

問題 44 弦と管の共振・共鳴とドナルドダック効果

次の文中の に適切な数式を記入し、問いに答えよ。数式は () 内の物理量を用いて答えよ。近似計算では、微小量 $|\varepsilon| \ll 1$ に対して成り立つ近似式 $(1 + \varepsilon)^a \doteq 1 + a\varepsilon$ を用いよ。

I 弦を伝わる横波の速さと弦の固有振動数

図 1 のように、線密度 σ の長い弦の上を横波が右向きに速さ v で伝わっている。弦の張力は T である。観測者 O が右向きに速さ v で移動すれば、図 2 のように、波の形は静止して見え、弦が左向きに速さ v で移動するように見える。波の頂点近傍の微小部分 AB を円で近似し、その半径を R とする。円の中心 C から円弧 AB を見込む角度を、図のように 2θ とすれば、円弧 AB の弦の質量は (1) (σ, R, θ) 、観測者 O から見た向心加速度は (2) (R, v) 、両端に働く張力 T の合力は、中心 C の向きに大きさが (3) (T, θ) となる。これらの間に成り立つ関係式(運動方程式)と微小角 θ に対して成り立つ近似式 $\sin \theta \doteq \theta$ を用いれば、 $v =$ (4) (σ, T) が導かれる。

次に、両端を固定した長さ ℓ 、線密度 σ 、張力 T の弦を考える。この弦の一点を弾くと、この点から左右に横波が広がり、弦に多くの定常波が生じる。実際の弦の振動はこれらの定常波の重ね合わせとなる。一つの定常波の腹の数が n ($n = 1, 2, 3, \dots$) であれば、その振動数 f_n は、

(5) (σ, T, ℓ, n) となる。 f_1 を基本振動数、 f_n ($n \geq 2$) を n 倍振動数という。

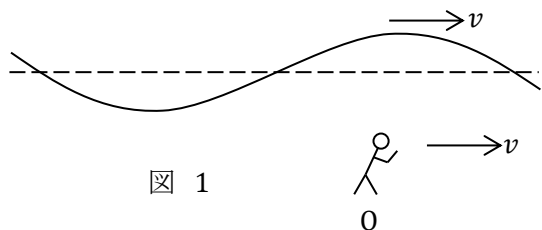


図 1

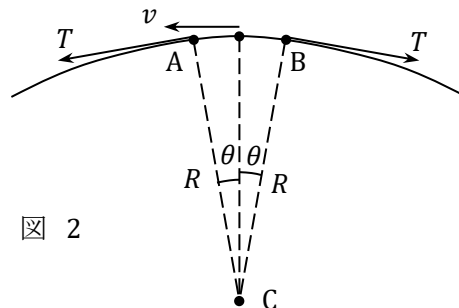


図 2

II 空気中を伝わる音波の速さと開管の固有振動数

図 3 のように、断面積 S の長い円筒管の左端に音源の振動板を設置する。右端は開いている。音波がないとき、管内の空気の密度は ρ_0 、圧力は p_0 である。振動板の位置を原点 ($x = 0$) とし、管の中心軸に沿って x 軸を設定する。振動板が振動数 f で振動するとき、 $x = 0$ での空気の変位 $y(0, t)$ が $a \sin 2\pi f t$ で与えられるとする。ただし、 x 軸の正の向きの変位を正とする。振幅 a は、この音波の波長 λ に比べれば、十分小さい。開口端で音波の反射がないとし、音速を c とすると、位置 x 、時刻 t での空気の変位は、

