問題 8　おもちゃのモーター

図 1 のように，半径 a の円環 C，電気抵抗 r の 4 本のスポーク O P_i (i = 1, 2, 3, 4)，鉛直の回転軸 A，2 つの軸受け D_1, D_2 から成る回転子が，導電性のブラシ Q_1 と Q_2 に接触した状態で，電磁力によって回転する。Q_1 と Q_2 の間には，スイッチ S と起電力 E の電池 E と電気抵抗 R の外部抵抗 R が直列につながれている。回転子が回転すると，Q_1 は C に大きさ F の動摩擦力をおよぼす。Q_2 と D_1, D_2 が A におよぼす動摩擦力は無視してよい。4 本のスポークと外部抵抗以外の電気抵抗は無視できるとする。C の内側には，鉛直上向きに磁束密度 B の一様な磁場がかけられている。

スイッチ S を閉じると回転子が回転し始めた。

(1)　回転の向きは，図 1 に示した (a) と (b) のどちらか。

回転角速度が ω になったとき ：

(2)　各スポーク O P_i に生じる誘導起電力の向きは，O → P_i と P_i → O のどちらか。
またその大きさはいくらか。

(3)　各スポーク O P_i を流れる電流の向きは，O → P_i と P_i → O のどちらか。
またその大きさはいくらか。

(4)　各スポーク O P_i にはたらく電磁力の大きさはいくらか。
なお，この電磁力の作用点はスポークの中点，すなわち，O から距離 $\dfrac{a}{2}$ のところとしてよい。

やがて回転子は一定の角速度 ω_{C} で回転するようになった。

(5)　ω_{C} はいくらか。またそのとき，各スポーク O P_i を流れる電流の大きさはいくらか。
a, r, F, B, E, R から必要なものを用いて答えよ。

(6)　$\omega = \omega_{\mathrm{C}}$ で回転しているとき，次の量を求めよ。
(i)　電池 E の仕事率
(ii)　4 本のスポークと外部抵抗 R で発生する単位時間あたりのジュール熱の和
(iii)　Q_1 と C の接点で発生する単位時間あたりの摩擦熱

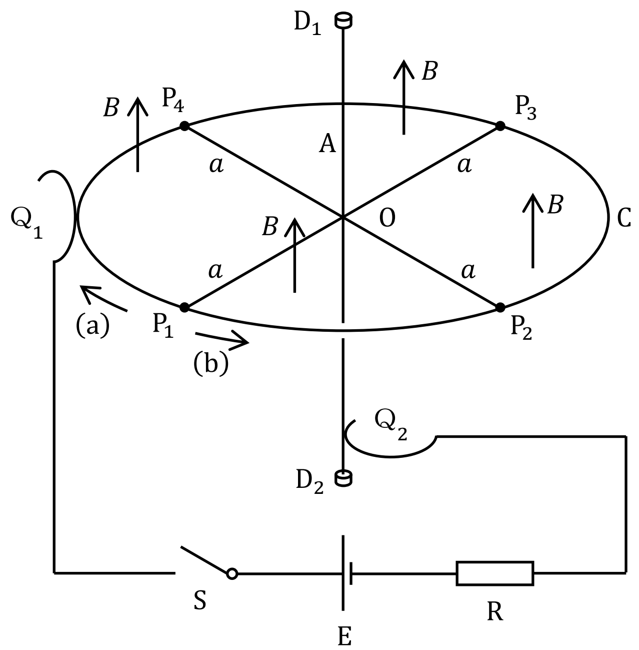


図　1

問題 8 の解答と解説

電磁力によって回転子を回転させるおもちゃのモーターを題材にして，誘導起電力と回転子の回転運動について考えさせる問題である。これは大学入試の頻出問題であるが，動摩擦力を取り入れた問題は数が少ない。

