

問題 7 ブランコの共振とパラメータ励振

次の文中の を適切な数式または数値で埋めよ。

(A) 図 1 のような単振子が鉛直面内で振動している。小物体 P の質量を m , 軽いひも CP の長さを ℓ , 重力加速度の大きさを g とする。ひもが鉛直線 CO から反時計まわりに角度 θ だけ回転したとき, P の速度方向の運動方程式は, θ が増加する向きの加速度成分を α_θ として,

(1)

と表される。ただし, 空気の抵抗力は無視してよい。

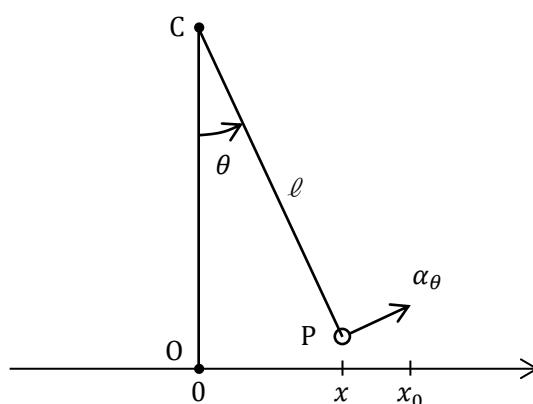


図 1

以下, 簡単のために, 振動は最下点 O 近傍の微小振動とし, 近似式:

$$\sin \theta = \theta, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad (\text{a})$$

が成り立つとする。図 1 のように, 点 O を原点とし, 水平右向きを正の向きとする x 座標を導入する。このとき α_θ は x 方向の加速度成分 a に等しいと見なせるので, P の運動は単振動となり, その周期は (2) と表される。この周期は単振子に固有なパラメータ ℓ に依存し, 振幅に依らない。これを単振子の固有周期という。その振幅を x_0 ($x_0 \ll \ell$) とすれば, P の力学的エネルギーは (3) と表される。ただし, 最下点 O を位置エネルギーの基準点とする。

次に, P が $x = x_0$ で一瞬静止したとき, x 軸の負の向きに瞬間的な力積を P に与える。それによって生じる P の速さ Δv は, 点 O での P の速さに比べれば, 十分小さいとする。このとき P の力学的エネルギーが増加するので, 1 周期後に P が右端に戻ってきて一瞬静止する位置の x 座標, すなわち, 新しい単振動の振幅は (4) となる。

このあと P が右端で一瞬静止するごとに P に同じ力積 ($-m \Delta v$) を与えると, 振幅は増加しつづける。力積を N 回与えたときに, 振幅がちょうど $2x_0$ になったとすれば, $N =$ (5) である。

このように, 振動系にその固有周期と同じ周期で外力を及ぼしたときに 振幅が増大する現象を, 共振という。ブランコに乗っている人の背中を押して振れを大きくする遊びは, 共振の代表例である。

(B) 平面上で定点 O のまわりに回転運動する質量 m の小物体 Q がある。図 2 のように、ある瞬間における Q の位置を \vec{r} 、 Q にはたらく力を \vec{f} とする。このとき、点 O のまわりの力のモーメント N を次式で定義する。

$$N = r f \sin \theta_f = \rho_f f, \quad \rho_f = r \sin \theta_f$$

ここに、 r と f はそれぞれベクトル \vec{r} と \vec{f} の大きさと、 θ_f は 2 つのベクトル \vec{r} と \vec{f} の交角である。ただし、 \vec{r} の向きが \vec{f} の向きに一致するように \vec{r} を回転させるとき、反時計まわりの回転であれば、 $\theta_f > 0$ 、 $\rho_f > 0$ 、 $N > 0$ とし、時計まわりの回転であれば、 $\theta_f < 0$ 、 $\rho_f < 0$ 、 $N < 0$ とする。