$$y(x, t) = \text{(6)} (a, f, c, x, t)$$

と表される。音波がある場合には、管内の空気の密度 ρ と圧力 p は空間的にも時間的にも変化する。それを表す数式を求める。

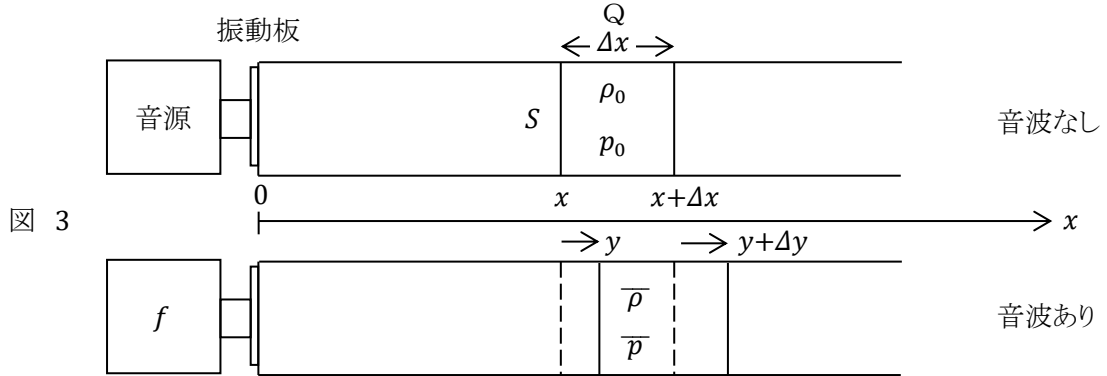
音波がないとき、図 3 のように、厚さ Δx ($\ll \lambda$) の薄い空気層 Q を考える。音波があるとき、時刻 t において、薄層 Q の両側面の位置を $x + y$, $x + \Delta x + y + \Delta y$ とする。通常の音波の場合、 $\Delta y \ll \Delta x$ である。このとき、薄層 Q の平均密度 $\bar{\rho}$ は、 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ll 1$ に注意して近似計算をすれば、次のようになる。

$$\bar{\rho} \doteq \boxed{(7)} \left(\rho_0, \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

音波があるとき、密度や圧力の時間変化は急激であるので、薄層 Q 内の空気は断熱変化をする。そのため、その平均圧力 $\bar{p}$ と体積 ΔV は、ポアソンの式 $\bar{p} (\Delta V)^\gamma = \text{一定}$ に従って変化する。 γ は空気の比熱比である。この式から $\bar{p}$ を、 $\bar{\rho}$ の計算と同様の近似計算を用いて求めれば、

$$\bar{p} \doteq \boxed{(8)} \left(p_0, \gamma, \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

となる。



$\Delta x \rightarrow 0$ の極限では、 $\bar{\rho}$ と $\bar{p}$ は位置 x での密度 $\rho(x, t)$ と圧力 $p(x, t)$ に置き換えることができ、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は y の x による導関数 $\frac{dy}{dx} =: y'(x, t)$ となる。よって、 ρ と p は、

$$\rho = \boxed{(9)} (\rho_0, y'), \quad p = \boxed{(10)} (p_0, y')$$

と表される。

次に、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取る前に戻って、薄層 Q の運動方程式を立てる。薄層 Q の質量 Δm は $\rho_0 S \Delta x$ である。薄層 Q の左側面は、位置 x を中心として式 (6) で表される単振動をするので、その加速度 $\alpha(x, t)$ は、

$$\alpha(x, t) = \boxed{(11)} \cdot y(x, t) (f)$$

と表される。 $\Delta x \ll \lambda$ であるので、薄層 Q の加速度は $\alpha(x, t)$ で近似してよい。薄層 Q の左側面と右側面には、隣りの薄層から圧力による力が働く。その合力 F は、

$$F = S p(x + y, t) - S p(x + \Delta x + y + \Delta y, t)$$

である。式 (10) と $\Delta y \ll \Delta x$ に注意して近似計算をすれば、

$$F \doteq -S p_0 \gamma \Delta x \left(\frac{2\pi f}{c} \right)^2 y(x, t)$$

を得る。これらを薄層 Q の運動方程式 $\Delta m \cdot \alpha = F$ に代入して、音速 c を求めれば、

$$c = \boxed{(12)} (\gamma, \rho_0, p_0)$$

となる。

次に、円筒管の長さを ℓ とし、 $x = \ell$ での音波の反射は自由端反射で、開口端補正は無視できるとする。この場合、 $n = 1, 2, 3, \dots$ として、音源の振動数が、

$$f = \boxed{(13)} = : f_n (\ell, c, n)$$

を満たすときに、管内の空気は共鳴を起こし、管内に生じている定常波の腹での振幅が大きくなる。

次に、管内の空気の温度を T_0 、空気の単位物質あたり質量を μ 、気体定数を R とすれば、式 (12) は、

$$c = \boxed{(14)} (R, \gamma, \mu, T_0)$$

と表される。

問 1 管内の空気を同音同圧の O_2 ガスに替えたときの音速を $c(O_2)$ 、同音同圧の He ガスに替えたときの音速を $c(He)$ とすれば、 $c(He)/c(O_2)$ の値はいくらになるか。ただし、単位物質あたりの O_2 ガスと He ガスの質量は、それぞれ $32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 、 $4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ であり、 O_2 ガスと He ガスの比熱比は、それぞれ $7/5$ 、 $5/3$ とする。

