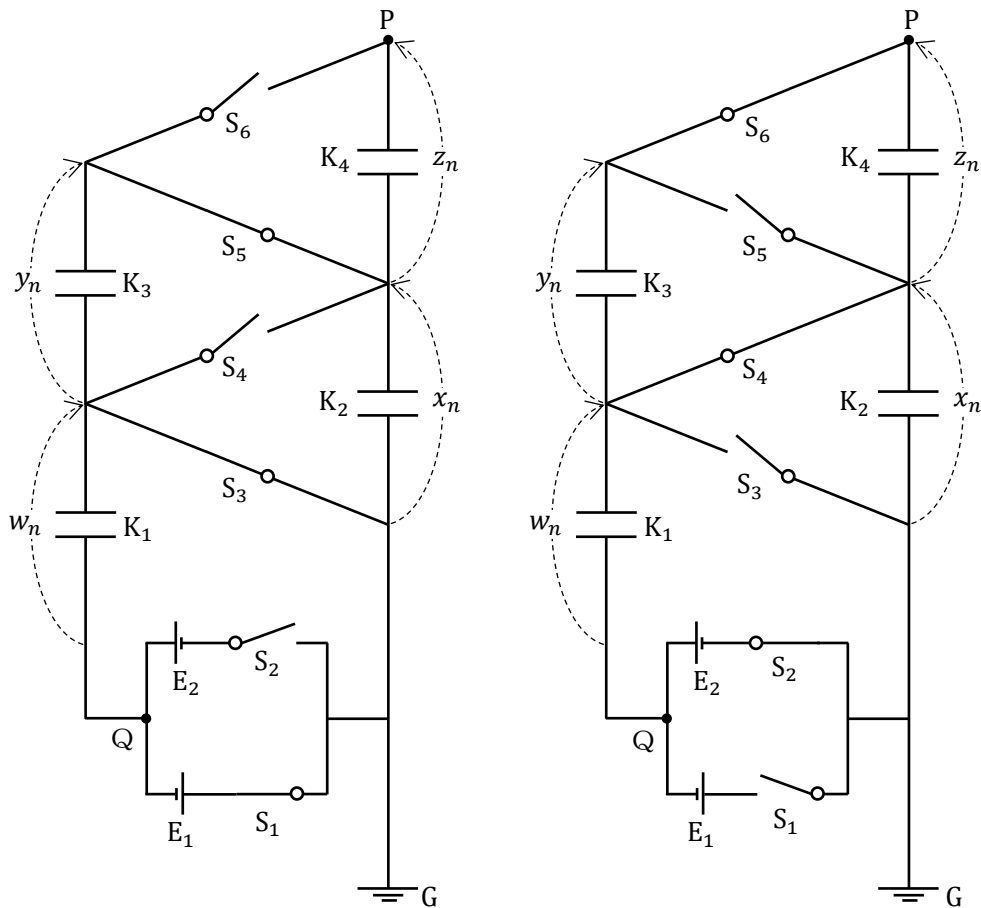


問題 5 コッククロフト・ウォルトン回路とヴァン デ グラフ発電機

私たちの身の回りには静電高電圧を用いた機器がいろいろある。たとえば、LCD のバックライト、電撃殺虫器、イオン発生器、電子レンジ、コピー機、X線医療機器などである。低電圧電源を用いて静電高電圧を得る方法はいくつかあるが、表題にある二つの方法がよく採用される。

(A) 図 1 は、コッククロフト・ウォルトン回路の原理を説明するための回路図である。2つの直流電源 E_1 と E_2 の起電力は V 、4つのコンデンサー K_1, \dots, K_4 の容量は C である。最初、6つのスイッチ S_1, \dots, S_6 は開いており、各コンデンサーは電荷を蓄えていない。スイッチは連動して動き、 S_1, S_3, S_5 が閉じていて、他が開いている接続 A か、逆に S_2, S_4, S_6 が閉じていて、他が開いている接続 B のどちらかしかない。

図 1



接 続 A

($n = 2m - 1$, m は正整数)

接 続 B

($n = 2m$, m は正整数)