ここで図 2 のように、直交座標 (x, y) を導入して、 \vec{r} と \vec{f} の成分を、

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{f} = (f_x, f_y)$$

とする。このとき、 f_y による力のモーメントは $x f_y$ で、 f_x による力のモーメントは $-y f_x$ であるから、これらを重ね合わせれば、

$$N = x f_y - y f_x$$

と表される。

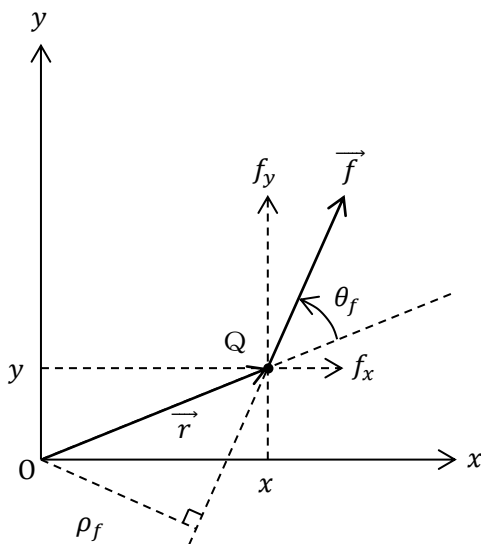


図 2

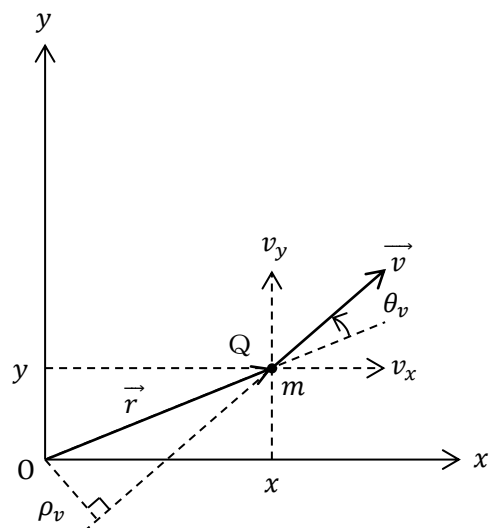


図 3

次に、図 3 のように、位置 \vec{r} における Q の速度を \vec{v} とする。このとき、 Q の回転運動の勢いを表す物理量 L を次式で定義する。これを角運動量という。

$$L = m r v \sin \theta_v = m \rho_v v, \quad \rho_v = r \sin \theta_v$$

ここに、 v はベクトル \vec{v} の大きさと、 θ_v は \vec{r} の向きが \vec{v} の向きに一致するように \vec{r} を回転させたときの回転角であり、回転の向きが反時計まわりであれば、 $\theta_v > 0$ 、 $\rho_v > 0$ 、 $L > 0$ とし、時計まわりであれば、 $\theta_v < 0$ 、 $\rho_v < 0$ 、 $L < 0$ とする。

ここで、力のモーメントの場合と同様に、 \vec{r} と \vec{v} の直交成分 (x, y) と (v_x, v_y) を用いて、定点 O のまわりの Q の角運動量 L を表せば、

$$L = \boxed{\quad (6) \quad}$$

となる。

いま、微小時間 Δt の間に Q が少し回転した結果、 x, y, v_x, v_y がそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta v_x, \Delta v_y$ だけ変化したとし、微小量の積を無視すれば、 L の変化量 ΔL は、

$$\Delta L = \boxed{\quad (7) \quad}$$

と表される。これより、角運動量の時間変化率 $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ と力のモーメント N の間に成り立つ関係式は、

$$\boxed{\quad (8) \quad}$$

となる。この関係式から、もし Q にはたらく力のモーメントが 0 であれば、 Q の角運動量は保存されることがわかる。逆に、 Q の角運動量が時間的に一定であれば、 Q にはたらく力のモーメントは 0

である。 $\frac{L}{2m}$ は定点 O のまわりの Q の面積速度であるから、 $N = 0$ は面積速度が一定となるための必要かつ十分な条件である、と言い換えてもよい。

(C) ブランコに乗っているとき、誰かに背中を押してもらわなくても、ブランコをこぐことによって、振幅を徐々に大きくすることができる。これをパラメータ励振という。なぜこのようなことが起こるのかを考えてみよう。

ブランコをこぐとき、乗り手は振動の端近くでしゃがみ込み、最下点の近くで立ち上がる。この動作を次のように簡略化する。ブランコと乗り手の全質量 m が重心 G にあり、 G の位置が図 4 のように変化する場合を考える。空気の抵抗と回転軸 C での摩擦は無視できるとする。図ではわかりやすいように、ロープ CG の振れ角を大きく描いてあるが、計算を簡単にするために、振れ角は微小であるとする。計算に際しては、(A) で与えられた近似式 (a) を用いよ。 x 座標は (A) で導入したものと同一である。

最初、 G は位置 x_0 から初速度 0 で動き出す。このとき、 $\overline{CG} = \ell$ で、 CG と鉛直線 CO のなす角度は θ_0 である。 G が最下点 O に達したときの G の速さ v_0 は、 x_0 を用いて、(9) と表される。この瞬間に乗り手が瞬時に立ち上がり、 $\overline{CG} = \ell - h$ にする。その結果、立ち上がった直後の G の速さ v_0' は、直前の速さ v_0 を用いて表せば、(10) となる。そして、 $\overline{CG} = \ell - h$ を保ったまま、 G は左端に達する。このとき CG が鉛直線 CO となす角度の大きさ θ_1 と θ_0 の比を、 ℓ と h を用いて表せば、(11) となる。このあと、 G は最下点を速さ v_0' で通過し、やがて右端に達して一瞬静止する。この瞬間に乗り手が瞬時にしゃがみ込んで $\overline{CG} = \ell$ にする。このとき、 G の位置 x_1 は x_0 の (12) 倍になっている。これでブランコを 1 回こぐ動作が終る。

