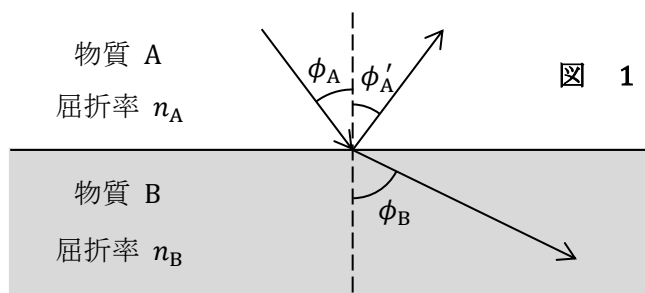


問題 45 光ファイバーを用いた固体の熱膨張率の測定

次の文章を読んで、 に適した式または数値を、{ } からは適切なものを一つ選びその番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。なお、 はすでに で与えられたものと同じものを表す。また、問 1 では、指示にしたがって、解答を解答欄に記入せよ。ただし、円周率を π とする。

物質中を光が進むときのふるまいを考え、それを応用した光ファイバーなどについて考察しよう。以下では空気の屈折率を 1 とする。

(1) 図 1 のように屈折率が n_A の物質 A と屈折率が n_B の物質 B が平らな面で接しており、 $n_A > n_B$ とする。A から B へ光が入射したとき、境界面の法線に対する角度として、入射角 ϕ_A 、反射角 ϕ'_A 、屈折角 ϕ_B



を定める。 $\phi'_A =$ **あ** であり、 ϕ_A 、 ϕ_B 、 n_A 、 n_B の関係は $\frac{n_A}{n_B} =$ **い** となる。 ϕ_A がある値 ϕ_R より大きいとき、光は境界面で全反射される。 ϕ_R と n_A 、 n_B の関係は $\sin \phi_R =$ **う** である。

(2) 光ファイバーは、図 2 (a) のように屈折率の異なるガラスを同軸状の細線にしたものである。中心部分をコア、外側部分をクラッドとよぶ。コアとクラッドの屈折率をそれぞれ $n_1 (> 1)$ 、 $n_2 (> 1)$ とする。また、コアの軸を含む平面内を進む光を考える。

屈折率の関係が { **え** : ① $n_1 > n_2$, ② $n_1 < n_2$, ③ $n_1 = n_2$ } で、さらにコア内で光の進む方向と光ファイバーの軸方向のなす角 θ がある角度 θ_0 より小さければ、図 2 (b) のように光はコアとクラッドの境界で全反射される。(1) での議論をふまえると、 θ_0 と n_1 および n_2 の関係は $\sin \theta_0 =$ **お** となる。このように光がコアとクラッドの境界面で全反射されるためには、光ファイバーの端面において空気中からコアに光が入射する際に、軸方向に対する光の入射角 θ_{in} がある条件を満たす必要がある。その条件を、 $\sin \theta_{in}$ 、 n_1 、 n_2 を用いて表すと、 **か** $> \sin \theta_{in}$ となる。ただし、光ファイバーの端面はその軸方向に対して垂直であると、端面においてコアの軸上から入射する光を考えよ。

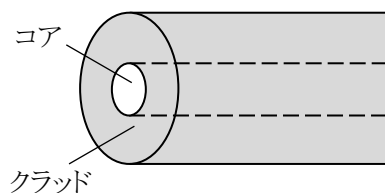


図 2 (a)

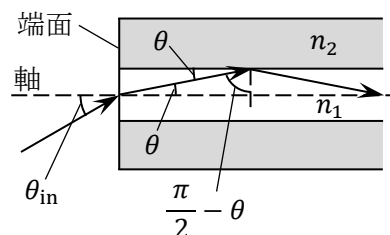


図 2 (b)

(3) 入射した光が光ファイバー中を進むためには、(2) の条件だけでは不十分である。それを考察しよう。

コアの軸を含む平面内を進む光を考える。図3のように、コア中の光の波長を λ_1 とし、光の進行方向とコアの軸方向のなす角度を θ とする。このとき、径方向の波面間の距離を λ_R とすると、 $\lambda_R =$ となり、したがって、径方向には波長が λ_R の波が生じているとみなせる。

