

問題 43 水面波の群速度とケルヴィンの航跡波

次の文中の に適切な数式または語句を記入し、問いに答えよ。数式は () 内の物理量を用いて表せ。

(I) 水面上を x 軸方向に伝わる波長 λ , 振動数 f , 振幅 a の水面波がある。位置 x , 時刻 t で水面波の鉛直変位成分 z が,

$$z(x, t) = a \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - f t \right)$$

で表されたとする。式を簡単にするために、波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ と角振動数 $\omega = 2\pi f$ を導入すると、この式は,

$$z(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \tag{1}$$

と書き換えられる。

$x = x_0, t = t_0$ での位相 $kx_0 - \omega t_0$ を θ_0 とする。その後、位相が θ_0 となる位置 $x = x_{\theta_0}(t)$ を追跡すると、 x 軸の (1) の向きに、一定の速さ:

$$v_p = \text{(2)} (k, \omega) \tag{2}$$

で移動する。これは波形(水面の凹凸模様)が移動する速さであり、位相速度と呼ばれる。

次に、波数と角振動数が k, ω からわずかにずれて、 $k_1 = k + \Delta k, \omega_1 = \omega + \Delta\omega$ と $k_2 = k - \Delta k, \omega_2 = \omega - \Delta\omega$ で表される2つの水面波が x 軸方向に伝わっている場合を考える。ただし、 $0 < \Delta k \ll k, 0 < \Delta\omega \ll \omega$ で、2つの水面波の振幅は等しく、それぞれの水面波の鉛直変位成分は,

$$z_1(x, t) = a \sin(k_1 x - \omega_1 t), \quad z_2(x, t) = a \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

で与えられるとする。振幅が小さいときには重ね合わせの法則が適用され、実際の水面波の鉛直変位成分は,

$$\begin{aligned} z(x, t) &= z_1(x, t) + z_2(x, t) \\ &= 2a \cos\left(\text{(3)}\right) \sin(kx - \omega t) \quad (\Delta k, \Delta\omega, x, t) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。式③と式①を比べると、式③の $2a \cos\left(\text{(3)}\right)$ は時間的にも空間的にもゆつくり変化する振幅と見なされ、 $\cos\left(\text{(3)}\right) = 1$ となる位置 x は,

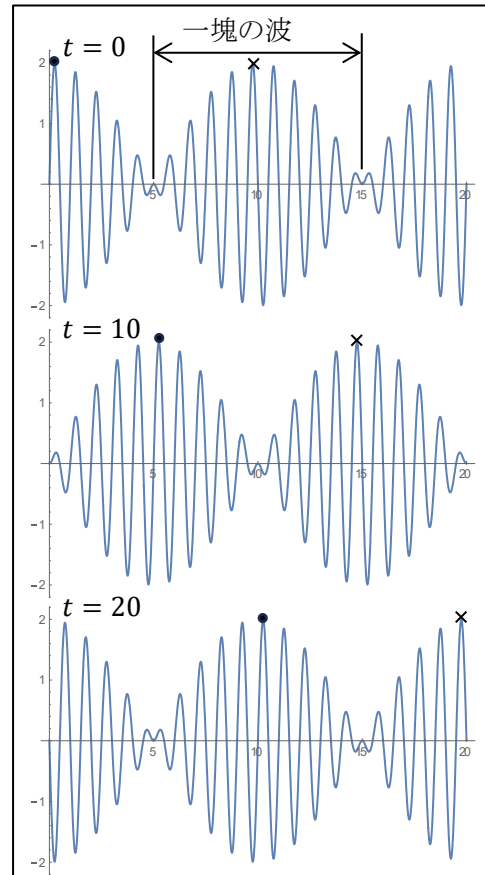
$$v_g = \text{(4)} (\Delta k, \Delta\omega) \tag{4}$$