このように、同温であれば、比熱比が大きく、分子量が小さい気体ほど、その中での音速は大きくなる。よって、管内の空気に He ガスを混ぜると音速が大きくなる。

III 音声のドナルドダック効果

ヘリウムガスを混ぜた空気を吸入して発声すると、裏返ったような高い声になり、ドナルドダックが喋っているように聞こえる。これをドナルドダック効果という。その理由を考える。母音の音源は声帯で、そこから発せられた小さな音が、声道（声帯から口唇までの口腔）で共鳴して大きな音となり、口唇から漏れ出してくる。

図 4

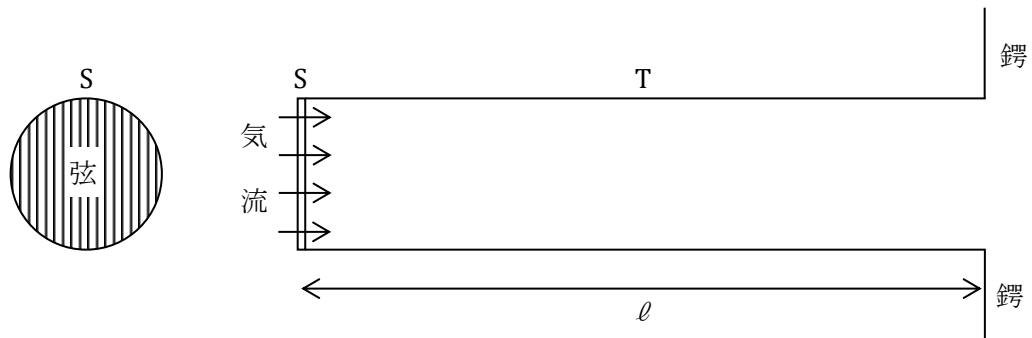


図 4 の S は声帯をモデル化したもので、円輪に長さの異なる弦が多数平行に張ってある。その隙間を空気（呼気）が通過すると、個々の弦が振動し、I の (5) で述べたように、それらの基本振動や n 倍振動を重ね合わせた音を発する。このようにして発せられた音波のエネルギーを S の内側で均したとき、 S 面に垂直な方向に、単位面積あたり、単位時間あたりに出ていく振動数 f の音波のエネルギーを $J(f)$ とする。図 5 は $J(f)$ と f の関係を表したグラフ（これをスペクトルという）の一例である。 $J(f)$ の値は S を通過する気流の速さに依存する。

実際に実験を行えば、線スペクトルは等間隔ではないし、包絡線もこのように単調でなめらかな曲線ではない。これは説明のために描いた仮想的なスペクトルである。

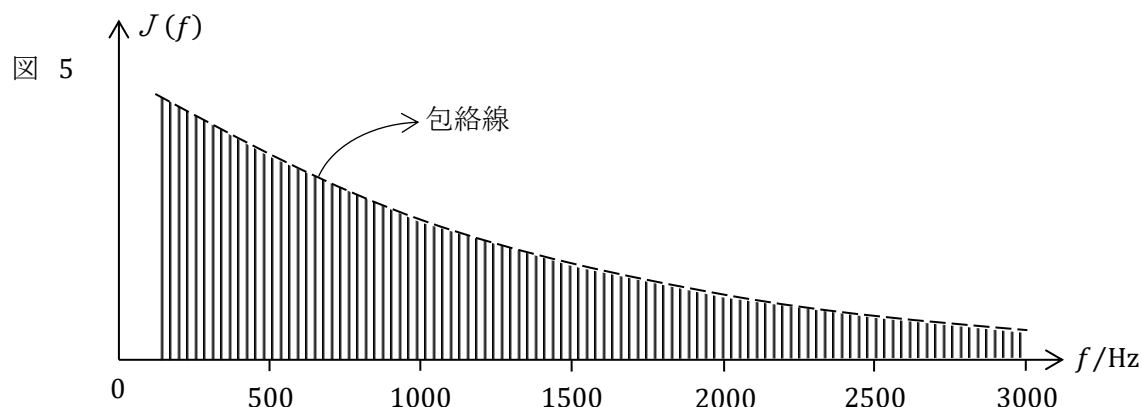


図 4 の T は口腔をモデル化した長さ ℓ の円筒管で、左端には音源 S が固定されており、開いている右端には広い^{つば}鰐が取り付けられている。鰐は顔面に相当する。

最初、管 T には空気が入っており、管内の音速を c とする。音源 S を出た音波の一部は開口端で自由端反射をし、残りは大気中へ出ていく。このとき、音源 S を実質的な節、開口端を腹とする定常波が管内に生じると、管内の空気は共鳴を起こし、大気中に漏れ出る音が大きくなる。定常波の節の数を n ($n = 1, 2, 3, \dots$) としたとき、漏れ出してくる大きな音の振動数は、II の式 (13) で与えられる。