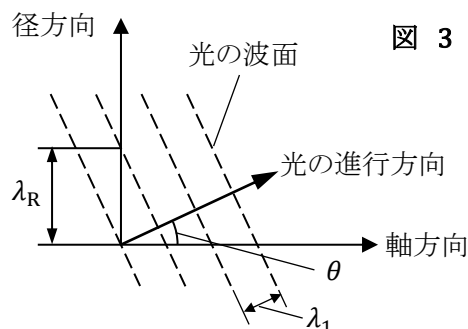


図 3

半径 r_1 のコア内で光が弱まらずに進んでいくとき、径方向には定在波が形成されている。ここでは、議論を簡単にするため、自然数 N に対し、コアの直径が λ_R の $\frac{N}{2}$ 倍であればそのような定在波が形成されるとする。このとき、 λ_1, r_1, N を用いて、 $\sin \theta =$ と表せる。

実際に光ファイバーを使う際には、空気中での波長が λ_0 の光をレンズ等で集光してコアに入射させるため、光はさまざまな θ_{in} で入射し、入射直後の θ は連続的な値を持ち得る。そのうち $\sin \theta =$ を満たす θ を持つ光だけがコア内を進むことができる。 N で特徴づけられるこの光をモードとよぶ。一方、ある N のモードについて、 λ_0 がある値 C_N より大きいとき、このモードはコアとクラッドの境界で全反射できず伝わらなくなる。 C_N を r_1, n_1, N, θ_0 を用いて表すと、 $C_N =$ となる。ここで、 $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$ の関係を用いよ。 λ_0 が $C_2 < \lambda_0 < C_1$ を満たすとき、コア内を伝わる光は $N = 1$ のモードのみとなる。下限 C_2 はカットオフ波長とよばれ、 r_1, n_1, n_2 を用いて と表せる。

(4) 以下では、 $N = 1$ のモードだけが伝わる場合を考える。コア内の波長が λ_1 の光は、図4のような波の合成の結果、軸方向と垂直な波面をもつ波とみなせる。また、 θ が小さい場合を考え、合成された光の波長は λ_1 と等しいとする。

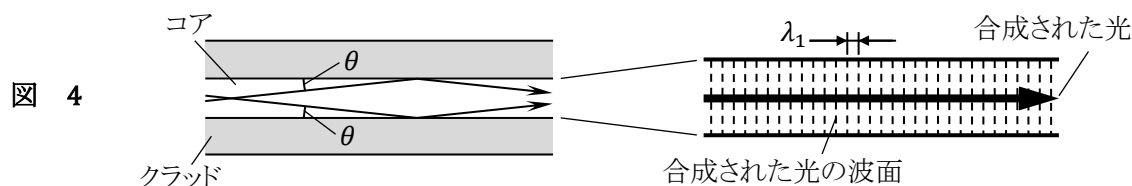


図5のように、光ファイバーのコアに、光を散乱する構造を周期的に軸方向に導入したものを考える。これをファイバー・ブラッグ・グレーティング (FBG) という。この構造の周期を a とすると、FBGは間隔 a の回折格子のようにはたらく。すなわち、入射した光のごく一部が散乱されて入射側へと返っていくが、たがいに a 離れた位置からの散乱光が強め合うとき強い光が返っていき、図5の検出器で検出することができる。軸方向に返っていく光が強め合う条件から、検出できる光の最も長い波長は、 a, n_1 を用いて $\lambda_0 =$ と表すことができる。検出器が検出するのは空気中の波長であることに注意せよ。以下では強め合って返っていく光のうち波長が の光を考え、これを反射光とよぶ。