このあと、初期位置を x_1 として、2 回目のこぐ動作が始まる。もし $h = \frac{1}{10} \ell$ であれば、振幅が $2x_0$ を越えるのは、ブランコを (13) 回こいだときである。計算に必要ななら、 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ を用いよ。

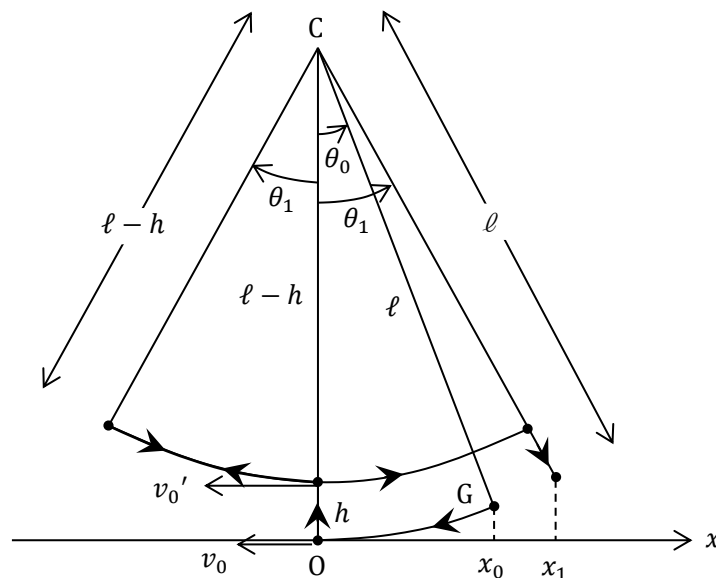


図 4

振動系のパラメータ(たとえば、振り子のひもの長さ)を周期的に変化させたときに 振幅が増大する現象を、パラメータ励振という。ブランコをこぐ遊びはその代表例である。

問題 7 の解答と解説

ブランコの共振とパラメータ励振の違いを論じる問題である。パラメータ励振に関する設問は、東京大学の 2021 年度入試問題を借用した。ただし、問題文は書き換えてある。同様の問題は、過去に他大学でも出題されたことがある。

(A) (1) P の速度方向にはたらく力は重力の成分 $-mg \sin \theta$ だけであるから、P の運動方程式は

$$\boxed{m \alpha_\theta = -mg \sin \theta} \quad \text{①}$$

となる。

(2) 微小振動の場合、 $\alpha_\theta \doteq a$ であるから、式①は近似的に、

$$m a = -mg \frac{x}{\ell} \quad \text{②}$$

と表される。角振動数 ω_0 の単振動では、 $a = -\omega_0^2 x$ が成り立つので、これと式②を比べれば、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

を得る。よって、単振子の周期 T_0 は、

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}} \quad \text{③}$$

となる。このように、微小振動する単振子の周期は ℓ だけに依存し、振幅 x_0 には依らない。これを振り子の等時性という。ガリレオ・ガリレイが 19 才のとき、大聖堂のシャンデリアが揺れているのを観察していて、この法則を発見したという逸話がある。

(補足)

微小振動でない場合には、式①から導かれる微分方程式：

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

を基にして、周期 T を求めると、 T は ℓ だけでなく、 θ の振幅 θ_0 にも依存し、

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} K(k), \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

と表される。K(k) は第 1 種完全楕円積分である。これをグラフで表すと図 (i) のようになる。

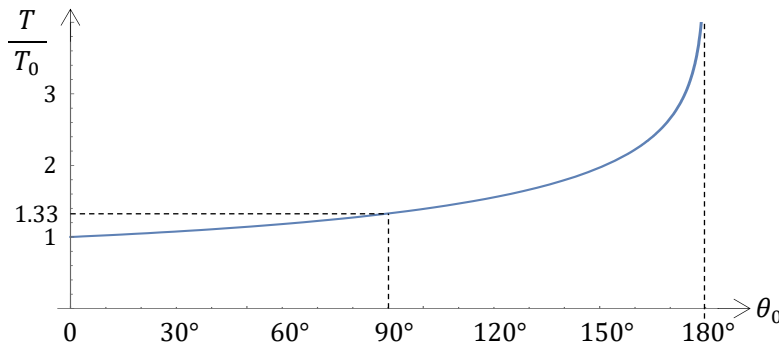


図 (i)
振子の周期 T と
角振幅 θ_0 の関係

T_0 は単振子の周期
(式③) である。

$\theta_0 = 90^\circ$ になっても、式③からのずれはさほど大きくない。なお、 $\theta_0 > 90^\circ$ ではひもはたるむので、ひもは軽い棒に置き換えてあると見なす。