最初の状態から接続 A に切り替える。これを操作 1 とする。充電が完了したあと、接続 B に切り替える。これを操作 2 とする。これにつづいて、 $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$ と何度も接続を切り替える。 n 回目の切り替え操作 n のあと、コンデンサー K_1, K_2, K_3, K_4 にかかる電圧(下極板から上極板を見たときの電位差)を、それぞれ w_n, x_n, y_n, z_n とする。また、端子 P の電位を φ_n とする。

問 1 表 1 にあるように、 $n = 1$ のとき、 $w_1 = V, x_1 = y_1 = z_1 = \varphi_1 = 0$ であることは容易にわかる。このあと、 $n = 4$ までの $w_n, x_n, y_n, z_n, \varphi_n$ の値を表 1 の空欄に書き入れよ。

表 1

操作 n	接続	w_n	x_n	y_n	z_n	φ_n
1	A	V	0	0	0	0
2	B					
3	A					
4	B					
∞	A, B					

問 2 接続 A のときに電源 E_1 によって汲み上げられた電荷は S_3 を通って K_1 の上極板に流れ込む。接続を B に切り替えると、各コンデンサーの上極板に蓄えられた電荷は変化するが、 S_3 が開いているのでそれらの総和は変化しない。コンデンサーに蓄えられる電荷は有限であるから、切り替え操作を何度も繰り返すと、 S_3 を通って汲み上げられる電荷は徐々に少なくなり、やがて各コンデンサーにかかる電圧は上限値に近づく。それらの上限値と、端子 P の電位の上限値を表 1 の $n = \infty$ の欄に記入せよ。

問 3 図 2 のような回路を組み立てる。 $2N$ 個のコンデンサー K_1, \dots, K_{2N} の容量はいずれも C で、最初電荷を蓄えていない。 $2N$ 個のダイオード D_1, \dots, D_{2N} は理想的なダイオードで、順方向のときには電流が流れるが、逆方向のときには流れない。時刻 $t = 0$ のときにスイッチ S を閉じると、交流電源の端子 Q の電位 φ_Q は図 3 のように時間変化する。充分長い時間が経過すれば、最終的に端子 P の電位 φ_P はいくらになるか。 V と N を用いて表せ。ただし、充電は速やかに行われるものとする。