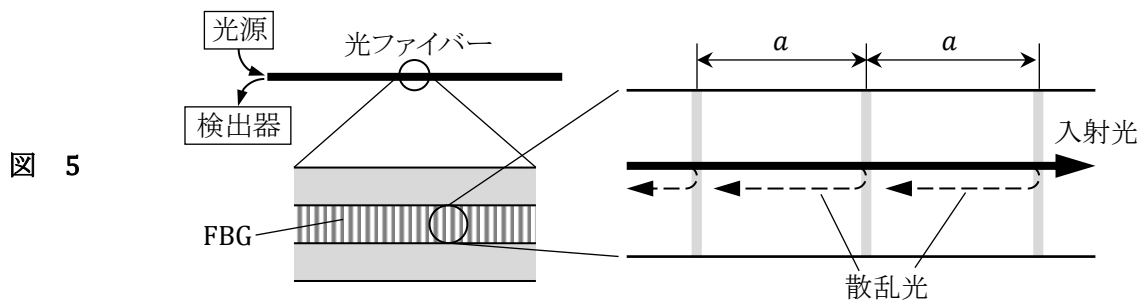


図 5

(5) FBG を含む光ファイバーの一部分を考える。これが長さ D の状態から D とくらべて十分に小さい量 ΔD だけ一様に伸縮し、長さが $D + \Delta D$ になると、FBG の周期も a から $a + \Delta a$ に変化する。この場合、 D 、 ΔD 、 a 、 Δa の関係は、し である。また、この周期の変化により、FBG からの反射光の波長も λ_0 から $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ に変化する。光の波長は高感度に計測できるため、FBG は微小な伸縮を検出するセンサーとして利用できる。ここで、 A を定数として、 $\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = A \frac{\Delta a}{a}$ とおく。 A は、伸縮にともなう FBG 内のコアの屈折率の微小な変化の影響などを含んだ係数である。

A を決定するため、 $n_1 = 1.5$ の光ファイバーに波長が 1500 nm 付近の連続スペクトルの光を導入し、FBG を含む部分の長さを $D = 10.00$ mm から変化させながら、FBG からの反射光の強度と波長の関係を空气中で測定した。すると、図 6 の結果が得られた。この結果から係数 A は有効数字 1 桁で $A =$ す $と求めることができる。$

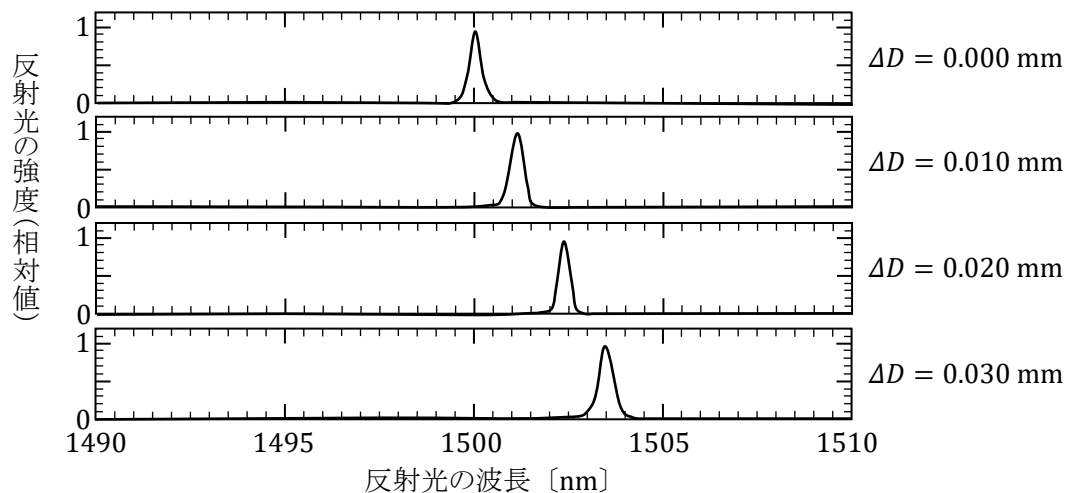


図 6

FBG の応用例の一つに、熱膨張測定がある。固体物質の長さを L 、絶対温度を T とすると、多くの物質は室温付近において $L = L_0 \{1 + \alpha (T - T_0)\}$ という関係を示す。係数 α は線膨張率、 T_0 は室温に近い基準温度、 L_0 は $T = T_0$ での長さである。