(3) 空気の抵抗力は無視できるとしているので、この単振子の力学的エネルギーは保存される。

式②の復元力 $-\frac{mg}{\ell}x$ の位置エネルギー $U(x)$ は、もとを正せば重力の位置エネルギーであるから、

$$U(x) = mg\ell(1 - \cos\theta) \cong mg\ell \frac{\theta^2}{2} \cong \frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} x^2 \quad (x \cong \ell\theta)$$

と表される。 $x = x_0$ で P は一瞬静止するので、この単振子の力学的エネルギー E は、

$$E = U(x_0) = \boxed{\frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} x_0^2} \quad \text{④}$$

である。あるいは、 $x = 0$ での P の速さを v_0 とすれば、

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{⑤}$$

と表すこともできる。

(4) 右端 ($x = x_0$) で瞬間的な力積を与えると、P の速度が 0 から $-\Delta v$ に瞬間的に変化し、その間の位置の変化は無視できる。よって、P の力学的エネルギーは瞬間的に $\frac{1}{2} m (\Delta v)^2$ だけ増加する。そのあと単振子の力学的エネルギーは保存されるので、

$$\frac{1}{2} m (\Delta v)^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} x_0^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{\ell} x_1^2$$

が成り立つ。これより、

$$x_1 = \boxed{\sqrt{x_0^2 + \frac{\ell}{g} (\Delta v)^2}} \quad \text{⑥}$$

を得る。式④と式⑤より、

$$x_0^2 = \frac{\ell}{g} v_0^2$$

が成り立ち、題意より $\Delta v \ll v_0$ であるから、式⑥の根号内の第 2 項は第 1 項に比べて十分小さい。よって、 $|\varepsilon| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ を用いて、式⑥を

$$x_1 = x_0 \left\{ 1 + \frac{\ell}{g} \left(\frac{\Delta v}{x_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cong \boxed{x_0 + \frac{\ell (\Delta v)^2}{2 g x_0}} \quad \text{⑦}$$

と書き換え、これを答としてもよい。

同じ力積を n 回与えたあとの振幅を x_n とおけば、式⑦より、

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\ell (\Delta v)^2}{2 g x_n} \quad \text{⑧}$$

を得る。よって、力積を 1 回与えることによって生じる振幅の増加量 ($x_{n+1} - x_n$) は、振幅 x_n に反比例して小さくなる。

(5) P に同じ力積 ($-m \Delta v$) を与えつづけると、力積を 1 回与えるごとに力学的エネルギーが $\frac{1}{2} m (\Delta v)^2$ だけ増加するので、振幅が x_0 から $2x_0$ になったとき、次の関係式：

$$\frac{1}{2} \frac{m g}{\ell} x_0^2 + N \cdot \frac{1}{2} m (\Delta v)^2 = \frac{1}{2} \frac{m g}{\ell} (2x_0)^2$$

が成り立つ。これより、

$$N = \frac{\frac{1}{2} \frac{m g}{\ell} 3x_0^2}{\frac{1}{2} m (\Delta v)^2} = \boxed{3 \frac{g}{\ell} \left(\frac{x_0}{\Delta v} \right)^2} \quad (10)$$

$$= 3 \left(\frac{v_0}{\Delta v} \right)^2$$

を得る。たとえば、 $\Delta v = \frac{v_0}{10}$ なら、 $N = 300$ となる。

(B) (6) 成分 v_y による角運動量は $m x v_y$ であり、成分 v_x による角運動量は $-m y v_x$ であるから、これらを重ね合わせれば、 L は次のように表される。

$$L = \boxed{m (x v_y - y v_x)} \quad (11)$$

(7) 微小量の積 $\Delta x \Delta v_y$ と $\Delta y \Delta v_x$ を無視すれば、

$$\Delta L = m \{ (x + \Delta x) (v_y + \Delta v_y) - (y + \Delta y) (v_x + \Delta v_x) \} - m (x v_y - y v_x)$$

$$\doteq \boxed{m (x \Delta v_y + v_y \Delta x - y \Delta v_x - v_x \Delta y)} \quad (12)$$

となる。

(8) Q の加速度成分を (a_x, a_y) とすれば、速度と加速度の定義より、

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

が成り立つ。これらと Q の運動方程式：

$$m a_x = f_x, \quad m a_y = f_y$$

を用いれば、式⑫より、

$$\boxed{\frac{\Delta L}{\Delta t} = m (x a_y + v_y v_x - y a_x - v_x v_y)}$$

$$= x f_y - y f_x$$

$$= \boxed{N} \quad (13)$$

を得る。これより、力のモーメントは回転系の角運動量を変化させる物理量であることがわかる。

(C) (9) 立ち上がるまでは重心 G の力学的エネルギーが保存されるので、

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m g}{\ell} x_0^2 \quad (14)$$