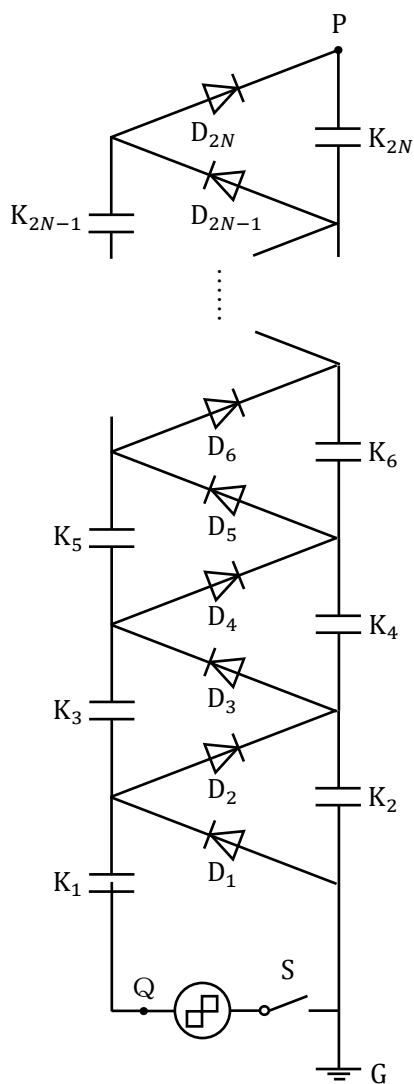


図 2

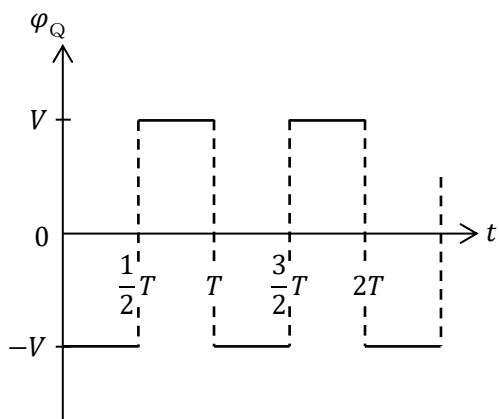


図 3

この結果からわかるように、電源電圧 V が小さくても、はしご回路の段数 N を大きくすれば、原理的には、 P G 間に非常に高い静電圧を生じさせることができる。

(B) 図 4 はヴァン デー グラーフ発電機の模式図である。S は中空の金属球で、球面の半径は a である。その底は穴が開いており、2 つの滑車 P_1 と P_2 にかけてられた絶縁性のベルトが、矢印の向きに一定の速さ v で動くように、滑車 P_2 をモーターで回転させる。ベルトからわずかに離して設置した楕状の金属針 A を直流電源 D によって正に帯電させると、放電が起こり、ベルトの表面が正に帯電する。その帯電量は、ベルトの進行方向に単位長さあたり σ である。

ベルトに乗って金属球内に入った正電荷は、金属ブラシ B によって集められ、S の外側の球面上に分布する。

金属球 S と滑車 P_1, P_2 は絶縁性の高い構造体 C によって支えられている。その大きな電気抵抗値を R とする。

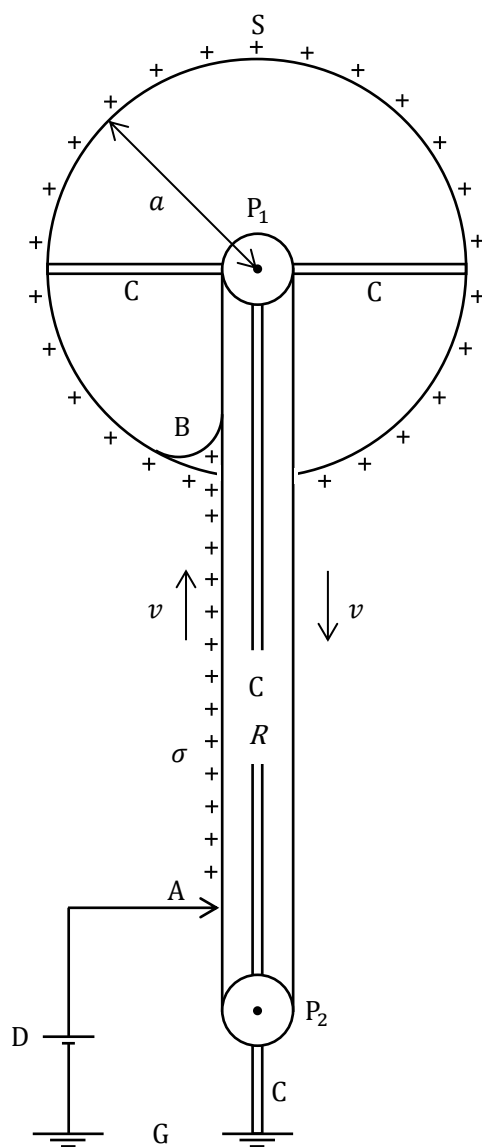


図 4

問 4 S の球面上に電荷 Q が分布しているとき、S の電位と球面のすぐ外側での電場の強さはいくらか。ただし、この電位と電場は、誘電率 ϵ_0 の空气中に点電荷 Q だけがあるときに、点電荷を中心とする半径 a の球面上の電位と電場に等しいとしてよいものとする。電位の基準点は無限遠である。

問 5 ベルトが動き出して S の球面が帯電し始める時刻を $t = 0$ とする。そのあとの時刻 t のときに、球面上に蓄えられている電気量と球面の電位はいくらになるか。また、時刻 0 から t の間に滑車 P_2 を回転させている外力がした仕事はいくらか。ただし、球面の中心から針 A までの距離は a に比べて充分大きいとする。また、滑車の回転軸とブラシ B での摩擦による発熱は無視できるものとする。

問 6 空気中では、金属球面近傍の電場が 3×10^6 V/m を超えると空気の絶縁が破れ、球面と地面の間で放電が起こり、人工落雷となる。 $a = 0.5$ m であれば、人工落雷が生じるのは S の電位がいくらになったときか。

問 7 構造体 C の絶縁性が高くても、金属球 S と地面 G の間の電位差 V_s が大きくなると、C を流れる電流を無視することができなくなる。そのためにベルトを動かし続けても、人工落雷が生じず、 V_s が上限値 V_f に留まることが起こり得る。