問 2 音源 S が図 5 で表されるスペクトルの音を発し、 $\ell = 15 \text{ cm}$ 、 $c = 350 \text{ m/s}$ である場合、管 T の開口端から漏れ出してくる大きな音の振動数を、低い方から 3 つ求め、それらを図 5 の横軸上に ○ 印で示せ。

次に、管内に適量のヘリウムガスを注入したところ、音速が 30 % 大きくなった。このとき、

問 3 音源 S が同じスペクトルの音を発すれば、開口端から漏れ出してくる大きな音の振動数はいくらになるか。低い方から 2 つの振動数を求め、それらを図 5 の横軸上に × 印で示せ。

このように、管内にヘリウムガスを注入すれば、同じ音源 S から発せられる音でも、開口端から漏れ出してくる大きな音 (共鳴音) は、振動数が大きい方にずれる。これがドナルドダック効果を生じさせる原因となる。

問題 44 の解答と解説

I

- (1) 円弧 AB の弦の長さは $R(2\theta)$ であるから, その質量は $\sigma(2R\theta)$
- (2) 円弧 AB の弦は半径 R , 接線速度 v の円運動をするので, その向心加速度は v^2/R
- (3) 円弧 AB の弦の両端に働く接線方向の張力 T の向心成分は $2T\sin\theta \doteq 2T\theta$
- (4) 円弧 AB の弦の運動方程式 $(2\sigma R\theta) \cdot \left(\frac{v^2}{R}\right) = 2T\theta$ より, $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$
- (5) 弦の両端は定常波の節であるから, 定常波の波長 λ_n は, $2\frac{\ell}{n}$ となる。
- 弦を伝わる横波の速さ v は式 (4) で与えられるから, $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$

II

- (6) 原点にある振動板から位置 x まで音波が伝わる時間 Δt は x/c であるから, 位置 x , 時刻 t における空気の変位 $y(x, y)$ は, 時刻 $t - \Delta t$ における $x = 0$ での空気の変位 $y(0, t - \Delta t)$ に等しい。よって,

$$y(x, y) = y(0, t - \Delta t) = a \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- (7) 空気の薄層 Q の質量は Δm は, 振動中保存されるから, 次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta m &= \rho_0 S \Delta x = \bar{\rho} S \{ (x + \Delta x + y + \Delta y) - (x + y) \} = \bar{\rho} S (\Delta x + \Delta y) \\ \rightarrow \bar{\rho} &= \rho_0 \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta y} = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} \doteq \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

- (8) 振動中の薄層 Q にポアソンの式を適用すれば, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \{ S (\Delta x + \Delta y) \}^\gamma &= p_0 (S \Delta x)^\gamma \\ \rightarrow \bar{\rho} &= p_0 \left(\frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta y}\right)^\gamma = p_0 \left(1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-\gamma} \doteq p_0 \left(1 - \gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

- (9) (10) $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = : y'(x, t)$ として,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \rightarrow \rho(x, t) &= \rho_0 \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = \rho_0 (1 - y') \\ \bar{p} \rightarrow p(x, t) &= p_0 \left(1 - \gamma \frac{dy}{dx}\right) = p_0 (1 - \gamma y') \end{aligned}$$

- (11) 薄層 Q の左側面の変位 y は角振動数 $\omega = 2\pi f$ で単振動するので, その加速度 $\alpha(x, t)$ は,

$$\alpha = -\omega^2 y = -(2\pi f)^2 \cdot y$$

で与えられる。あるいは微分を用いて, 次のように計算してもよい。

$$\alpha(x, t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{dy(x, t)}{dt} \right\} = -(2\pi f)^2 y(x, t)$$

ただし, $y(x, t) = a \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{c}\right)$ を時刻 t で微分するとき, x は固定しておく。

(F の計算)

式 (10) と $\Delta y \ll \Delta x$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} F &= S p (x + y, t) - S p (x + \Delta x + y + \Delta y, t) \\ &\doteq S p_0 \{ 1 - \gamma y' (x + y, t) \} - S p_0 \{ 1 - \gamma y' (x + \Delta x + y, t) \} \\ &= S p_0 \gamma \{ y' (x + \Delta x + y, t) \} - y' (x + y, t) \end{aligned}$$

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ と $[x + y, x + \Delta x + y]$ での y' の傾きの差は, 三角関係のように, y' が x の滑らかな関数であれば, 無視できるほど小さいので,

$$\begin{aligned} F &\doteq S p_0 \gamma \{ y' (x + \Delta x, t) - y' (x, t) \} \\ &\doteq S p_0 \gamma \frac{d y' (x, t)}{d x} \Delta x \\ &= S p_0 \gamma \frac{d^2 y (x, t)}{d x^2} \Delta x \\ &= -S p_0 \gamma \left(\frac{2 \pi f}{c} \right)^2 y (x, t) \Delta x \end{aligned}$$

