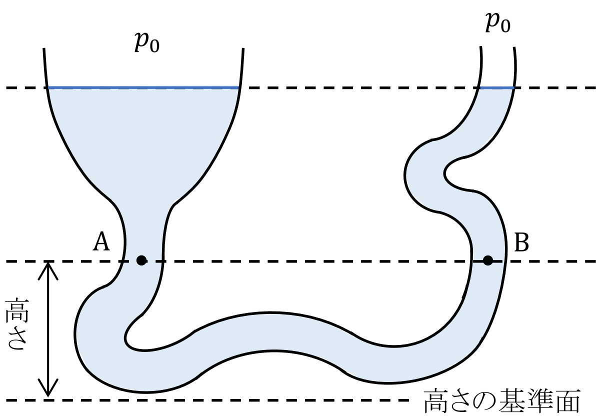


図　2

(B) 一端を閉じた小さな透明円筒管 C に適量の水を入れ，逆さまにして水槽内で手放すと，図 3 のように，水面から高さ a だけ C の底面が浮き上がり，静止した。C の質量は m，断面積は S で，管壁の厚さは無視してよい。水槽内の水温と C 内の気温は常に室温に等しく，変化しない。

(4) 水槽の水面と C 内の水面の高低差 h_0 はいくらか。

Cの底面に鉛直下向きの力を加えて，Cをゆっくり水中に沈めた。底面の深さが y_S になったとき，力を加えなくてもその位置でCは静止した。

(5) y_S を求め，p_0 , g , ρ , a , S , m のなかから必要なものを用いて表せ。

しかし，この位置は不安定であるために，わずかな擾乱によって，Cは水面まで浮かび上がるか，水槽の底まで沈んでしまう。

(6) その理由を述べよ。

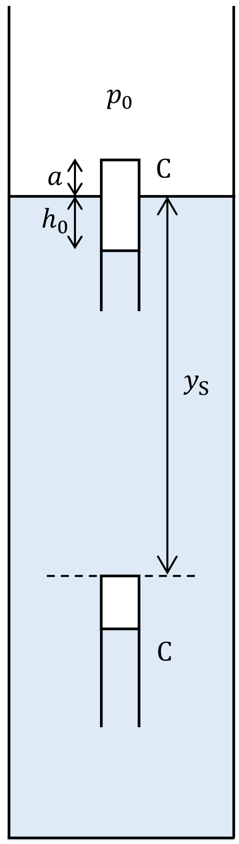


図　3

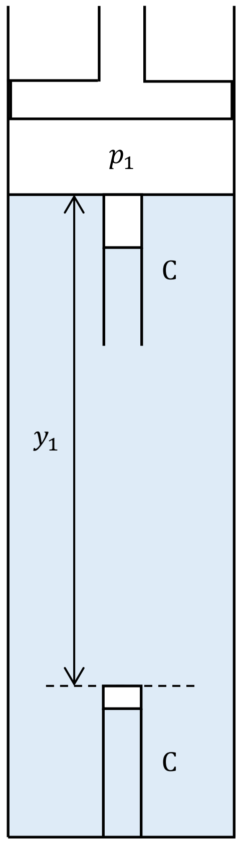


図　4

次に，図3のようにCが水面上に浮かんでいるとき，図4のように，水槽の上部にピストンを取り付ける。ピストンをゆっくり押し下げると，Cの底面がゆっくり下がり，水面上部の気圧が p_1 になったとき，Cの底面が水面と同じ高さになった。

(7) p_1 を求め，p_0 , g , ρ , a , S , m のなかから必要なものを用いて表せ。

このつりあいの位置は，(6) で考察したように不安定であるので，水面上部の気圧が p_1 のまま，C は水槽の底まで沈んでしまい，C の底面の深さは y_1 となった。