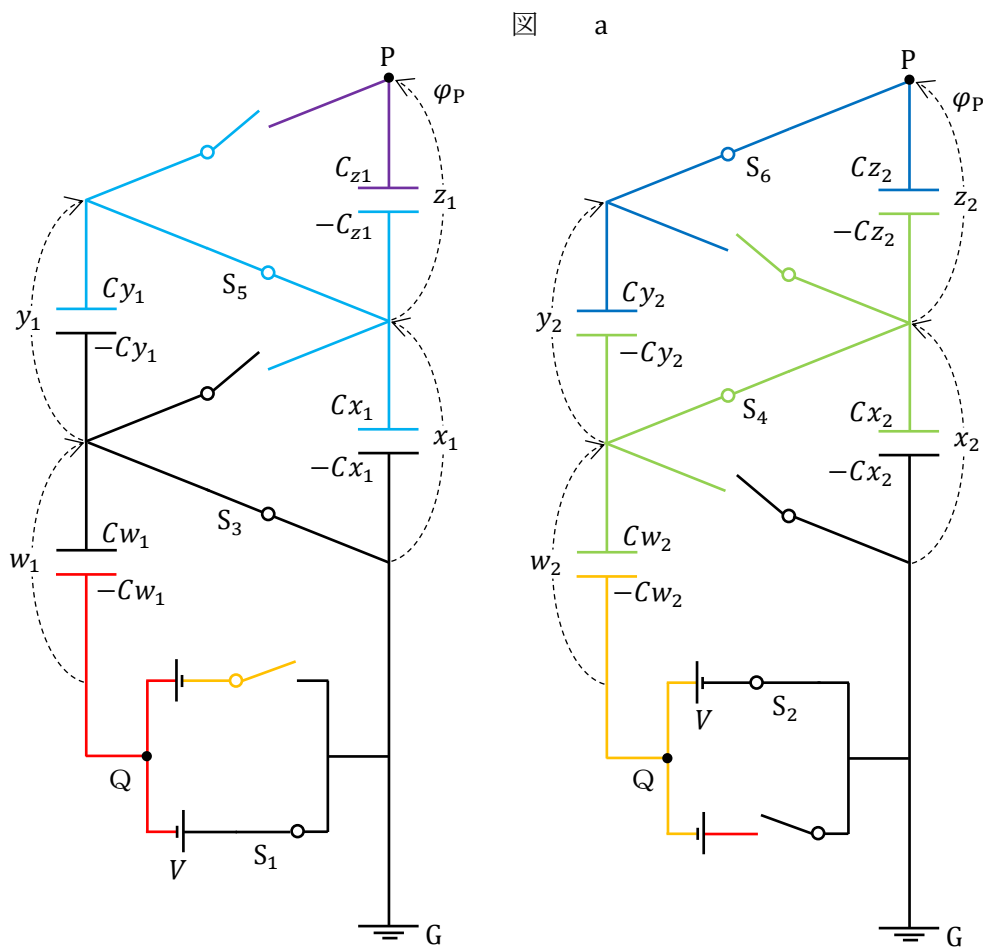
たとえば、 $R = 2 \times 10^{10} \Omega$, $\sigma = 5 \times 10^{-6} \text{ C/m}$, $v = 10 \text{ m/s}$ であれば、 V_f はいくらか。

ヴァン デ グラーフ発電機は、現在でも高エネルギー加速器の前段加速器として用いられている。その起電力は超高電圧でなければならないので、人工落雷を起こすことなく V_f が高くなるように、空気よりも絶縁性の高い高圧ガスを封入した密閉容器内に発電機を設置している。

問題 5 の解答と解説

(A)

問 1 スwitchの操作回数 n が 1~4 のときに、コンデンサー K_1, \dots, K_4 の極板に与えられる電荷を図 a に示す。静電状態ではひとつながりの導体の電位はどこでも同じであることを、同じ色にすることによって表している。未知数は w_n, x_n, y_n, z_n の 4 つであるから、隔離された極板上の総電気量はスイッチを切り替える前の同じ極板上の総電気量に等しいこと (電荷保存則) と、コンデンサーと電池を経由する閉回路を一周すれば、電位はもとの値に戻ること (電位は位置の一価関数) を表す式を 4 つ立てて解けばよい。その連立方程式と計算結果は回路図の下に与えてある。表 a には、それらをまとめたものと、参考のために、 $n = 5 \sim 8$ のときの計算結果も与えてある。