となる。 x で微分するときは, t を固定しておく。

(12) 薄層 Q の運動方程式 $\Delta m \cdot \alpha (x, t) = F (x, t)$ より, 次の式を得る。

$$\begin{aligned} (\rho_0 S \Delta x) \{ -(2 \pi f)^2 y (x, t) \} &= -S p_0 \gamma \Delta x \left(\frac{2 \pi f}{c} \right)^2 y (x, t) \\ \rightarrow c &= \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \end{aligned}$$

(13) 管内の空気が共鳴しているとき, 管内には, 開口端が腹, 振動板が実質的な節となる定常波が生じている。実質的な節とは, そこでの空気の変位振幅が腹での振幅に比べて無視できるほど小さいという意味である。管内に n 個の節がある定常波の波長 λ_n は,

$$\lambda_n = 4 \frac{\ell}{2n - 1}$$

である。音源の振動数 f_n は, この定常波の振動数に等しいから,

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \boxed{(2n - 1) \frac{c}{4 \ell}}$$

となる。

(14) 音波がないとき, 管内の空気の質量を m とすれば, その状態方程式は,

$$p_0 \left(\frac{m}{\rho_0} \right) = \frac{m}{\mu} R T_0$$

と表される。これより,

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{R}{\mu} T_0$$

を得る。これを式 (12) に代入すれば, 次のようになる。

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \boxed{\sqrt{R \frac{\gamma}{\mu} T_0}}$$

問 1 O_2 ガスと He ガスの比熱比と単位物質あたり質量をそれぞれ, $\gamma(O_2)$, $\mu(O_2)$ および $\gamma(He)$, $\mu(He)$ とすれば, 式 (14) より, 求める比の値は次のようになる。

$$\frac{c(He)}{c(O_2)} = \sqrt{R \frac{\gamma(He)}{\mu(He)} T_0} / \sqrt{R \frac{\gamma(O_2)}{\mu(O_2)} T_0} = \sqrt{\frac{\gamma(He) \mu(O_2)}{\gamma(O_2) \mu(He)}} = \sqrt{\frac{7/5}{5/3} \frac{32}{4}} = \boxed{2.6}$$

III

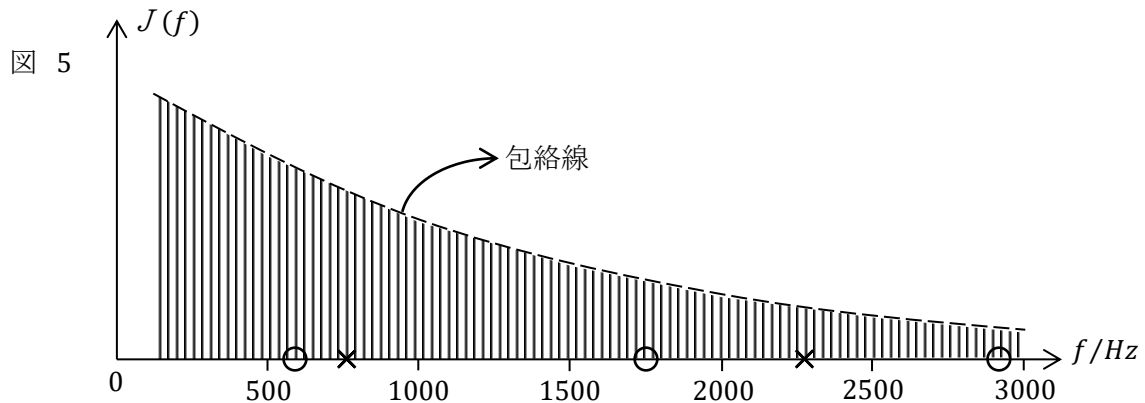
問 2 与えられた数値を式 (13) に代入すれば,

$$f_n = (2n - 1) \frac{350 \text{ m/s}}{4 \times 0.15 \text{ m}} = (2n - 1) \frac{3500}{6} \text{ Hz}$$

となる。小さい方から 3 つの値を求めれば,

$$f_1 = 583 \text{ Hz}, \quad f_2 = 1750 \text{ Hz}, \quad f_3 = 2917 \text{ Hz}$$