上述の FBG を、長さ $L_0 = 20.0$ mm の固体物質 X の試料に図 7 (a) のように貼り付けた。X は一様に熱膨張し、光ファイバーは X の熱膨張に完全に追従して伸縮すると仮定する。また、温度変化による n_1 の変化は微小である。FBG に空气中での波長が 1500 nm 付近の連続スペクトルの光を導入すると、基準温度において 1500.00 nm の光が反射され、温度を変えながら反射光の空气中

での波長の変化を測定した結果、図 7 (b) が得られた。ただし、試料の熱膨張以外に起因する波長の変化は差し引いてある。表 1 は X の候補物質とそれらの線膨張率である。

問 1 実験結果と A の値を用い、X が 表 1 のどの物質かを推定せよ。議論の過程も示せ。

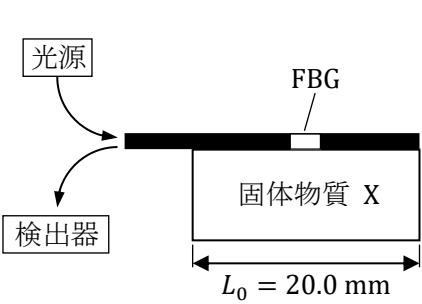


図 7 (a)

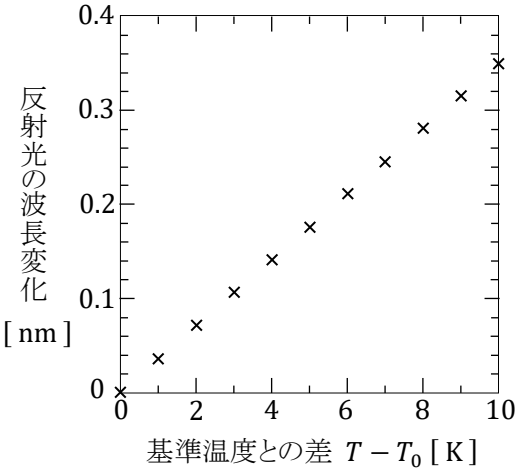


図 7 (b)

表 1

物質名	線膨張率 [$10^{-6}/\text{K}$]
白金	8.8
銀	18.9
亜鉛	30.2

問題 45 の解答と解説

この問題は京都大学の 2024 年度入試問題である。以下の解答は筆者が作成した。

光ファイバーといえば，通信情報を伝送するための光導波路のイメージが強いが，この問題のように精密な計測装置にも使われており，応用例は多岐に亘る。

この問題に現れる角度はすべて 0° と 90° の間の角度である。

(1) (あ) 反射の法則より， $\phi'_A = \boxed{\phi_A}$

(い) 屈折の法則 $n_A \sin \phi_A = n_B \sin \phi_B$ より， $\frac{n_A}{n_B} = \boxed{\frac{\sin \phi_B}{\sin \phi_A}}$

(う) $n_A > n_B$ のとき， $\sin \phi_R = \boxed{\frac{n_B}{n_A}}$ として， $\phi_A > \phi_R$ であれば，式 (い) より屈折角 ϕ_B は，

$$\sin \phi_B = \frac{n_A}{n_B} \sin \phi_A > \frac{n_A}{n_B} \sin \phi_R = 1$$

を満たさなければならないが，これを満たす ϕ_B は存在しない。すなわち，入射光は屈折しないで全反射する。 ϕ_R を臨界角という。

(2) (え) 全反射が起こるためには臨界角 ϕ_R が存在しなければならない。そのためには入射側 (コア) の屈折率が屈折側 (クラッド) の屈折率より大きくなければならない。よって，正解は $\boxed{\text{①}}$

(お) $n_1 > n_2$ であるとき，全反射が起こる条件は， $\sin \phi_R = n_2/n_1$ として，

$$\frac{\pi}{2} - \theta > \phi_R \quad \rightarrow \quad \theta < \frac{\pi}{2} - \phi_R$$

である。題意より，右辺の $\frac{\pi}{2} - \phi_R$ が θ_0 であるから，

$$\sin \theta_0 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_R \right) = \cos \phi_R = \sqrt{1 - \sin^2 \phi_R} = \boxed{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2}}$$