$n = 1$

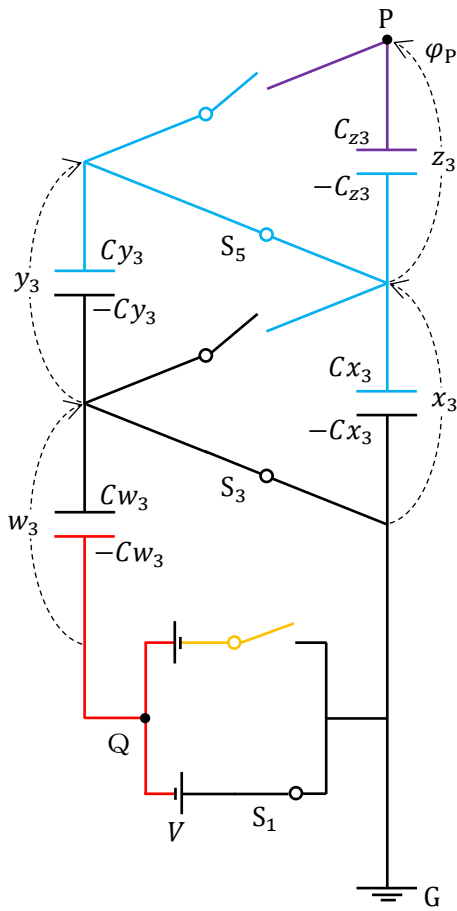
$$\left. \begin{aligned} Cx_1 + Cy_1 - Cz_1 &= 0 \\ Cz_1 &= 0 \\ -w_1 + V &= 0 \\ x_1 - y_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow w_1 = V, x_1 = y_1 = z_1 = 0$

$n = 2$

$$\left. \begin{aligned} Cw_2 + Cx_2 - Cy_2 - Cz_2 &= CV \\ Cy_2 + Cz_2 &= 0 \\ x_2 - w_2 - V &= 0 \\ z_2 - y_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

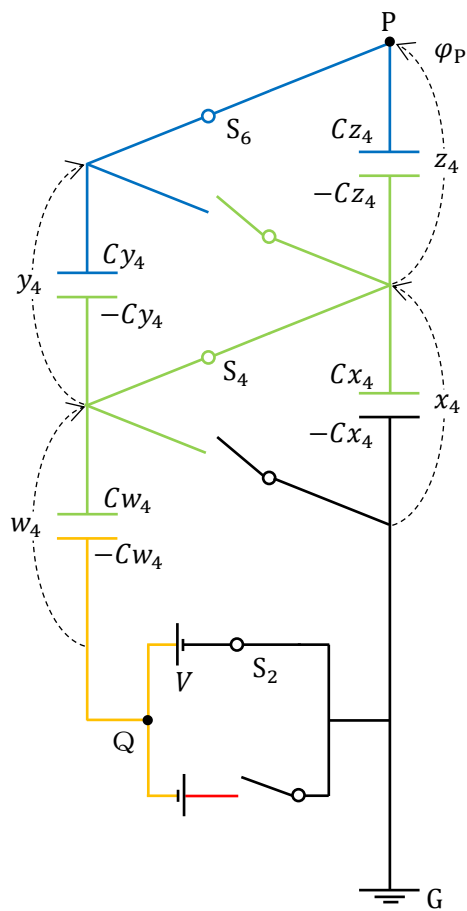
$\Rightarrow w_2 = 0, x_2 = V, y_2 = z_2 = 0$



$n = 3$

$$\left. \begin{aligned} Cx_3 + Cy_3 - Cz_3 \\ = Cx_2 + Cy_2 - Cz_3 = CV \\ Cz_3 = Cz_2 = 0 \\ -w_3 + V = 0 \\ x_3 - y_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow w_3 = V, x_3 = y_3 = \frac{1}{2}V, z_3 = 0$$