このあと，ピストンをゆっくり引き上げると，水面上部の気圧が p_2 になったとき，C は水面まで浮き上がった。

(8) p_2 を求め，p_1 , ρ , g , y_1を用いて表せ。

円筒管 C のように，水圧の変化に伴って水中を上下に動くうきを浮沈子という。

(C) ある液体の密度 $\rho_{\mathrm{e}}(t)$ が，温度 t の変化に対して，図 4 のように直線的に変化する。透明容器にこの液体と体積 1 cm^3 のプラスチック球を 10 個程度入れて密封し，温度計を作る。プラスチック球は中空で，中が空気のときの質量は 0.770 g である。それぞれの球には，1 個あたり 0.002 g の鋼球が適当な数だけ入れてある。

(9) 液体中の球の浮沈状態によって，$t = 10$ ℃ ~ 30 ℃ の室温を 2 ℃ のきざみで測れるようにしたい。どのようにすればよいかを述べ，室温が 20 ℃ のときに，各球が落ち着く位置を図示せよ。ただし，液面は十分広いとする。

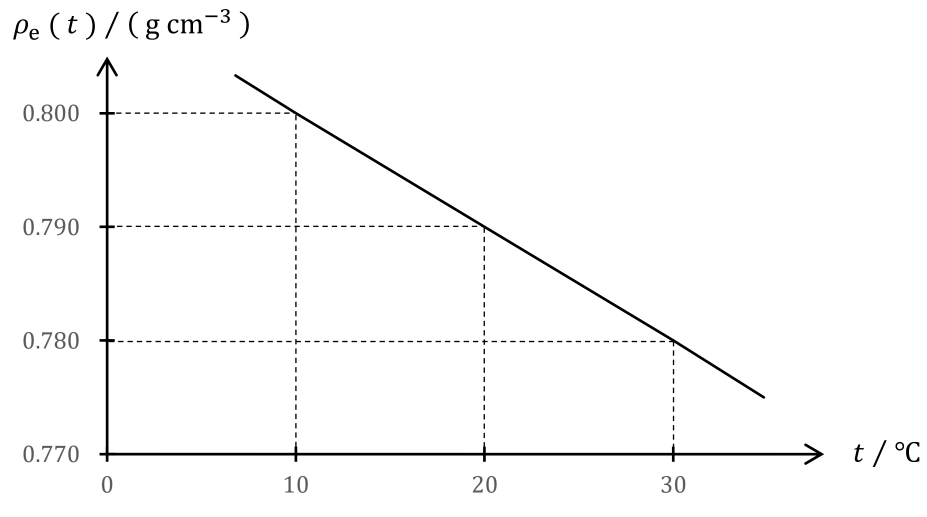


図 4

このような温度計をガリレオ温度計という。

問題 9 の解答と解説

浮力を正しく理解しているがどうかを問う問題である。

(A) (1) 深さ y での水圧を $p(y)$ とする。図I (a) のような断面積 S，高さ y の水柱にはたらく鉛直方向の力は，図に示した 3 つである。これらの力のつりあいより，

$$0 = p(y)\,S - p_0\,S - \rho\,S\,y\,g \quad \Rightarrow \quad p(y) = \boxed{p_0 + \rho\,g\,y} \qquad ①$$

を得る。

(2) 気体と液体を総称して流体という。浮力とは，流体中の物体の表面にはたらく流体の圧力による力の合力のことである。同じ深さでの水圧は同じなので，四角柱の両側にある水が四角柱の側面におよぼす力は打ち消し合う。四角柱の上面の深さを y とすれば，上面と下面における水圧 p_{U} と p_{L} は，式 ① より，