となる。

(か) 端面での屈折に対して， $\sin \theta_{\text{in}} = n_1 \sin \theta$ が成り立ち，コアとクラッドの境界面で全反射するためには， $\theta < \theta_0$ が成り立たなければならない。これらから次の関係式を得る。

$$\sin \theta_{\text{in}} < n_1 \sin \theta_0 = \boxed{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

(3) (き) 図 3 より，半径方向の波面間距離 λ_R は， $\lambda_R = \boxed{\frac{\lambda_1}{\sin \theta}}$ となる。

(く) 題意より，半径方向に定在波 (定常波) が生じる条件は，

$$2r_1 = \lambda_R \frac{N}{2}$$

である (補足 1)。これと式 (き) より，次の式を得る。

$$2r_1 = \frac{\lambda_1}{\sin \theta} \frac{N}{2} \quad \rightarrow \quad \sin \theta = \boxed{\frac{N \lambda_1}{4 r_1}}$$

(け) コアとクラッドの境界面で全反射を起こさない条件は， $\theta > \theta_0$ であるから，

$$\sin \theta > \sin \theta_0 \rightarrow \frac{N \lambda_1}{4 r_1} > \sin \theta_0$$

が成り立つ、さらに屈折率の定義式より、 $\lambda_1 = \lambda_0 / n_1$ が成り立つので、上式は、

$$\frac{N \lambda_0}{4 n_1 r_1} > \sin \theta_0 \rightarrow \lambda_0 > \frac{4 n_1 r_1}{N} \sin \theta_0$$

と書き換えられる。よって、

$$C_N = \boxed{\frac{4 n_1 r_1}{N} \sin \theta_0}$$

(こ) $N \geq 2$ の場合には全反射を起こさず、 $N = 1$ の場合に全反射を起こす条件、すなわち、 $N = 1$ のモードだけがコア内を伝わる条件は、 $C_2 < \lambda_0 < C_1$ で、カットオフ波長 C_2 は、(け)と(お)の答より、

$$C_2 = \frac{4 n_1 r_1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \boxed{2 r_1 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

となる。

(4)(さ) 題意より、 a だけ離れた 2 つの格子からの散乱光が強め合うときに、強い光が返ってくる。その条件式は、2 つの反射散乱光の光路差 $2 n_1 a$ が $N \lambda_0$ に等しくなることであるから、 $\lambda_0 = 2 n_1 a / N$ となる。これを満たす最も長い波長は、 $N = 1$ の場合で、 $\lambda_0 = \boxed{2 n_1 a}$ となる。

(5)(し) 伸縮が一樣であるから、伸び率は光ファイバーのどの部分でも同じで、次の式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta a}{a}}$$

(す) 図 6 より、FBG が $D = 10.00 \text{ mm}$ から $D + \Delta D = 10.030 \text{ mm}$ まで伸びる間に、反射光の波長が $\lambda_0 = 1500 \text{ nm}$ から $\lambda_0 + \Delta \lambda_0 = 1503.5 \text{ nm}$ まで長くなる。よって、

$$A = \frac{\Delta \lambda_0 / \lambda_0}{\Delta a / a} = \frac{\Delta \lambda_0 / \lambda_0}{\Delta D / D} = \frac{3.5 \text{ nm} / 1500 \text{ nm}}{0.030 \text{ mm} / 10.00 \text{ mm}} = \frac{7}{9} \approx \boxed{0.8}$$

このように、 $A < 1$ となる理由については(補足 2)で説明する。

問 1 図 7 (b) が示すように、固体 X の温度が基準温度 T_0 から $\Delta T = T - T_0 = 10 \text{ K}$ だけ上昇する間に、反射光の波長は $\lambda_0 = 1500 \text{ nm}$ から $\Delta \lambda_0 = 0.35 \text{ nm}$ だけ長くなっている。したがって、固体 X の伸び率は次のようになる。

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{A} \frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{9}{7} \frac{0.35 \text{ nm}}{1500 \text{ nm}} = 3 \times 10^{-4}$$