$n = 4$

$$\left. \begin{aligned} Cw_4 + Cx_4 - Cy_4 - Cz_4 \\ = Cw_3 + Cx_3 - Cy_3 - Cz_3 = CV \\ Cy_4 + Cz_4 = Cy_3 + Cz_3 = \frac{1}{2}CV \\ x_4 - w_4 - V = 0 \\ z_4 - y_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow w_4 = \frac{1}{4}V, x_4 = \frac{5}{4}V, y_4 = z_4 = \frac{1}{4}V$$

問 2 スイッチの切り替えを何度も行くと、最終的に各コンデンサーにかかる電圧は一定の値

$w_\infty, x_\infty, y_\infty, z_\infty$ に近づく。このとき、

接続 A では、 $w_\infty = V, x_\infty = y_\infty$

接続 B では、 $x_\infty = V + w_\infty, y_\infty = z_\infty$

が成り立つので、

$$w_\infty = V, x_\infty = y_\infty = z_\infty = 2V$$

$$\varphi_\infty = x_\infty + z_\infty = 4V$$

を得る。

表 a

操作 n	接続	w_n	x_n	y_n	z_n	$\varphi_n = x_n + z_n$
1	A	V	0	0	0	0
2	B	0	V	0	0	V
3	A	V	$\frac{1}{2}V$	$\frac{1}{2}V$	0	$\frac{1}{2}V$
4	B	$\frac{1}{4}V$	$\frac{5}{4}V$	$\frac{1}{4}V$	$\frac{1}{4}V$	$\frac{3}{2}V$
5	A	V	$\frac{3}{4}V$	$\frac{3}{4}V$	$\frac{1}{4}V$	V
6	B	$\frac{3}{8}V$	$\frac{11}{8}V$	$\frac{1}{2}V$	$\frac{1}{2}V$	$\frac{15}{8}V$
7	A	V	$\frac{15}{16}V$	$\frac{15}{16}V$	$\frac{1}{2}V$	$\frac{23}{16}V$
8	B	$\frac{15}{32}V$	$\frac{47}{32}V$	$\frac{23}{32}V$	$\frac{23}{32}V$	$\frac{35}{16}V$
∞	A, B	V	$2V$	$2V$	$2V$	$4V$

問 3 φ_Q が V から $-V$ になると、左側のコンデンサー $K_1, K_3, \dots, K_{2N-1}$ の上極板の電位が突然下がるので、ダイオード $D_1, D_3, \dots, D_{2N-1}$ に順方向の電圧がかかり、 D_2, D_4, \dots, D_{2N} に逆方向の電圧がかかる。その結果、 K_1 は電源によって充電され、 $K_2 \rightarrow K_3, K_4 \rightarrow K_5, \dots, K_{2N-2} \rightarrow K_{2N-1}$ の向きに上極板上の電荷が移動する。

次に、 φ_Q が $-V$ から V になると、左側のコンデンサーの上極板の電位が突然上がるので、ダイオード D_2, D_4, \dots, D_{2N} に順方向の電圧がかかり、 $D_1, D_3, \dots, D_{2N-1}$ に逆方向の電圧がかかる。その結果、 $K_1 \rightarrow K_2, K_3 \rightarrow K_4, \dots, K_{2N-1} \rightarrow K_{2N}$ の向きに上極板上の電荷が移動する。このようにして、電源によって K_1 の上極板に汲み上げられた正電荷が、つぎつぎと $K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_3 \rightarrow \dots \rightarrow K_{2N-1} \rightarrow K_{2N}$ の向きに上極板上の電荷が汲み上げられる。最終的にコンデンサー $K_1, K_2, \dots, K_{2N-1}, K_{2N}$ に蓄えられる電荷が変化しなくなると、それぞれにかかる電圧 $V_1, V_2, \dots, V_{2N-1}, V_{2N}$ は次式を満たす。

$$V_1 = V, V_{2N} = V_{2N-1} = V_{2N-2} = \dots = V_2 = V_1 + V = 2V$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{A 接続} & \text{B 接続} & \text{A} & \text{B} & \dots & \text{A} & \text{B} \end{matrix}$$

よって、端子 P の電位は、

$$\begin{aligned} \varphi_P &= \varphi_G + V_2 + V_4 + \dots + V_{2N-2} + V_{2N} = 0 + N \times 2V \\ &= \boxed{2NV} \end{aligned}$$

となる。

(B)