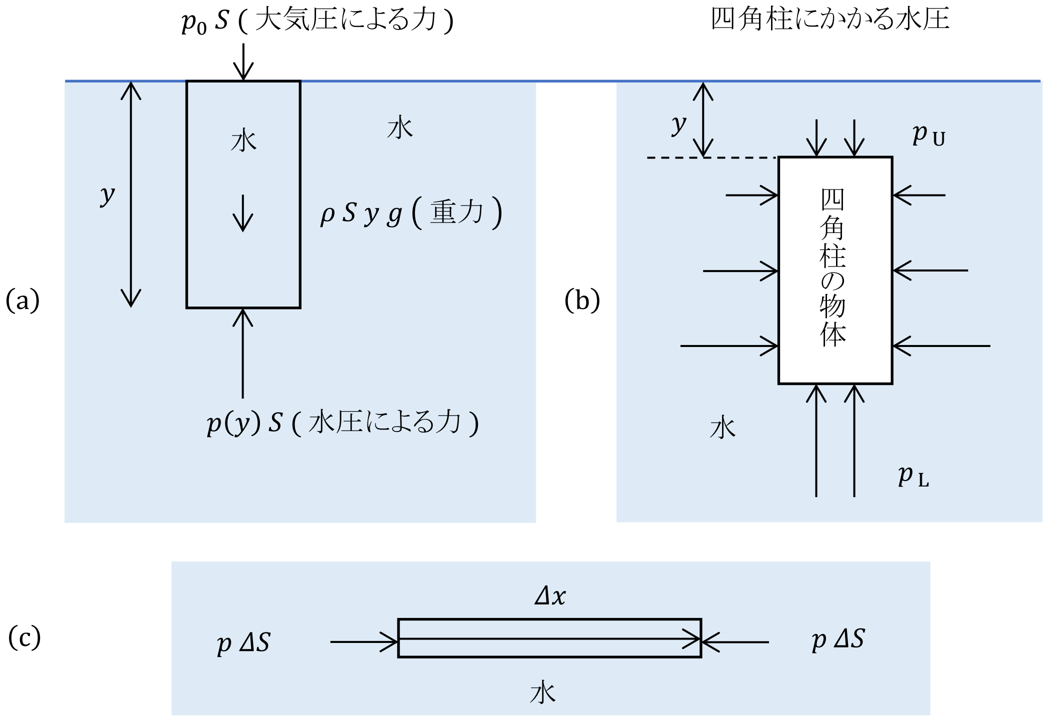
$$p_{\mathrm{U}} = p_0 + \rho\,g\,y\,, \qquad p_{\mathrm{L}} = p_0 + \rho\,g\,(\,y + h\,)$$

である。よって，浮力は鉛直上向きで，その大きさ F は，

$$F = p_{\mathrm{L}}\,S - p_{\mathrm{U}}\,S = \boxed{\rho\,S\,h\,g} \qquad ②$$

となる。$S\,h$ は四角柱の体積であるから，浮力の大きさは，四角柱が排除した水の重さ (重力の大きさ) に等しい。これをアルキメデスの原理 (Archimedes′ principle) と呼んでいるが，原理というほどの大そうなものではない。古代の偉人に敬意を払ってそう呼んでいるだけである。

図　I



水平な細長い水柱にはたらく水平方向の力

(補足)

任意の形をした体積 V の物体にはたらく浮力の大きさは $\rho\, V\, g$ で与えられる。

ガウスの定理を用いてこれを証明することができるが，高等数学を使わなくても，次のように考えれば簡単に証明できる。(戸田盛和 :「 流体力学 30 講 」 朝倉書店，p 4 ～ p 5)

「 物体にはたらく浮力はその物体の表面にはたらく流体の圧力のための力の合力である．したがってこの浮力は物体を同じ形の流体で置き換えても変わらないが，この流体部分にはたらく浮力はその流体の重さに等しく釣り合っているはずである． したがって物体にはたらく浮力は物体と同じ形の流体部分の重さに等しい．」

(3) 式 ② からわかるように，水中で鉛直下向きに $\varDelta y$ だけ変位すると，水圧が

$$\varDelta p = \rho\, g\, \varDelta y \qquad ③$$

だけ増加する。鉛直上向きに変位する $\left(\varDelta y < 0 \text{ の}\right)$ ときにも，この式のままで成り立つ。水平方向に $\varDelta x$ だけ変位するときには，水圧は変化しない。これは，図 I (c) のように，この変位ベクトルを含む細長い水柱にはたらく水平方向の力のつりあいを考えればわかる。