となる。これらを図 5 に ○ 印で示せば, 下図のようになる。



問 3 ヘリウムガスを注入したときの音速 c' は, 題意より, $c' = 1.3 c = 455 \text{ m/s}$ である。

よって, 共鳴音の振動数 f'_n は,

$$f'_n = (2n - 1) \frac{c'}{4 \ell} = (2n - 1) \frac{1.3 c}{4 \ell} = 1.3 f_n$$

となる。問 2 の結果を用いれば,

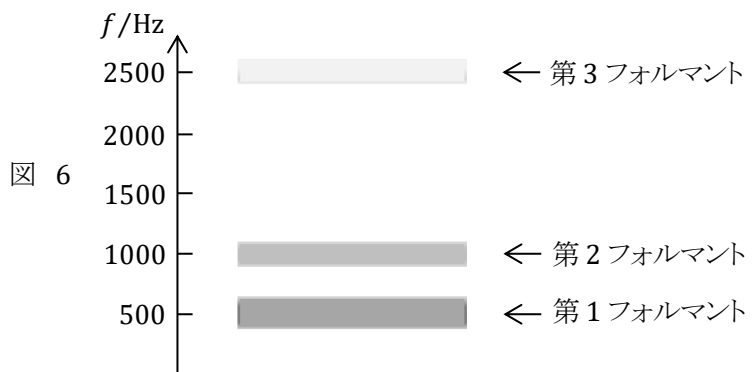
$$f'_1 = 758 \text{ Hz}, \quad f'_2 = 2275 \text{ Hz}, \quad f'_3 = 3792 \text{ Hz}$$

となる。最初の 2 つを図 5 に × 印で示せば, 上図のようになる。

(補注)

実際の音声では, 舌や歯の位置によって口腔の形や容積が大きく変化し, 共鳴音の振動数と強さが変化する。母音を発声したときの音色(音質)は, 多くの場合, 共鳴音の低い方から 2 つの振動数で区別できる。これらをフォルマント (Formant) という。

図 6 は, 音声「あー」に近い音のスペクトル成分を模式的に描いたもので, 線の濃さがその成分の強さを表す。



(大学生向きの補足説明)

問 2 と問 3 の解答では, 開口端が腹, 振動板が実質的な節となる定常波が生じたときに, 開口端から空気中に出てくる音が大きくなると仮定している。この仮定は定性的には正しいかもしれないが, 実際とのずれを知るためには, 定量的に考察する必要がある。それをここで行う。以下に出てくる () 付式番号の数式は, 文献 1 から借用している。

図 7

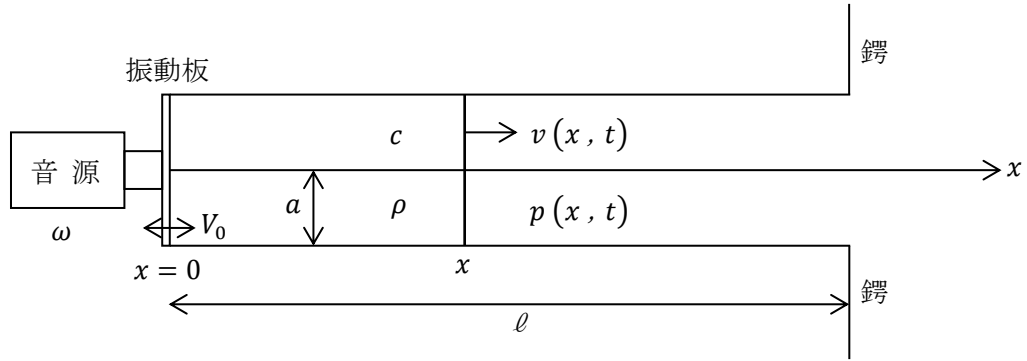


図 7 は, 半径 a , 長さ ℓ の円筒管で, 左端に音源の振動板, 右端に無限に広い鉋が取り付けられている。音源の角振動数を ω , 振動板の速度振幅を V_0 とする。音源が作動しているとき, 図 7 の位置 x における空気の変位速度を $v(x, t)$, 音波がないときの気圧 P_0 からの気圧のずれを $p(x, t)$ とする。空気振動の運動方程式の複素表示解は, 速度ポテンシャルを $\phi(x, t)$ として,

$$\phi(x, t) = \Phi_+ e^{j(\omega t - \kappa x)} + \Phi_- e^{j(\omega t + \kappa x)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= j\kappa \left\{ \Phi_+ e^{j(\omega t - \kappa x)} - \Phi_- e^{j(\omega t + \kappa x)} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= j\omega\rho \left\{ \Phi_+ e^{j(\omega t - \kappa x)} + \Phi_- e^{j(\omega t + \kappa x)} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