問4 空気中に点電荷 Q があるとき、クーロンの法則またはガウスの法則より、点電荷を中心とする半径 r の球面上で、電場の外向き成分 $E(r)$ は、

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

で与えられ、電位 $V(r)$ は、単位正電荷あたりの静電気力の位置エネルギーであるから、

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r') dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

となる。題意より、求める電場 E_S と電位 V_S は次のように近似できる。

$$E_S = E(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \quad \text{①}$$

$$V_S = V(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \quad \text{②}$$

問5 時刻 t までにブラシ B が集めて S の球面に送り込んだ電気量 Q_S は、

$$Q_S = \sigma v t \quad \text{③}$$

である。よって、時刻 t のとき球面の電位は、式②と式③より、

$$V_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma v t}{a} \quad \text{④}$$

となる。ベルトは一定の速さで動くので、図 b に示すように、微小時間 Δt の間に針 A からベルトに乗り移る微小電荷 $\sigma v \Delta t$ が、針 A から S の球面に一足飛びに運び上げられたと考えればよい。それに要した仕事 ΔW は微小電荷の位置エネルギーの増加になるから、

$$\Delta W = (\sigma v \Delta t) V_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sigma v)^2}{a} t \Delta t$$

となる。時刻 t を n 等分して $\Delta t = t/n$ とすると、時刻 $t' = 0$ から $t' = t$ までの間に微小電荷を運び上げるときに外力がする仕事の和 W は、

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sigma v)^2}{a} (i \Delta t) \Delta t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sigma v)^2}{a} \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{t}{n}\right)^2$$

と表され、 $n \rightarrow \infty$ 極限では、

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sigma v t)^2}{a}$$

となる。

金属球 S と無限遠でコンデンサーが形成されていると見なすと、その容量 C は、式③と式④より、

$$C = \frac{Q_S}{V_S} = 4\pi\epsilon_0 a$$

となるから、

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q_S^2}{C}$$

と表される。すなわち、外力がした仕事 W はこのコンデンサーに蓄えられる静電エネルギーになったと考えられる。具体的には、金属球の外側の全空間を満たしている電気力線がそのエネルギーを担っているのである。