が成り立つ。この式は (A) (3) の解答に出てきた。これより、

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell} x_0} \quad (15)$$

を得る。

(10) 乗り手が立ち上がる時、ブランコを支えている回転軸 C がブランコと乗り手の重心 G に及ぼす撃力は鉛直上向きであるから、これと重力の合力による C のまわりの力のモーメントは 0 である。よって、これらの力がはたらいている微小時間の間、重心 G の角運動量が保存され、

$$-m(\ell - h)v_0' = -m\ell v_0 \quad (16)$$

が成り立つ。これより次式を得る。

$$v_0' = \frac{\ell}{\ell - h} v_0 \quad (17)$$

(11) 乗り手が立ち上がってから、重心 G が左端 ($x = -x_0'$) に達するまでの間、G の力学的エネルギーが保存されるので、

$$\frac{1}{2} m v_0'^2 = \frac{1}{2} \frac{m g}{\ell - h} x_0'^2$$

が成り立ち、

$$v_0' = \sqrt{\frac{g}{\ell - h} x_0'} \quad (18)$$

を得る。式⑱と式⑮の比をとり、式⑰を用いれば、

$$\frac{x_0'}{x_0} = \sqrt{\frac{\ell - h}{\ell} \frac{v_0'}{v_0}} = \sqrt{\frac{\ell}{\ell - h}}$$

となる。 $x_0' = (\ell - h)\theta_1$, $x_0 = \ell\theta_0$ と近似できるので、求める比は次のようになる。

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \left(\frac{\ell}{\ell - h}\right) \frac{x_0'}{x_0} = \left(\frac{\ell}{\ell - h}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

(12) 重心 G が右端 ($\theta = \theta_1$) に達したとき、乗り手が瞬間的にしゃがみ込むので、 $\theta = \theta_1$ のまま \overline{CG} が $\ell - h$ から ℓ になる。よって、

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{\ell\theta_1}{\ell\theta_0} = \left(\frac{\ell}{\ell - h}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (20)$$

(13) 式⑳より、ブランコを 1 回こぐことによって振幅が $\left(\frac{\ell}{\ell - h}\right)^{\frac{3}{2}}$ 倍になるから、 N 回こぐことによって振幅が $2x_0$ を越えるとすれば、

$$\left(\frac{\ell}{\ell-h}\right)^{\frac{3}{2}N} x_0 \geq 2x_0 \quad (21)$$

が成り立つ。 $h = \frac{\ell}{10}$ のとき、 $\frac{\ell}{\ell-h} = \frac{10}{3^2}$ であるから、式(21)より、

$$N \geq \frac{2}{3} \frac{\log_{10} 2}{1 - 2 \log_{10} 3} = 4.4$$

を得る。 N はこれを満たす最小の整数であるから、答は 5 回である。

(補足)

(A) で想定した共振で $\Delta v = v_0/10$ の場合、振幅を 2 倍にするには、小物体 P に一定の力積 ($-m \Delta v$) を 300 回与えなければならなかった。一方、(C) で想定したパラメータ励振で $h = \ell/10$ の場合、振幅を 2 倍以上にするには、ブランコを 5 回こぐだけでよかった。このような差が生じたのは、(A) では小物体 P の力学的エネルギーが、その 1% 程度の公差で、等差数列的に増加するのに対して、(C) では重心 G の力学的エネルギーが、公比 $(10/9)^3$ で、等比数列的に増加するからである。このとき、1 回こぐのに要する仕事は、こぐ回数が増えるに従って増大する。

(高校物理を越えた補足説明)

(A) の共振では、小物体 P が右端に達した瞬間に左向きの力積 ($-m \Delta v$) を与えたが、それに加えて、左端に達した瞬間にも右向きの力積 ($m \Delta v$) を与えれば、より早く振幅を大きくすることができる。

一般的に、単振子の固有角振動数 $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ と同じ角振動数の外力がはたらけば、共振が起こる。それを示すために、角振動数 $\omega (\neq \omega_0)$ の外力

$$f = f_0 \cos \omega t$$

がはたらくときの単振子の強制振動を考える。このとき微小振動する物体の運動方程式は、

$$m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x + f_0 \cos \omega t \quad (22)$$

と表される。ただし、時刻 t による微分を $\dot{\quad}$ で表した。簡単のために、 $t = 0$ のとき、 $x = 0, \dot{x} = 0$ としてこれを解けば、次式を得る。

$$x(t) = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (23)$$

これより、 $\omega \rightarrow \omega_0$ のときに共振が起こることがわかる。実際、この極限において、式(23)は

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_0^2} (\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \quad (24)$$

となり、時間の経過とともに振幅が大きくなる。

(C) のパラメータ励振で、ブランコが左端に達したときにも瞬間的にしゃがみ込んで、最下点で瞬間的に立ち上がれば、すなわち、ブランコが 1 回振動する間に 2 回ブランコをこげば、より早く振幅を大きくすることができる。