と表される。ここに, j は虚数単位, κ は波数 ($2\pi / \text{波長}$), Φ_+ と Φ_- は積分定数, ρ は音波がないときの空気の密度である。ここで, 式 (21) と式 (22) の複素振幅を

$$V(x) := j\kappa \left(\Phi_+ e^{-j\kappa x} - \Phi_- e^{j\kappa x} \right) \quad (70)$$

$$P(x) := j\rho\omega \left(\Phi_+ e^{-j\kappa x} + \Phi_- e^{j\kappa x} \right) \quad (71)$$

とする。また, 位置 x から円筒管の右側を見たときの音響インピーダンス :

$$\begin{aligned} z(x) &:= \frac{p(x, t)}{v(x, t)} = \frac{P(x)}{V(x)} \\ &= \frac{\rho\omega \left(\Phi_+ e^{-j\kappa x} - \Phi_- e^{j\kappa x} \right)}{\kappa \left(\Phi_+ e^{-j\kappa x} - \Phi_- e^{j\kappa x} \right)} \end{aligned}$$

を導入する。 Φ_+ と Φ_- は次の 2 つの境界条件から求まる。まず, $x = 0$ において,

$$V(0) = j\kappa (\Phi_+ - \Phi_-) = V_0 \quad (1)$$

次に, 開口端 ($x = \ell$) を半径 a の円形音源と見なしたときの固有放射インピーダンス z_1 は,

$$z_1 \cong \rho c \left\{ \frac{(\kappa a)^2}{2} + j \frac{8(\kappa a)}{3\pi} \right\} =: r_1 + j x_1 \quad (87)$$

で与えられる(文献2)。この式の導出に当たっては、円形音源は無限に広がった剛体の鏝をもつとし、 $\kappa a \lesssim 1$ を仮定している。これより、

$$z(\ell) = \frac{\rho \omega (\Phi_+ e^{-j\kappa \ell} + \Phi_- e^{j\kappa \ell})}{\kappa (\Phi_+ e^{-j\kappa \ell} - \Phi_- e^{j\kappa \ell})} = r_1 + j x_1 \quad (2)$$

を得る。式①と式②から Φ_+ と Φ_- を求め、それらを式(70)と式(71)に代入すれば、

$$V(x) = V_0 \frac{\rho c \cos \kappa (\ell - x) - x_1 \sin \kappa (\ell - x) - j r_1 \sin \kappa (\ell - x)}{\rho c \cos \kappa \ell - x_1 \sin \kappa \ell + j r_1 \sin \kappa \ell} \quad (3)$$

$$P(x) = \rho c V_0 \frac{r_1 \cos \kappa (\ell - x) + j x_1 \cos \kappa (\ell - x) + j \rho c \sin \kappa (\ell - x)}{\rho c \cos \kappa \ell - x_1 \sin \kappa \ell + j r_1 \sin \kappa \ell} \quad (4)$$

となる。このとき、振動数 $f (= \omega / 2\pi)$ の音波の強さ、すなわち、位置 x において、単位面積当たり、単位時間あたりに管の断面を通過するエネルギーは、

$$I(x, f) := \frac{1}{4} \{ P(x) V^*(x) + P^*(x) V(x) \} \quad (84)$$

で与えられる。 $*$ は複素共役を表す。式③と式④を式(84)に代入して、長い式の計算をすれば、

$$I(x, f) = \frac{1}{2} \rho c V_0^2 \frac{\rho c r_1}{(\rho c \cos \kappa \ell - x_1 \sin \kappa \ell)^2 + (r_1 \sin \kappa \ell)^2} \quad (5)$$

を得る。 $I(x, f)$ は x に依存しないので、管内では音波の強さはどこでも同じであることがわかる。音波の伝播に伴う熱の発生や管壁からの音波の漏れなどは考えていないので、これは当然の結果である。管外へ放射された音波は回折によって全空間に広がっていくが、開口端の中心軸近傍での音波の強さは $I(\ell, f)$ で近似できる。

ここで、 $G(f)$ を、

$$G(f) := \frac{I(\ell, f)}{\frac{1}{2} \rho c V_0^2} = \frac{\rho c r_1}{(\rho c \cos \kappa \ell - x_1 \sin \kappa \ell)^2 + (r_1 \sin \kappa \ell)^2} \quad (6)$$

で定義する。 $\frac{1}{2} \rho c V_0^2$ は、音源が空気中に単独で存在するときに、振動板の片面から空気中に放射する音波の強さである。 κ は f を用いて、 $\kappa = 2\pi f / c$ と表される。式(87)より、

$$r_1 = \rho c \frac{(\kappa a)^2}{2}, \quad x_1 = \rho c \frac{8(\kappa a)}{3\pi}$$