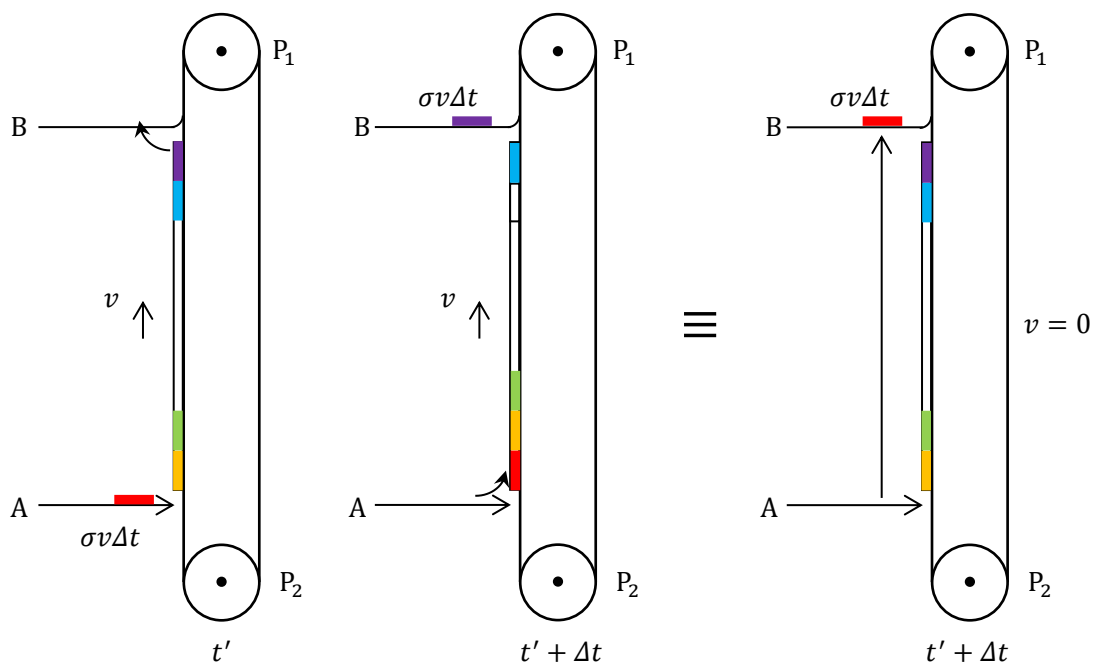


図 b

問6 式①と式②より、

$$V_S = aE_S$$

が成り立つ。 Q_S が増加して、 E_S が 3×10^6 V/mになったとき、人工落雷が起こる。そのときSの電位は

$$V_S = 0.5 \text{ m} \times 3 \times 10^6 \text{ V/m} = \boxed{1.5 \times 10^6 \text{ V}}$$

である。

問7 $V_S = V_f$ のとき、 $G \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow G$ の向きに一定電流 I_S が流れる。その電流値は、

$$AB \text{ 間では, } I_S = \sigma v$$

$$B \rightarrow C \rightarrow G \text{ では, } I_S = \frac{V_f}{R}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V_f &= R \sigma v \\ &= 2 \times 10^{10} \Omega \times 5 \times 10^{-6} \text{ C/m} \times 10 \text{ m/s} \\ &= \boxed{1.0 \times 10^6 \text{ V}} \end{aligned}$$

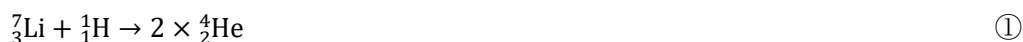
となる。

(余談)

図 2 では、図 1 との対応をわかりやすくするために、矩形波交流電源を採用したが、振幅 V の正弦波交流電源でも PG 間の出力電圧は $2NV$ になる。出力電圧を大きくするには、正弦波交流電圧を変圧器によって昇圧しておいて、それを QG 間の入力電圧 V とするか、図 2 のはしご回路の段数 N を増やせばよい。この回路の利点は、各段のコンデンサーに要求される耐電圧が段数とは関係なく、 $2V$ より少し大きければよいという点である。

J.D.Cockcroft と E.T.S.Walton が組み立てた CW 回路の最大出力は、 $7.1 \times 10^5 V$ であった。彼らは $6 \times 10^5 V$ 以下の電圧で加速した陽子をさまざまな元素の原子核に衝突させ、どのような核反応が起きるのかを調べた。

生成粒子の検出には ZnS によるシンチレーション光を用い、そのエネルギーは、生成粒子を雲母の薄片に照射して透過粒子数を数えることによって測定した。その結果、標的がリチウム有的时候に、同程度のエネルギーをもつ 2 つの粒子が逆方向に飛び出してくることを見つけ、次の核反応が起きていると考えた。



これが正しいことはその後の実験で確認されている。核反応①は、人工的に作り出された高エネルギー粒子によって起こされた初めての原子核変換となった。この業績によって、コッククロフトとウォルトンに 1951 年のノーベル物理学賞が授与された。

人工的でない高エネルギー粒子 (Po から放射される α 粒子) によって初めて起こさせた原子核変換は、



である。この発見は E.Rutherford の偉大な業績として有名であり、筆者もこれに絡めて講義中に錬金術の話をしたことがある。ところが最近になって、この核反応で ${}^{17}_8\text{O}$ が生じることを最初に指摘したのは P.Blackett であり、ラザフォードは陽子が飛び出してくることを確認しているが、 ${}^{14}_7\text{N}$ は破壊されてより小さな原子核になると考えていたことがわかったという。エーッ!?

核反応①は発熱反応で、核反応②は吸熱反応である。陽子と α 粒子の関係に注目すると、これら 2 つの反応はたがいに逆反応のように見える。これらはいずれも物理学史上の有名な核反応であり、質量とエネルギーの等価性を説明するのにふさわしいので、入試問題でもときどき取り上げられる。

また、核反応①では、反応まえの粒子が正面衝突をしたとして、2 粒子の最接近距離を求めると、それが 2 粒子の半径の和よりも大きくなる。この計算は高校生でもできる。2 粒子は離れているのにクーロン斥力の障壁を乗り越えて両者が出合い、核反応が起こる。この現象はトンネル効果によって生じるというガモフの説を紹介すれば、高校生の興味を引きつけることができると思う。

他の演習問題へ