図 II のように，水中で点 A から点 B に至る階段状の経路を $\{\, \varDelta y_1 , \varDelta x_1 , \varDelta y_2 , \varDelta x_2 ,\cdots\cdots, \varDelta y_6 , \varDelta x_6 \,\}$ とする。変位 $\varDelta y_i$ に対する水圧の変化 $\varDelta p_i$ は式 ③ で与えられ，変位 $\varDelta x_i$ に対する水圧の変化は 0 であるから，点 A と点 B の水圧をそれぞれ p_{A} , p_{B} とすれば，

$$p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} + \varDelta p_1 + \varDelta p_2 + \cdots\cdots + \varDelta p_6 = p_{\mathrm{A}} + \rho\, g \sum_{i=1}^{6} \varDelta y_i$$

となる。点 A と点 B の高さは同じであるから， $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \varDelta y_i = 0$ である。よって，$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}}$ となる。

次に，もし両側の水面に，図 II のような高低差 $\varDelta y_0$ があるとすると，水面の水圧が大気圧 p_0 に等しいことと，同じ高さでの水圧は同じことであることから，

$$p_0 = p_0 + \rho\, g\, \varDelta y_0$$

が成り立つことになる。よって，$\varDelta y_0 = 0$ である。

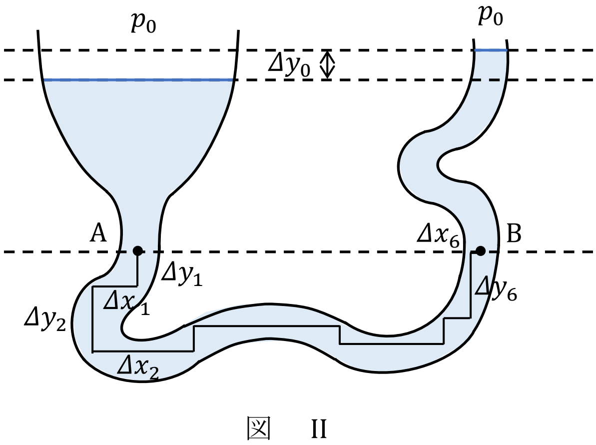


図 II

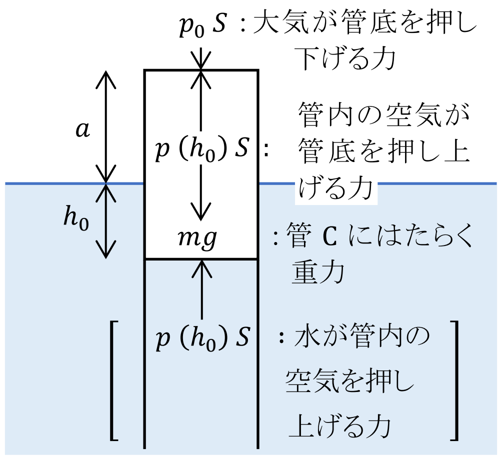


図 Ⅲ

(補足)

この結果を用いれば，水を満たした長いホースを用いて，2 地点の高度差を測ることができる。ただし，高度差が大きい場合には実用的ではなくなる。測定方法は小中学生向きのなぞなぞである。このような管を連通管という。

(**B**) (4) 円筒管 C 内の水面での水圧は，(3)で証明したように，C の外側の深さ h_0 での水圧 $p(h_0)$ に等しい。この水圧で C 内の空気を押し上げているので，これは C 内の気圧でもある。よって，C のつりあいの式は，

$$0 = p\,(h_0)\,S - p_0\,S - m\,g = \rho\,g\,h_0\,S - m\,g \qquad ④$$

となる。あるいは，空気の質量は無視できるので，式 ④ は管 C と管内の空気を合わせた全体のつりあいの式と見なしてもよい。式 ④ より，

$$h_0 = \boxed{\frac{m}{\rho\,S}} \qquad ⑤$$

を得る。あるいは次のように考えてもよい。C 内の空気の質量を m_A , C 外の空気の密度を ρ_A として，全体にはたらく浮力と重力のつりあいの式を立てれば，