(1) スイッチ S を閉じた直後，各スポークには $\mathrm{P}_i \to \mathrm{O}$ の向きに電流が流れるので，フレミングの左手の法則より，各スポークには (b) の向きに回転させようとする電磁力がはたらく。これらの力による A のまわりの力のモーメントの和が，Q_1 が C におよぼす最大静止摩擦力による逆向きの力のモーメントより大きいときに，回転子は図の $\boxed{\text{(b)}}$ の向きに回転し始める。

(2) スポーク $\mathrm{O\,P}_i$ に生じる誘導起電力は，次の 2 通りの方法で求めることができる。

(i) ファラデーの法則から求める方法

図 (i) のように仮想的に $\mathrm{O\,Q}_1$ 間に導線を張って，仮想的な閉回路 $\mathrm{O\,Q}_1\mathrm{P}_i\,\mathrm{O}$ を考える。この閉回路を鉛直上向きに貫く磁束 Φ は，微小時間 Δt の間に，

$$\Delta\Phi = B \cdot \frac{1}{2}a^2\,\omega\,\Delta t$$

だけ増大する。よって，$\mathrm{O} \to \mathrm{Q}_1 \to \mathrm{P}_i \to \mathrm{O}$ の向きの誘導起電力 $V_\mathrm{e}{}'$ は，ファラデーの法則より，

$$V_\mathrm{e}{}' = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{1}{2}B\,a^2\,\omega$$

となる。このように，ファラデーの法則を適用する閉回路は，実際には存在しない仮想的なものであってもかまわない。いまの場合，起電力が発生するのは磁力線を横切るスポークのところだから，$\mathrm{O\,Q}_1$ 間の導線は，動かない限り，どのように張ってもよい。答は，$\boxed{\mathrm{O} \to \mathrm{P}_i}$ の向きに大きさが $\boxed{\dfrac{1}{2}B\,a^2\,\omega}$ である。

図 (i)

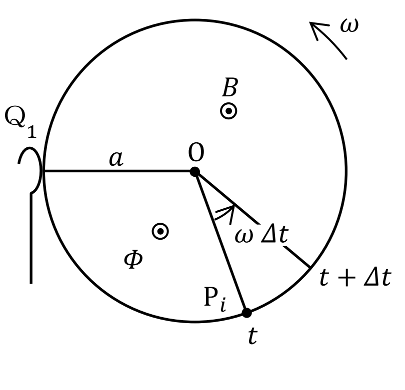
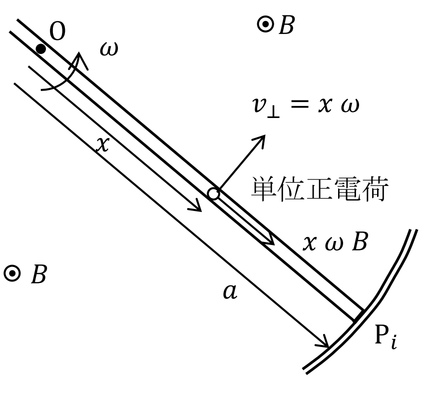


図 (ii)



(ii)　起電力の定義から求める方法

スポーク $\mathrm{O\,P}_i$ に生じる $\mathrm{O} \to \mathrm{P}_i$ の向きの起電力 V_e は，電流の担い手にはたらく単位正電荷あたりの非クーロン力の $\mathrm{O} \to \mathrm{P}_i$ 方向の成分を O から P_i まで積分した値である。

いまの場合，電流の担い手は自由電子 (電荷 $-e$) である。非クーロン力とはクーロン力以外の力であり，クーロン力とは，電荷が周囲の空間に作るクーロン電場が他の荷電粒子におよぼす力である。O から距離 x のところにある平均的な自由電子のスポークに垂直な速度成分は図 (ii) の矢印の向きで，大きさ $v_\perp$ は $x\,\omega$ であるから，平均的な自由電子が磁場から受けるローレンツ力 (非クーロン力) の $\mathrm{O} \to \mathrm{P}_i$ の向きの成分は $-e\,v_\perp B = -e\,x\,\omega\,B$ である。よって，単位正電荷あたりにはたらく非クーロン力の $\mathrm{O} \to \mathrm{P}_i$ の向きの成分は，$\dfrac{-e\,x\,\omega\,B}{-e} = x\,\omega\,B$ となる。これを x について O から P_i まで積分すれば，

$$V_\mathrm{e} = \int_0^a x\,\omega\,B\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\,a^2\,\omega\,B$$