の速さで、 x 軸の (5) の向きに移動する。

図1に示されているように、これは波束(波の一塊)が移動する速さであり、群速度と呼ばれる。多くの場合、群速度は波束が担うエネルギーや情報が伝わる速さである。

図 1

一例として、波数 $k = 2\pi$ (波長 = 1), 角周波数 $\omega = 2\pi$ (周期 = 1), 振幅 $a = 1$ とし, $\Delta k = 0.05 k$, $\Delta\omega = 0.025 \omega$ としたときを考える。この場合, $t = 0, 10, 20$ のときの波形を描くと右のようになる。 $\sin 2\pi(x - t)$ の波の細かい凹凸模様は $v_p = 1$ の速さで右へずれるが, 振幅が最大となる位置は, ●印 (または×印) が示すように, 速さ $v_g = 0.5$ で右へずれる。



(II) 水に働く重力が原因となって水面に生じる波を水面重力波という。その位相速度は,

$$v_p = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (5)$$

で与えられる。 g は重力加速度の大きさを, h は波がないときの水深である。 $\tanh(x)$ は双曲線正接関数で, 次の式で定義される。

$$\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \begin{cases} \doteq x & x \doteq 0 \text{ のとき} \\ \rightarrow \pm 1 & x \rightarrow \pm \infty \text{ (複号同順) のとき} \end{cases}$$

(IIa) 浅水重力波

水深 h が波長 λ に比べて十分小さい場合には, 式 (5) は近似的に,

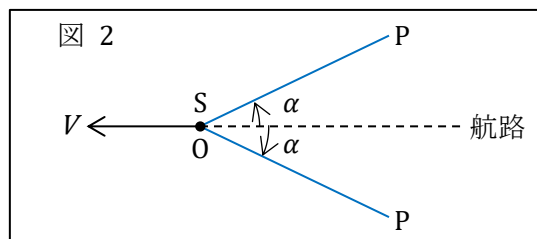
$$v_p \doteq \boxed{(6)} (g, h) \quad (6)$$

と表される。これを浅水重力波という。たとえば, 太平洋を越えて伝わる大津波 ($h \sim 4 \text{ km}$, $\lambda \gtrsim 100 \text{ km}$) はその典型例である。

問 1 位相速度が式 (6) で与えられる浅水重力波の場合, その群速度は位相速度に等しいことを示せ。

浅くて広い水面を船 S が浅水重力波の位相速度 v_p より速い速度 V で航行すると, 図 2 のような航跡波の波面 OP (水面の鉛直変位の稜線) が現れる。

問2 航行中の船Sによって生じる水面の乱れを波源として、さまざまな波長の素元波が四方八方に広がる。この考え方に基づいて、航跡波の波面OPがくさび型になる理由を述べよ。図を用いて説明してもよい。



また、くさびの開きの半角 α と v_p , V の間に成り立つ関係式を求めよ。

(IIIb) 深水重力波

浅水重力波とは逆に、水深 h が波長 λ に比べて十分大きい場合には、式⑤は近似的に、

$$v_p \cong \boxed{(7)} (g, k) \quad (7)$$

と表される。これを深水重力波という。たとえば、太平洋に発生した台風などが原因となって、日本やハワイに押し寄せるうねり ($h \sim 4 \text{ km}$, $\lambda \sim 0.1 \text{ km}$) がその代表例である。

式②と式⑦から v_p を消去すれば、深水重力波の角振動数 ω と波数 k の間に成り立つ関係式:

$$\omega = \boxed{(8)} (g, k) \quad (8)$$

を得る。一般的に、波の角振動数 ω と波数 k の間に成り立つ関係式を分散関係式という。波束の伝わり方や虹のような分散現象を論じるときに、この関係式が重要になる。

問3 式⑧と、 $|\varepsilon| \ll 1$ のときに成り立つ近似式: $\sqrt{1+\varepsilon} \cong 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ を用いて、深水重力波の群速度 v_g は位相速度 v_p の $\frac{1}{2}$ 倍であることを示せ。