一方、線膨張率 α の定義より、 α は、

$$\alpha = \frac{(L - L_0) / L_0}{T - T_0} = \frac{\Delta L / L_0}{\Delta T}$$

と表されるので、

$$\alpha = \frac{3 \times 10^{-4}}{10 \text{ K}} = 30 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

となる。この値と表 1 に与えられた数値から、この試料は $\boxed{\text{亜鉛}}$ であると推定される。

(補足 1)

屈折率 n_1 のコアから屈折率 $n_2 (< n_1)$ のクラッドに向かって入射角 ϕ_1 で入射した光が、境界面で全反射するとき、位相のずれ δ_r は ϕ_1 の関数として表される(文献 1)。それによると、 $\phi_1 = \phi_R$ (臨界角) のとき $\delta_r = 0$ で、 ϕ_1 が ϕ_R から増加すると δ_r は単調に増加し、 $\phi_1 \equiv \pi/2$ のとき $\delta_r \equiv \pi$ となる(文献 1 では ϕ_1 を θ_1 で表している)。

これはS偏光とP偏光のどちらでも成り立つ。光は電磁波で、電場ベクトル $\vec{E}$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}$ が互いに直角方向に振動しながら伝わる。図 8 に示すように、光の進行方向 $\vec{k}$ と境界面の法線方向 $\vec{n}$ がなす面に対して垂直に、 $\vec{E}$ が振動するものをS偏光、 $\vec{B}$ が振動するものをP偏光という。通信工学では、これらをそれぞれTE波、TH波という。

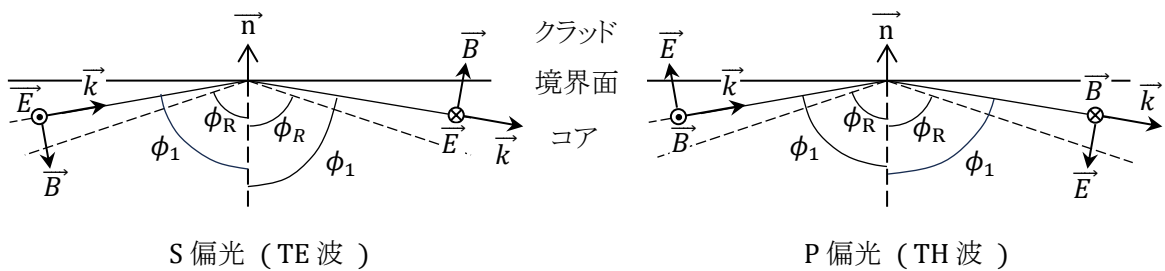


図8 $\phi_1 \equiv \frac{\pi}{2}$ であれば、全反射の直前・直後で、 $\vec{E}$ ベクトルと $\vec{B}$ ベクトルは逆向きになる。

図 9 a のように、コアの中心軸(z 軸)を含む面内で、z 軸と角度 θ をなして、ジグザグに、 $\dots A_{-1} \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \dots$ と $\dots B_{-1} \rightarrow B_0 \rightarrow B_1 \dots$ の方向に全反射しながら進む2つの対称な平面波を考える。対称とは、点aと点bでの電場成分が等しいということである。この問題の後半と同様に、簡単のために、 $\theta \equiv 0$ を仮定する。各平面波の電場成分をz軸に垂直な断面、たとえば、図 9 のy 軸上の A_0B_0 間で観測すれば、波長 λ_R の波動となって A_0B_0 間を往復する。 $\theta \equiv 0$ であるから、前述のように、 A_0 と B_0 で反射するときの位相の変化 δ_r は π となり、 A_0 と B_0 で入射波と反射波の電場成分を合成すれば常に0となる。よって、 $N = 1, 2, 3, \dots$ として、

$$\frac{2r_1}{N} = \frac{1}{2}\lambda_R = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\sin \theta} \quad \rightarrow \quad \sin \theta = N \frac{\lambda_1}{4r_1} \quad (i)$$

が満たされれば、 A_0B_0 上に定常波が生じ、腹の位置での電場の振幅は最大値に保たれる。これは A_0B_0 間だけではなく、z軸に垂直なすべての断面に対して言える。