を得る。このように起電力は電流の有無に関係なく定義される。電流の向きと大きさは他の起電力とのかねあいで決まるが，もしたまたま，$\mathrm{O} \to \mathrm{P}_i$ の向きに電流が流れておれば，この積分値は，非クーロン力が電流の担い手にする単位正電荷あたりの仕事となる。(5 頁の注)

(3)　閉回路に電流が流れるようになる第一原因は電池 E の起電力である。S を閉じた直後，電流は $\mathrm{E} \to \mathrm{S} \to \mathrm{Q}_1 \to \mathrm{P}_i \to \mathrm{O} \to \mathrm{Q}_2 \to \mathrm{R} \to \mathrm{E}$ の向きに流れる。この電流によって各スポークに電磁力がはたらき，回転子が回転し始めると，逆向きに電流を流そうとする誘導起電力 V_e が各スポークに発生するが，その大きさ $\dfrac{1}{2}\,B\,a^2\,\omega$ が E を越えることはない。もし ω が大きくなって，V_e が E に等しくなれば，電流が流れなくなるので，電磁力が 0 となり，ω の増加が止まるからである。よって，電流が流れる向きは常に $\boxed{\mathrm{P}_i \to \mathrm{O}}$ である。

その大きさを i とすると，R を流れる電流は，キルヒホッフの第 1 法則より，$4\,i$ となる。このとき，閉回路 $\mathrm{E} \to \mathrm{S} \to \mathrm{Q}_1 \to \mathrm{P}_i \to \mathrm{O} \to \mathrm{Q}_2 \to \mathrm{R} \to \mathrm{E}$ にキルヒホッフの第 2 法則を適用すれば，

$$E - V_\mathrm{e} = r\,i + R \cdot 4\,i$$

となり，

$$i = \boxed{\frac{E - \frac{1}{2}\,B\,a^2\,\omega}{r + 4\,R}}$$

を得る。

(4)　各スポーク $\mathrm{O\,P}_i$ にはたらく電磁力 $\overrightarrow{f}$ は，図 (iii) の矢印の向きに大きさが，

$$f = i\,B\,a = \boxed{\frac{E - \frac{1}{2}\,B\,a^2\,\omega}{r + 4\,R}\,B\,a}$$

である。この力による回転軸 A のまわりの力のモーメント N は次のようになる。図 (iv) のように，O から距離 x のところにあるスポークの微小部分 $\mathrm{d}\,x$ にはたらく電磁力の大きさは $i\,B\,\mathrm{d}\,x$ であり，それによる A のまわりの力のモーメントは $x\,i\,B\,\mathrm{d}\,x$ である。すべての微小部分にはたらく力のモーメントの和をとれば，

$$N=\int_0^a x\,i\,B\,\mathrm{d}\,x=i\,B\frac{a^2}{2}=f\cdot\frac{a}{2}$$

となる。よって，$\mathrm{O\,P}_i$ にはたらく電磁力 $\overrightarrow{f}$ の作用点を $\mathrm{O\,P}_i$ の中点とすれば，N が求まる。

図 (iii)