(III) ケルヴィンの航跡波

静かで深い海の上を速度 V で航行する船Sによって生じる深水重力波を考える。

航行中の船Sからはさまざまな波長の波が発生する。そのうちの波数 k の成分(これをフーリエ成分波という)に着目する。この成分波の位相速度 v_p は式⑦で与えられる。もし、海面にこの成分波だけがあり、 $v_p < V$ であれば、浅水重力波の場合と同様に、開きの角度が 2α のくさび型の波面が見られるはずである。このとき、

$$\sin \alpha = \boxed{(9)} (g, k, V) \quad (9)$$

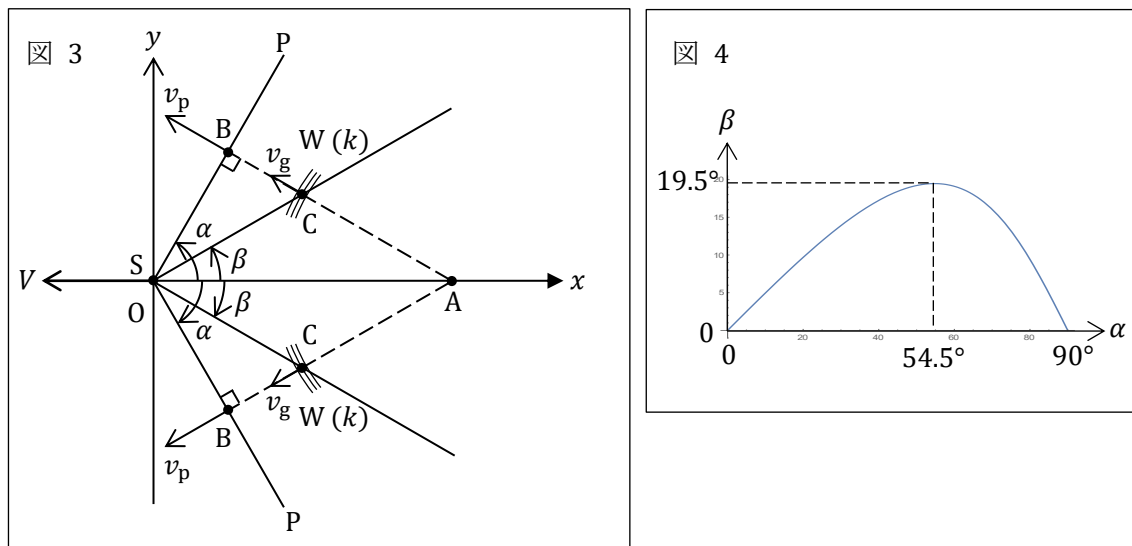
が成り立ち、 α は波数 k に依存する。したがって、さまざまな波数のフーリエ成分波が重なっている場合には、 α が異なる多くのくさび型の波面が入り混じった状態になるであろう。

ところが、波数 k のフーリエ成分の近傍には、波数がわずかに異なる多くのフーリエ成分があつて、それらがほぼ同位相で重なって強め合い、山の波束 (Wave packet) $W(k)$ が生じる。その波束は群速度 v_g で移動する。

図3のように、 $t = 0$ のときに船SがO点を通過し、それより時間 τ だけまえに、A点を通過したとする。A点を出た波数 k のフーリエ成分波は波面OPに垂直な方向 $A \rightarrow B$ に進行し、その方向に波束 $W(k)$ も群速度 v_g で進行する。そして波束 $W(k)$ は時刻 $t = 0$ のときにC点に達する。