このように、固有振動数の 2 倍の振動数で振動系のパラメータを変化させたときに、振幅が大きくなるパラメータ励振がいろいろある。

たとえば、図 (ii) のように、単振子のひもをなめらかな穴 C に通し、C の下にあるひもの長さ ℓ が、

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell \sin \omega t \quad (25)$$

に従って変化するように、ひもの端に及ぼしている外力を変化させる場合を考える。穴 C のまわりの小物体 P の角運動量は

$$L = m \ell^2 \dot{\theta} \quad (26)$$

であるから、(B) の解説の式 (13) より、P は次式に従って運動する。

$$\frac{d(m \ell^2 \dot{\theta})}{dt} = -m g \ell \sin \theta \quad (27)$$

微小振動で、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似できる場合には、式 (27) は、

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{\ell}}{\ell} \dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (28)$$

と書き換えられる。これに式 (25) を代入し、 $\Delta\ell \ll \ell_0$ を仮定して、 $(\Delta\ell/\ell_0)^2$ を無視すれば、式 (28) は、

$$\ddot{\theta} + \left(2\omega \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \cos \omega t \right) \dot{\theta} + \frac{g}{\ell_0} \left(1 - \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \sin \omega t \right) \theta = 0 \quad (29)$$

となる。ここで、 $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$ 、 $\omega_0 = \sqrt{g/\ell_0}$ とおき、さらに次の無次元量：

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \bar{t} = \omega_0 t, \quad \omega t = \bar{\omega} \bar{t} \quad (30)$$

を導入して、式 (29) を書き直せば、次のような無次元量で表された運動方程式を得る。

$$\frac{d^2 \theta}{d\bar{t}^2} + 2\bar{\omega} \varepsilon \cos(\bar{\omega} \bar{t}) \frac{d\theta}{d\bar{t}} + \{1 - \varepsilon \sin(\bar{\omega} \bar{t})\} \theta = 0 \quad (31)$$

これを解くのは少々やっかいなので、詳しいことは文献 1 にまかせるが、図 (iii) に示すように、パラメータ空間 $(\bar{\omega}, \varepsilon)$ の影を施した領域では不安定な振動となって、パラメータ励振が起こる。その外側の領域では安定な振動となる。具体例として、

$$\bar{\omega} = 2, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \text{初期条件: } \bar{t} = 0 \text{ のとき } \theta = 0.05, \quad \dot{\theta} = 0$$

の場合に、式 (31) を数値的に解けば、図 (iv) のようなパラメータ励振が生じる。また、この具体例で、 $\bar{\omega}$ だけを 2 から 1.5 に変更すれば、図 (v) のような安定な微小振動となる。

パラメータ励振は一般の機械や電気回路でも起こるので、それらの製作設計にあたっては注意しなければならないが、かりに試作品でパラメータ励振が起こってしまったとしても、パラメータ励振の知識があれば、それを抑えることは容易である。

逆に、パラメータ励振を積極的に利用したパラメトロン (電子計算機の回路素子の一種) が、1951 年に、東大の大学院生であった後藤英一によって発明されている。

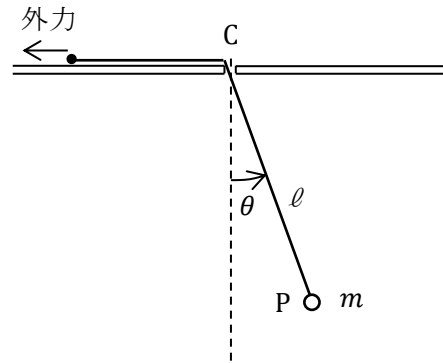


図 (ii)

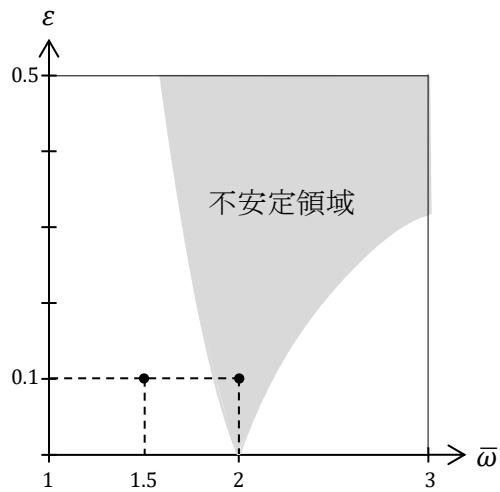


図 (iii)

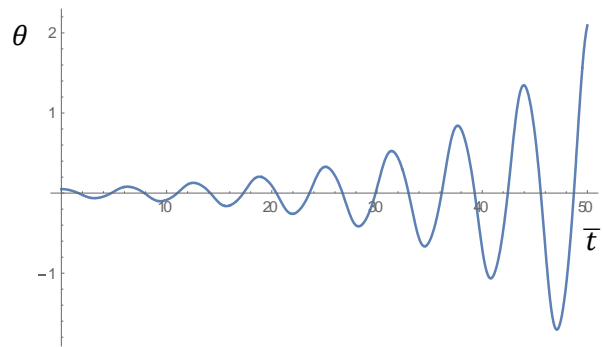


図 (iv)