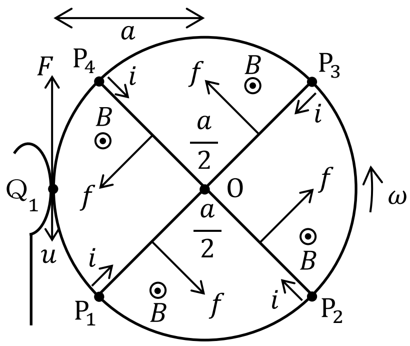
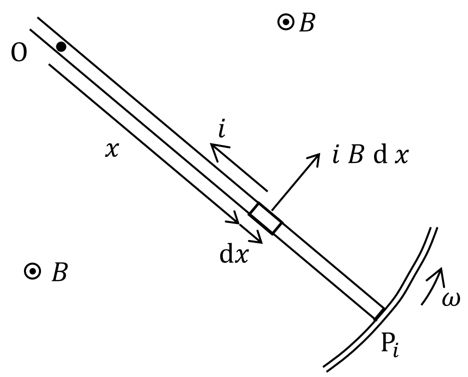


図 (iv)



(5) 回転子の角速度が ω であるとき，回転子にはたらく電磁力による力のモーメントは，図 (iii) のように回転子を上から見下せば，反時計まわりに，

$$4\,N=4\,f\,\frac{a}{2}=2\,i\,B\,a^2=\frac{2\,E-B\,a^2\,\omega}{r+4\,R}\,B\,a^2$$

である。Q_1 がおよぼす動摩擦力による力のモーメントは，時計まわりに $F\,a$ であるから，すべての力による力のモーメントは反時計まわりに $4\,N-F\,a$ となる。これが正であれば，回転子の回転運動の勢い (角運動量) が大きくなり，ω が増加する。よって，$\omega=\omega_{\mathrm{C}}$ (一定) となるのは，$4N-Fa=0$ のときである。これより ω_{C} を求めれば，

$$\frac{2\,E-B\,a^2\,\omega_{\mathrm{C}}}{r+4\,R}\,B\,a^2-Fa=0\rightarrow\omega_{\mathrm{C}}=\boxed{\frac{1}{B^2\,a^2}\left\{2\,E\,B-\frac{F\,(\,r+4R\,)}{a}\right\}}$$

となる。このとき $\mathrm{O\,P}_i$ を流れる電流 i_{C} は次のようになる。

$$i_{\mathrm{C}}=\frac{E-\frac{1}{2}B\,a^2\,\omega_{\mathrm{C}}}{r+4\,R}=\boxed{\frac{F}{2\,a\,B}}$$

(6)(i) $\omega=\omega_{\mathrm{C}}$ になったとき，電池 E の負極側から正極側へ単位時間あたり $4\,i_{\mathrm{C}}$ の電荷が汲み上げられる。よって，電池内の非クーロン力が単位時間あたりにする仕事 W_{E} は，

$$W_{\mathrm{E}}=E\cdot4\,i_{\mathrm{C}}=\boxed{\frac{2\,E\,F}{a\,B}}$$

となる。

(ii) 単位時間あたりに発生するジュール熱の和 J は，次のようになる。

$$J=4\,r\,{i_{\mathrm{C}}}^2+R\,(\,4\,i_{\mathrm{C}})^2=\boxed{(\,r+4\,R\,)\left(\frac{F}{a\,B}\right)^2}$$

(iii) C にはたらく動摩擦力 $\overrightarrow{F}$ と接点での C の速度 $\overrightarrow{u}$ は逆向きであるから，動摩擦力の仕事率は，

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{u}=-F\,u=-F\,a\,\omega_{\mathrm{C}}\qquad(\cdot\text{はベクトルの内積})$$

となる。よって，動摩擦力は回転子から単位時間あたり $F\,a\,\omega_{\mathrm{C}}$ のエネルギーを抜き取る。これが単位時間あたりに発生する摩擦熱 H となるので，

$$H = F\,a\,\omega_{\mathrm{C}} = \boxed{\ \frac{2\,E\,F}{a\,B} - (\,r + 4\,R\,)\left(\frac{F}{a\,B}\right)^2\ }$$

となる。

これら 3 つの量の間には，$W_{\mathrm{E}} = J + H$ が成り立っており，単位時間あたりに電池がした仕事は，単位時間あたりに発生するジュール熱と摩擦熱に変換されることを表している。エネルギー保存則の観点からすれば，これは当然の結果である。