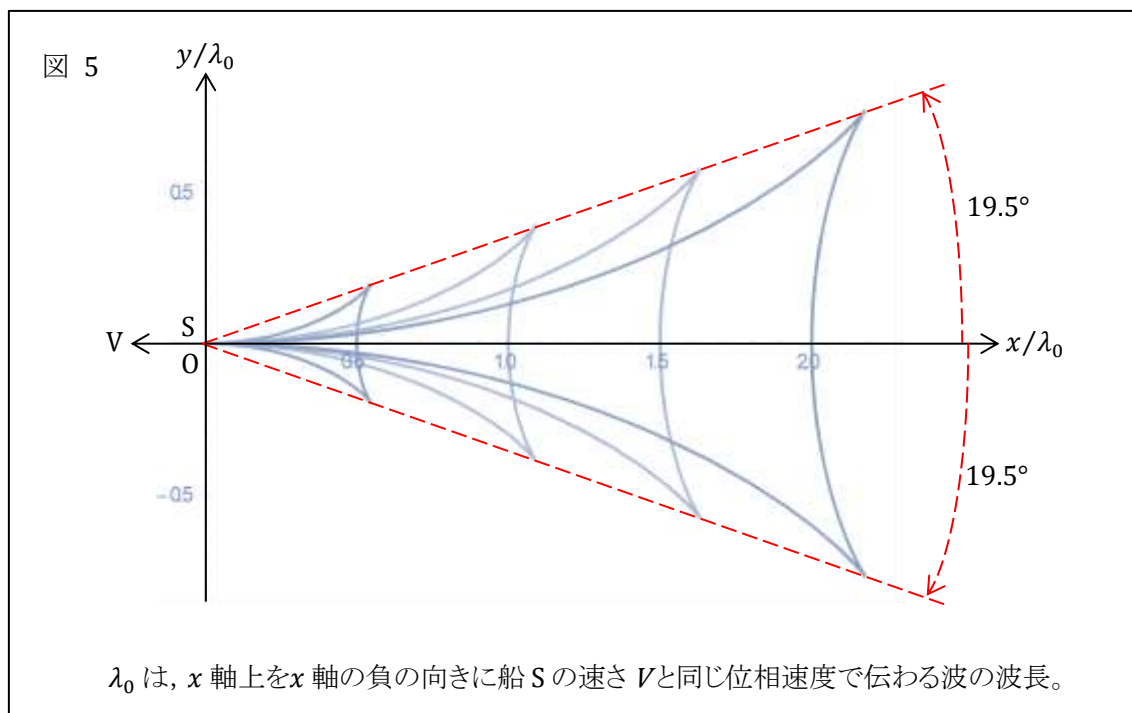
$$\tan \alpha = \boxed{\quad (10) \quad} (\alpha, \beta)$$

これを β について解き, β を α の関数としてグラフで表せば, 図 4 のようになる。



山の波束 $W(k)$ を連ねると、海面に稜線が曲線となって現れる。この曲線を求めるには微分方程式を解かなければならない。

それを解けば、図 5 に青線で示した航跡波を得る。これをケルヴィンの航跡波という。



問題 43 の解答と解説

航跡波に関する問題が、京都大学の 2009 年度入試問題に出題されているが、本問の (Ⅲ) で論じたケルヴィンの航跡波は、フーリエ成分の概念を必要とするので、扱われていない。

(Ⅰ) 位相速度 v_p (phase velocity) と群速度 v_g (group velocity)

(1) (2) 時刻 $t_0 + \Delta t$ のときに位相 θ_0 の位置が $x_0 + \Delta x$ に移動したとすれば、

$$k x_0 - \omega t_0 = \theta_0 = k (x_0 + \Delta x) - \omega (t_0 + \Delta t)$$

が成り立つ。これより、 $k \Delta x - \omega \Delta t = 0$ を得る。よって、位相速度は、

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{\frac{\omega}{k}} \quad (2)$$

となる。 ω と k は正であるから、 $\Delta t > 0$ のとき、すなわち時間が経つと、位相が θ_0 の位置は、 $\Delta x > 0$ すなわち、 x 軸の $\boxed{\text{正}}$ の向きに、 Δx だけ移動する。

(3) 重ね合わせの法則より、

$$\begin{aligned} z(x, t) &= a \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a \sin(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2a \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin(k x - \omega t) \\ &= 2a \cos\left(\boxed{\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t}\right) \sin(k x - \omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

(4) (5) 式 ③ の振幅 $2a \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)$ は、波長 $2\pi / \Delta k$ と周期 $2\pi / \Delta \omega$ が、式 ① の波長 $2\pi / k$ と周期 $2\pi / \omega$ よりも十分大きい進行波で、それが移動する速度は、(1) (2) と同じ論法を用いれば、 x 軸の $\boxed{\text{正}}$ の向きに、速さが、

$$v_g = \boxed{\frac{\Delta \omega}{\Delta k}} \quad (4)$$

となる。

(補足 1)