$$0 = \rho_\mathrm{A}\,g\,a\,S + \rho\,g\,h_0\,S - m_\mathrm{A}\,g - m\,g$$

となる。ここで，$\rho_\mathrm{A} = 0$, $m_\mathrm{A} = 0$ と近似すれば，式 ④ を得る。

(5) 深さ y_S で C が静止しているとき，C にはたらく重力 $m\,g$ を支えているのは浮力で，その大きさは式 ④ より $\rho\,S\,h_0\,g$ である。よって，C 内の空気の高さは h_0 である。このとき，C 内の気圧は，

$$p\,(\,y_\mathrm{S} + h_0\,) = p_0 + \rho\,g\,(\,y_\mathrm{S} + h_0\,)$$

となる。また，C 内の空気の温度は変化しないので，ボイルの法則より，

$$p\,(\,y_\mathrm{S} + h_0\,)\,S\,h_0 = p\,(h_0)\,S\,(\,a + h_0\,)$$

が成り立つ。これより，y_S を求めれば，

$$y_\mathrm{S} = a\left(1 + \frac{p_0}{\rho\,g\,h_0}\right) \qquad ⑥$$

となる。これに式 ⑤ の h_0 を代入すれば，

$$y_\mathrm{S} = \boxed{a\left(1 + \frac{p_0\,S}{m\,g}\right)}$$

を得る。因みに，

$$p_0 = 1\,\text{気圧} \sim 10^5\ \mathrm{N/m^2}\ ,\ \rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\ ,\ g \sim 10\,\mathrm{m/s^2}$$

であるから，$a \sim h_0 \sim 1\ \mathrm{cm}$ とすれば，式 ⑥ より，$y_\mathrm{S} \sim 10\ \mathrm{m}$ となり，$a = 1\ \mathrm{mm}$, $h_0 = 1\ \mathrm{cm}$ とすれば，$y_\mathrm{S} \sim 1\ \mathrm{m}$ となる。

(6) 擾乱によって C がつりあいの位置から少し降下すれば，水圧が増加し，C 内の空気はボイルの法則に従って少し収縮する。そのために浮力が少し小さくなり，重力を支えることができなくなる。その結果，C はさらに降下し，そのあと同じことを繰り返す。逆に，擾乱によってC がつりあいの位置から少し上昇すれば，そのまま上昇しつづける。

このように，擾乱のためにつりあいの位置から遠くへ離れてしまうとき，この位置を不安定なつりあいの位置という。

(7) 水面上部の気圧が p_0 から高くなると，C 内の気圧も高くなり，ボイルの法則より，C 内の空気の体積が減少する。しかし，C の底面が水面より上に出ているかぎり，重力 $m\,g$ を支える浮力 $\rho\,S\,h_0\,g$ を生じさせる水面下の空気の体積 $S\,h_0$ が確保される。したがって，気圧が高くなると，C が水面に浮いた状態で，底面の高さが a から 0 まで減少する。0 になったとき，水面上部の気圧が p_1 であるから，C 内の気圧は $p_1+\rho\,g\,h_0$ になる。そのときボイルの法則より，

$$(p_1+\rho\,g\,h_0)\,S\,h_0=(p_0+\rho\,g\,h_0)\,S\,(a+h_0)$$

が成り立つ。これと式 ⑤ より，

$$p_1=\boxed{p_0\left(1+\frac{\rho\,S\,a}{m}\right)+\rho\,g\,a}$$

を得る。

(8) 深さ y_1 から C が浮かび上がり始めるとき，C にはたらく浮力と重力がつりあっているので，C 内の空気の高さは h_0 となり，気圧は $p_2+\rho\,g\,(y_1+h_0)$ となる。よって，ボイルの法則より，