(注)　スポークには電気抵抗があるので，電流が流れると，平均的な自由電子に熱の発生を伴う非クーロン力がはたらく。よって，上記の定義に従えば，この非クーロン力に対する起電力があるはずで，その向きは電流が流れる向きの逆で，大きさは $r\,i$ となる。これを抵抗逆起電力と呼ぶ人がいるが，日本の物理教育界ではこの用語は認められていない。その代わりに，これを電流が流れる向きの<u>電位</u>降下という量に置き換えている。

(追加)

この演習問題と本質的に同じ問題が，東京大学の 2005 年度入試問題に出題されている。演習問題と重複する部分が多いのだが，その全文と筆者の解答を以下に記す。

[問題]

図 2 − 1 のように，ボタン型磁石と薄いアルミニウム円板を貼り合わせたものを，磁石の磁力を使って鉄釘(くぎ)を介して乾電池の鉄製負電極につるす。乾電池の正極からリード線をのばし，抵抗を介してリード線の他端 P をアルミニウム円板の円周上に触れさせると，アルミニウム円板とボタン型磁石は回転を始めた。その後，リード線とアルミニウム円板がすべりながら接触するようにリード線を保持すると，円板と磁石は回転し続けた。ボタン型磁石は，図 2 − 1 のように上面が N 極，下面が S 極で，電気を通さない。アルミニウム円板の半径を a，乾電池の起電力を V，抵抗の抵抗値を R，アルミニウム円板を貫く磁束密度 B は円板面内で一様として，以下の問に答えよ。ただし，リード線とアルミニウム円板の間の摩擦，鉄釘と電池の間の摩擦は無視してよい。また，アルミニウム円板と鉄釘の間の摩擦は十分大きく，これらは一体となって回転するものとする。

I　アルミニウム円板とボタン型磁石が回転する方向を，理由を付して答えよ。略図を使ってもよい。ただし，アルミニウム円板を流れる電流は，鉄釘との接合点 Q と点 P の間を直線的に流れると考えてよい。

II　図 2 − 2 のように，乾電池のかわりに検流計を置く。アルミニウム円板とボタン型磁石を図 2 − 2 の矢印方向に力を加えて回転させると，検流計に電流が流れた。電流が流れる方向を理由を

付して答えよ。。

III IIで生じていた起電力の大きさは，ボタン型磁石の回転の角速度が ω のとき，$E = \mathcal{k}\,\omega\,B$ と表せることを示し，係数 $\mathcal{k}$ を求めよ。ただし，釘は十分細いとしてよい。

IV 図２－１において，十分時間が経つとアルミニウム円板とボタン型磁石の角速度はある一定値 ω_1 になる。ω_1 を V, B, $\mathcal{k}$ を用いて表せ。