コアの中を光が伝わる方向は、式 (i) を満たす特別の方向でなければならない。そのうちの最小の角度 $\theta_{\min}$ は、 $N = 1$ のときで、 $\theta_{\min} \equiv \sin \theta_{\min} = \frac{\lambda_1}{4r_1}$ と表される。このとき、上記の2つの平面波を重ね合わせた合成波の波長は $\lambda_1 \cos \theta_{\min} \equiv \lambda_1$ で、式 (i) より、 $\lambda_1 \equiv 4r_1 \theta_{\min} \ll r_1$ を満たさなければならない。

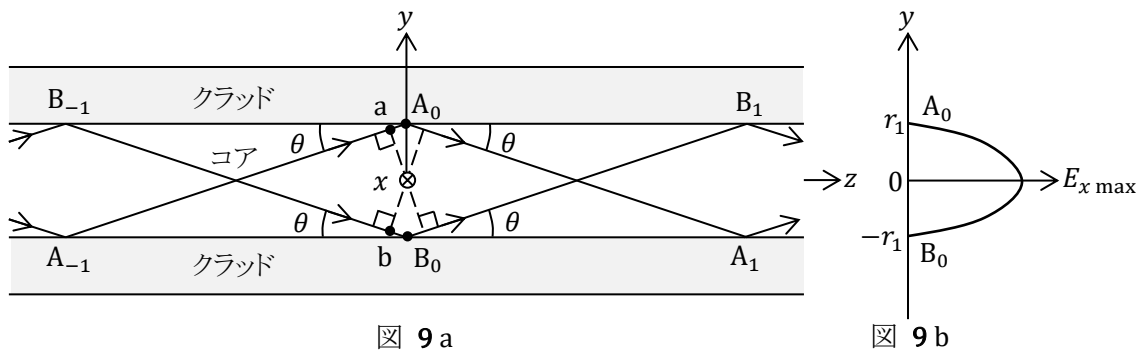


図 9 b は, A_0B_0 上に $N = 1$ の S 偏光の定常波が生じているときの E_x ベクトルの振幅

(補足 2)

もし試料の温度が上がって FBG が伸びる間に, その屈折率 n_1 が変化しないと,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= 2 n_1 a \\ \lambda_0 + \Delta \lambda_0 &= 2 n_1 (a + \Delta a) \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta \lambda_0 = 2 n_1 \Delta a$$

が成り立ち,

$$A = \frac{\Delta \lambda_0 / \lambda_0}{\Delta a / a} = 1$$

となるはずである。ところがこの計測実験では, $A < 1$ となっている。その理由は, 温度が上がるとコアの屈折率 n_1 が変化するからである。温度 T が ΔT だけ変化する間に, a が Δa , n_1 が Δn_1 だけ変化する とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= 2 n_1 a \\ \lambda_0 + \Delta \lambda_0 &= 2 (n_1 + \Delta n_1) (a + \Delta a) \\ &\approx 2 n_1 a + 2 (n_1 \Delta a + a \Delta n_1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta \lambda_0 = 2 (n_1 \Delta a + a \Delta n_1)$$

となり,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_0} &= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta n_1}{n_1} \\ \rightarrow A &= \frac{\Delta \lambda_0 / \lambda_0}{\Delta a / a} = 1 + \frac{a}{n_1} \frac{\Delta n_1}{\Delta a} = 1 + \frac{\frac{\Delta n_1}{\Delta T} / n_1}{\frac{\Delta a}{\Delta T} / a} \end{aligned}$$

を得る。通常の物体では $\frac{\Delta a}{\Delta T} > 0$ であるので, $A < 1$ という計測結果は, $\frac{\Delta n_1}{\Delta T} < 0$, すなわち, コアの材質 (ガラスやプラスチック) の屈折率が温度の上昇に伴って減少することを意味する。

(文献 1)

「[光の反射と透過に伴う位相ずれ \(1\)](#)」 (式④と式⑤および図 4 のグラフを参照されたい。)

<https://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/isounozure5.pdf>

他の演習問題へ