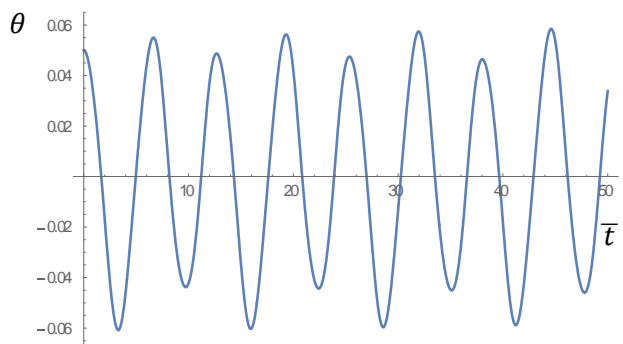


図 (v)

大学入試問題に出てくるもう一つのパラメータ励振はメルデの実験である。

図 (vi) a のように、線密度 σ の弦を振動数 f のおんさの腕とおもり W に結び付け、滑車に掛ける。水平部分の弦の長さを ℓ 、張力を T とすれば、横波に対する弦の固有振動数は、

$$f_n = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と表される。もし、 $f = f_n$ であれば、弦の左端を実質的な節の位置として、波長 $\frac{2\ell}{n}$ の定常波が生じ、弦は共振を起こす。振幅が大きくなると、空気の抵抗力がはたらいて、振幅は有限に留まる。

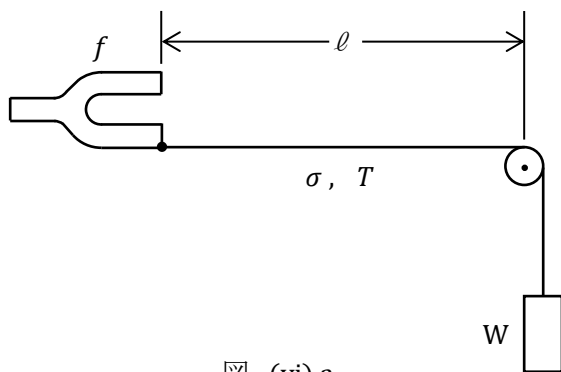


図 (vi) a

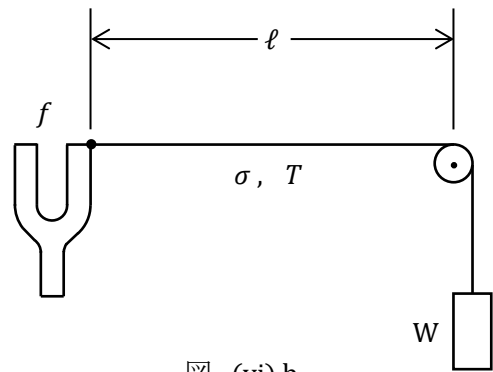


図 (vi) b

次に、図 (vi) b のように、弦の σ, ℓ, T を変えないで、おんさの腕を 90° 回転させる。この場合、もし $f = 2 f_n$ であれば、弦を伝わる振動数 f_n の擾乱が成長して、波長 $\frac{2\ell}{n}$ の定常波が生じる。これは共振ではなく、パラメータ励振である。