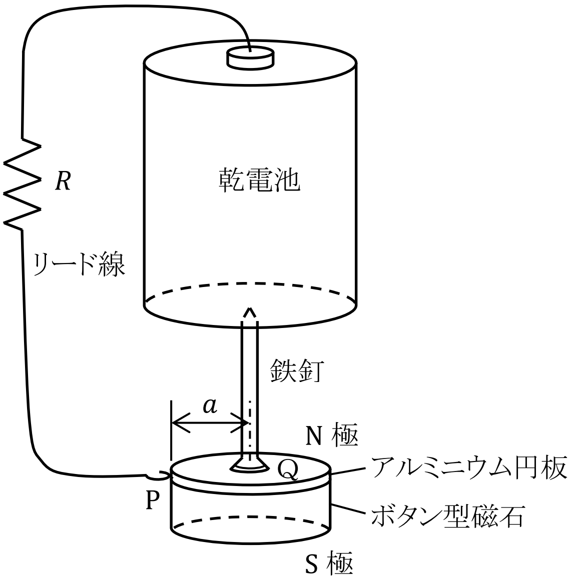


図　２－１

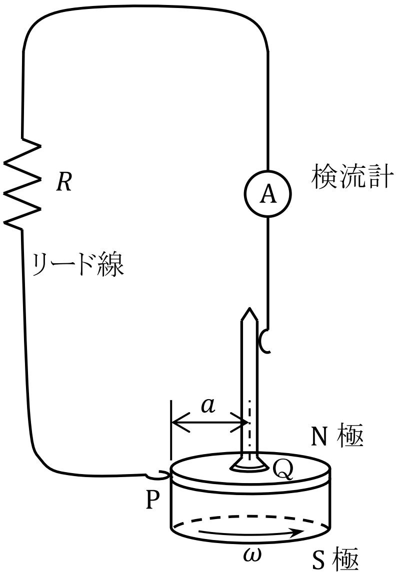


図　２－２

[解答]

I ＰＱ間に生じる誘導逆起電力の大きさは電池の起電力より小さいので，電流はアルミニウム円板の点Ｐから点Ｑに向かって流れる。この電流は磁場からフレミングの左手の法則に従う向きに力を受ける。その向きは $\boxed{\text{上から見て反時計まわりの向き}}$ であるから，円板はその向きに回転する。

II アルミニウム円板の回転運動に従って動く自由電子は磁場からローレンツ力を受ける。その力の向きは半径方向で中心に向かう向きであるから，自由電子は点Ｑに流れ込む。そのあと検流計を下から上に流れるので，検流計を流れる電流の向きは $\boxed{\text{上から下へ}}$ である。

III 線分ＰＱ上で点Ｑから距離 r のところにある自由電子にはたらくローレンツ力のＱからＰの向きの成分は $-e\,r\,\omega\,B$ である。ＱからＰの向きの誘導起電力 E は単位正電荷あたりにはたらく非クーロン力をＱからＰまで積分したものであるから，

$$E = \int_0^a r\,\omega\,B\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\,a^2\,\omega\,B\,, \qquad \text{ゆえに，} \quad \mathcal{k} = \boxed{\frac{1}{2}\,a^2}$$

IV アルミニウム円板に電流が流れると，回転軸のまわりに電磁力による力のモーメントがはたらいて角速度が変化する。したがって，角速度が一定のとき電流は流れない。そのためには，電池の起電力 V と誘導逆起電力の大きさ E が等しくなければならない。よって，

$$V = \mathcal{k}\,\omega_1\,B\,, \qquad \text{ゆえに，} \quad \omega_1 = \boxed{\frac{V}{\mathcal{k}\,B}}$$

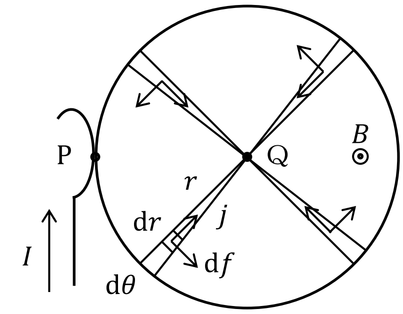
(高校物理を越えた補足説明)

問題文にはアルミニウム円板の電気抵抗についてなにも書かれていない。もし電気抵抗があれば，円板上を流れる平均的な自由電子の経路は点 Q と点 P をつなぐ曲線となり，それらの曲線群が円板の全表面を覆いつくす。

しかし，アルミニウム円板の外側を電気抵抗 0 の円形金属枠で取り囲めば，平均的な自由電子の流れは放射状となり，取り扱いが簡単になる。

図 2－1 で，回路を流れる電流を I，点 Q を中心とする半径 r の円周上での電流密度の大きさを $j\,(r)$，円板の厚さを t とすれば，

図 (v)



$\mathrm{d}f = j(r)\,t\,r\,\mathrm{d}\theta \cdot B \cdot \mathrm{d}r$

$$j\,(r) = \frac{I}{2\,\pi\,r\,t}$$

が成り立つ。このとき，図 (v) のように，微小角度 $\mathrm{d}\theta$ の細長い扇形部分にはたらく電磁力による点 Q のまわりの力のモーメント n は，

$$n = \int_0^a r\,\{\,j(r)\,t\,r\,\mathrm{d}\theta\,B\,\mathrm{d}r\,\} = \int_0^a \frac{I\,B}{2\,\pi}\;r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{I\,B}{2\,\pi}\,\frac{a^2}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