であるから、式⑥は、

$$G(f) = \frac{\frac{(\kappa a)^2}{2}}{\left\{ \cos \kappa \ell - \frac{8(\kappa a)}{3\pi} \sin \kappa \ell \right\}^2 + \left\{ \frac{(\kappa a)^2}{2} \sin \kappa \ell \right\}^2} \quad (7)$$

と書き換えられる。

具体例として、問2と同じ、 $a = 2 \text{ cm}$ 、 $\ell = 15 \text{ cm}$ 、 $c = 350 \text{ m/s}$ を採用し、 $100 \text{ Hz} \leq f \leq 3000 \text{ Hz}$ の範囲内で $G(f)$ を求め、グラフで表せば、図8のようになる。また、音速を $c' = 1.3c = 455 \text{ m/s}$ として同様の計算をすれば、図9のようになる。

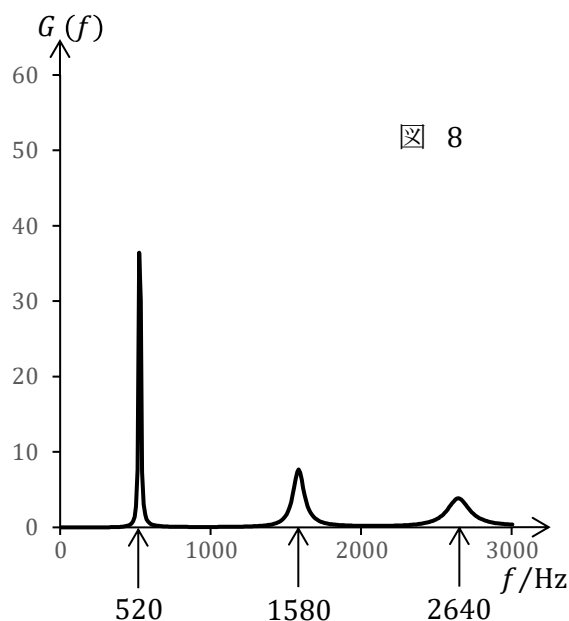


図 8

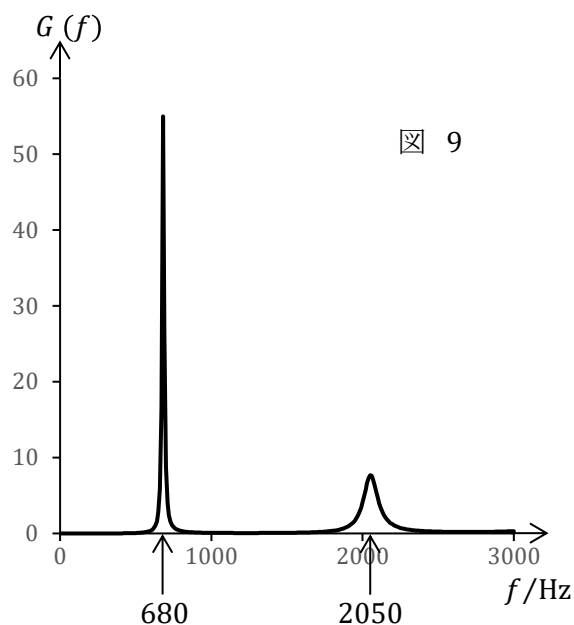


図 9

問 2 (問 3) で求めた f_1 (f_1') と f_2 (f_2') の値と比べれば, 図 8 と図 9 から得られる $G(f)$ の第 1 ピーク F_1 (F_1') と第 2 ピーク F_2 (F_2') は 10 % 程度小さい方にずれている。

式⑥の $\frac{1}{2} \rho c V_0^2$ を図 5 のスペクトル $J(f)$ に置き換えれば, 図 4 のモデルで実際に開口端から出てくる音波のスペクトル $I(\ell, f)$ は,

$$I(\ell, f) = J(f) \cdot G(f)$$

で与えられる。

人の口元で測定される母音のスペクトルの包絡線は, 図 8 (図 9) のような鋭い山ではなく, 幅広い山を持つ。その頂点の振動数をフォルマント (Formant) といい, 低い方から 2 つの振動数 F_1 と F_2 で, 母音の音色 (音質) が区別される。ヘリウムガスを吸入して発声すると, 個々の母音の聞き分けは難しくなるが, すべての母音のフォルマント F_1, F_2 が同じように高い方にずれるので, 喋っている話の内容は聞き取れるのである。

(文献)

1. 「クントの実験に関してもまだによくわかっていないこと (2)」

<https://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/kundt2.pdf>

2. 大野進一・山崎徹：「機械音響工学」森北出版 2010 年, p 41 ~ p 53

他の演習問題へ