$$\{p_2+\rho\,g\,(y_1+h_0)\}\,S\,h_0=(p_1+\rho\,g\,h_0)\,S\,h_0$$

が成り立ち，

$$p_2=\boxed{p_1-\rho\,g\,y_1}$$

を得る。

(C) (9) 室温が t のとき，液体の密度 $\rho_\mathrm{e}(t)$ と鋼球を封入したプラスチック球の平均密度 d が等しければ，体積 v の球にはたらく浮力 $\rho_\mathrm{e}(t)\,v\,g$ と重力 $d\,v\,g$ がつりあい，その球は液体中の任意の位置に静止することができる。もし $d>\rho_\mathrm{e}(t)$ であれば，その球は容器の底まで沈み，$d<\rho_\mathrm{e}(t)$ であれば，その球は液面まで浮上する。

次のように，測りたい室温 10 ℃ ~ 30 ℃ を 10 等分して，きざみを 2 ℃ にする。

t： 10 ℃ , 12 ℃ , ····· , 20 ℃ , ····· , 28 ℃ , 30 ℃

上の各温度での液体の密度を，図 4 から読み取れば，g/cm³ 単位で次のようになる。

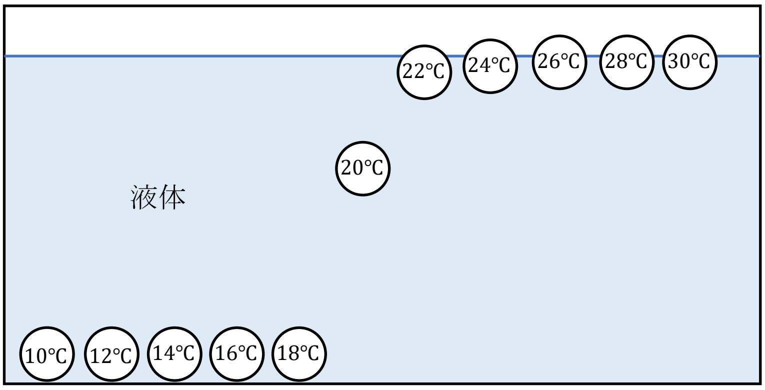
$\rho_\mathrm{e}(t)$： 0.800 , 0.798 , ····· , 0.790 , ····· , 0.782 , 0.780

鋼球を n 個封入した球の質量は 0.770 g $+\,n\,\times$ 0.002 g であるから，球の平均密度を上記の液体密度 $\rho_\mathrm{e}(t)$ に等しくするために封入すべき鋼球の数は，

n： 15 , 14 , ····· , 10 , ····· , 6 , 5

となる。このような数の鋼球を封入した 11 個の球に，名札として，上記の t の値を球面に付ける。

これらの球と液体を容器に入れて密封し，放置しておくと，たとえば室温が 20 ℃ のとき，下図のようになり，室温がわかる。



(余談)

透明な容器に水と浮沈子を入れて密閉し，内部の圧力を変化させることによって浮沈子を上下させるおもちゃは，西欧では昔から知られており，英語ではデカルト (発明者?) の名前をとって，Cartesian diver と呼ばれている。日本にはいつごろ入ってきたのか知らないが，筆者が子供のころ，試験管のようなガラス管に色ガラスで作られた浮沈子と水を入れ，上端をゴムの膜で閉じたものが，夏祭りの夜店で売られていた。現在では，ネット上に浮沈子の作り方などが紹介されており，小学生向きの理科実験として使われている。

ガリレオ温度計を発明したのはガリレオ・ガリレイではない。彼は温度の変化に伴って空気の体積が変化することを発見したのである。そしてこの現象を利用して，空気温度計を発明している。といっても定量的なものではなく，空気よりも暖かいか冷たいかが分かる程度の定性的なものである。この問題で取り上げた液体温度計も，流体の熱膨張という原理的には同じ現象を利用しているので，ガリレオ温度計と呼ばれているのであろう。

ガリレオ温度計は室内装飾品として市販されている。用いられている液体はエチルアルコールのようである。図 4 のデータはエチルアルコールから取ってきたが，計算しやすいように，数値を少し変えてあることを断っておく。

他の演習問題へ