であるから，円板全体にはたらく力のモーメント N は，

$$N = \int_0^{2\pi} n\,\mathrm{d}\theta = I\,B\,a \cdot \frac{a}{2}$$

となる。よって，問題文に書かれているように，線分 PQ に沿ってのみ電流 I が流れているとし，その電流にはたらく電磁力の作用点は P Q の中点であるとすれば，その力のモーメントは上記の N に等しくなる。

(余談)

1980 年代に，東大の入試問題作成者は実際に実験を行って解答の検証をしている，という噂話を聞いたことがある。真偽のほどは定かでない。東大教授は雑用が多く，研究時間を十分に取れないという話だから，本当のこととは思えないのだが，もし事実だとすると，その道の権威が，秘密裏に，力学模型を作ったり，電気回路の半田付けをしたりしているところを想像して，思わず笑みを漏らしてしまう。物理系の研究者には，おもちゃや模型作りが好きな人が多いように思う。もし本当に検証実験をした人がいたとすれば，その人は専門の研究よりも楽しみながら実験をしたにちがいない。子供のころに熱中した模型作りを思い出しながら。

ここに取り上げた東大の問題は，問題設定から見て，出題者が実際に実験をしたと思われるので，筆者も確認のために追実験をした。用意したものは，

単1乾電池 2 個，ネオジム磁石(ϕ23mm，B200mT)，38mmの鉄釘，200mmのエナメル線，
30mmのプラスティックストロー(釘の運動を安定させるためのガイドチューブに使用)，
固定用のセロテープ，セッティング用の万力

である。

最初，アルミニウム円板として 1 円硬貨を用いたのであるが，回らない。問題文にボタン型磁石は電流を通さないという仮定があるので，ネオジム磁石に電流が流れないように，1 円硬貨との間に厚紙を挟んでおいたのであるが，駄目である。1 円硬貨は小さくて操作しにくいので，厚紙で作った円板 (ϕ 33mm) の上面にアルミ箔を 1 枚貼り付けたものに替え，電流を増やすために電池を 2 個直列につないだ。電池の内部抵抗は外部抵抗の抵抗値より小さいだろうと予測し，取りあえずセッティングのしやすい直列にした。また，アルミニウム円板との接触をよくするために，エナメル線の片端に半田の玉をつけた。これで実験を始めたが，回らない。ところが根気よく玉とアルミ箔の接触を続けていると，その接点に小さな火花が飛び，1 秒程度であるが，円板が勢いよく回った。また火花が飛ぶと回り出す。断続的に火花を飛ばしながら回り続けることもある。それを何回か繰り返すと，ときどき火花が飛ぶのに回らなくなった。エナメル線が熱くなったので，接触をやめ，釘と円板を取り出すと，これらも熱くなっている。ネオジム磁石は電流回路から切り離されているのに，これも熱くなっていることがある。回転を断続的に繰り返している間に，半径方向に往復する電流が流れ，ジュール熱が発生したのだろうか。また円板が回転しなくなるのも，ネオジム磁石表面の電荷分布によるクーロン電場が影響しているのだろうか。磁石に対する知識がない筆者には判断できない。

理論物理学者がなにかある自然現象を合理的に説明しようとするとき，まずその対象物理系の数理的な模型を作る。それに物理法則を適用してある物理量がどのような値をとるか，あるいは時間的にどのように変化するかを計算する。その結果を実験値や観測値と比較して，一致しなければ模型を作り直して同じことを繰り返す。そして一致したときの模型から，その自然現象が生じる根本的な原因がなんであるのかを判定する。

このように理論物理学者は，日々模型を相手にして研究を行い，おもちゃで遊ぶ子供のように楽しんでいる。

他の演習問題へ