一例として、 $f = f_2$ の場合、おんさが 1 回振動するときの様子を図にすると、次のようになる。

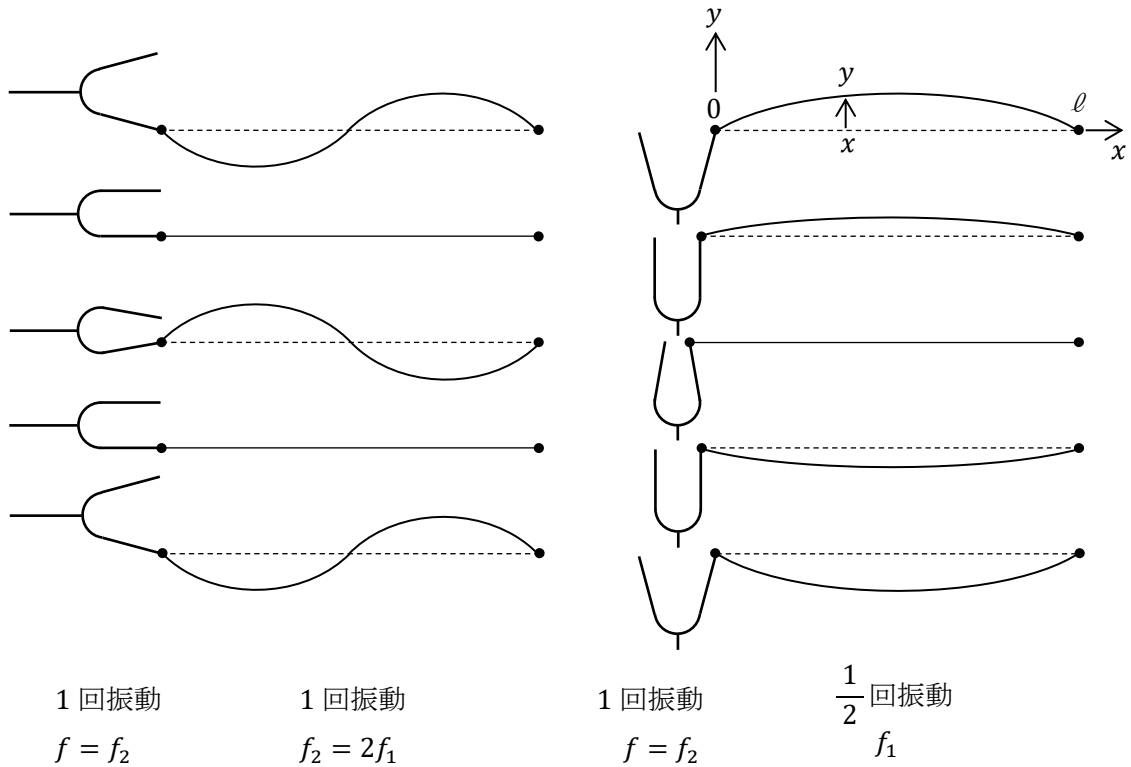


図 (vii) a 共振

図 (vii) b パラメータ励振

一般的な状況での考察は次のようになる。(文献 1, 136 頁~138 頁)。

図 (vii) b のように x 軸を導入し、位置 x 、時刻 t における弦の変位を $y(x, t)$ とすれば、 y は次の波動方程式を満たす。

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{32}$$

このとき、パラメータ σ は一定であるが、 T は一定ではない。簡単のために、張力が、

$$T(t) = T_0 + T_1 \cos \omega t \tag{33}$$

に従って微小振動するとし、 $y(x, t)$ を $T_1 = 0$ のときの正規固有関数：

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n \pi x}{\ell}$$

で展開して、

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \psi_n(t)$$

と表す。これを式②に代入すれば,

$$\sigma \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \ddot{\psi}_n(t) + (T_0 + T_1 \cos \omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 Y_n(x)}{dx^2} \psi_n(t) = 0$$

となる。この両辺に $Y_m(x)$ を掛けて, x について 0 から ℓ まで積分すれば,

$$\sigma \ddot{\psi}_m(t) + (T_0 + T_1 \cos \omega t) \left(\frac{\omega_m}{v_0} \right)^2 \psi_m(t) = 0 \quad (34)$$

を得る。ただし,

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}, \quad \omega_m = \frac{m \pi v_0}{\ell} : \text{固有角振動数}$$

である。式③の両辺を σ で割り,

$$\omega_m^2 = \delta, \quad \omega_m^2 \frac{T_1}{T_0} = \varepsilon, \quad \psi_m = \psi$$

とおけば, 式③は次数 m に関係なく, 同じ形の微分方程式 (マシュウ方程式) :

$$\ddot{\psi} + (\delta + \varepsilon \cos \omega t) \psi = 0 \quad (35)$$

に帰着する。振動系のパラメータが, 式③のように, 平均値のまわりに微小振動するときに, このマシュウ方程式が出てくる。

式③を解くのは容易でないので文献 1 にまかせる。結果だけを述べると, ω が,

$$2 \omega_m - \frac{\omega_m}{2} \frac{T_1}{T_0} < \omega < 2 \omega_m + \frac{\omega_m}{2} \frac{T_1}{T_0} \quad (36)$$

を満たすときに解は不安定となり, パラメータ励振が起こる。不等式 ③ を満たす領域を第 1 次不安定領域という。第 i 次不安定領域 ($i = 2, 3, \dots$) もあるが, 第 1 次不安定領域が最も広いので, この領域でパラメータ励振が起こる可能性が最も高くなる。図 (vii) b のような場合, $T_1 \ll T_0$ であるので, 弦の固有角振動数 ω_m の 2 倍の角振動数で張力を微小変化させると, 弦は固有角振動数 ω_m で振動し, その振幅は時間の経過とともに増大する。

電磁おんさをを用い, 図 (vii) a の共振の位置から 図 (vii) b のパラメータ励振の位置まで, その腕をゆっくり 90° 回転させたとき, 弦に生じる波がどのように変化するかを予想し, 実験で検証してみると面白い。

文献 1 小寺 恵 : 「パラメータ励振」 森北出版 (2010)

他の演習問題へ