2 つの波を重ねただけでは、一塊の波という波束の概念が明瞭でないので、一例として、次のような 7 つの波を重ね合わせた場合を考える。その結果は図 6 のようになり、波の塊が移動する様子がよくわかる。

図 6

波長 $\lambda = 1$, 周期 $T = 1$, 振幅 $a = 1$ の波を中心にして, 波数 $k = 2\pi/\lambda$ が $\pm 1\%$, 角振動数 $\omega = 2\pi/T$ が $\pm 0.5\%$ ずつずれた 6 つの波を重ね合わせる。振幅は中心の波から離れるに従って小さくなるようにしてある。すなわち,

$$\begin{aligned} z_7(x, t) = & 1 \times \sin 2\pi(x - t) \\ & + 0.8 \{ \sin 2\pi(1.01x - 1.005t) \\ & \quad + \sin 2\pi(0.99x - 0.995t) \} \\ & + 0.5 \{ \sin 2\pi(1.02x - 1.010t) \\ & \quad + \sin 2\pi(0.98x - 0.990t) \} \\ & + 0.1 \{ \sin 2\pi(1.03x - 1.015t) \\ & \quad + \sin 2\pi(0.97x - 0.985t) \} \end{aligned}$$

とする。このとき,

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = 1$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{2\pi \times 0.005}{2\pi \times 0.010} = 0.5$$

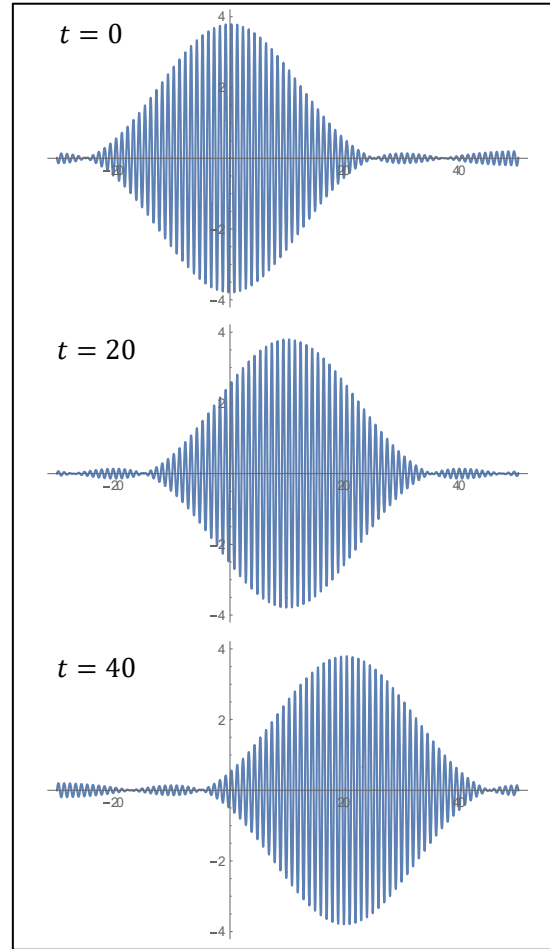
である。右の図は, $t = 0, 20, 40$ のときの波形を表しており, 細かい波形の波が,

$$v_p \times 40 = 40\lambda = 40 \text{ 目盛}$$

進む間に, 波束の頂点が,

$$v_g \times 40 = 20\lambda = 20 \text{ 目盛}$$

進むことを表している。



(IIa) 浅水重力波の群速度と波面

(6) 題意より, $\frac{2\pi h}{\lambda} \cong 0$ であるから, $\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong \frac{2\pi h}{\lambda}$ 。よって, 式⑤より,

$$v_p \cong \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{2\pi h}{\lambda}} = \boxed{\sqrt{gh}} \quad (6)$$

となる。式⑤の証明には大学レベルの流体力学の知識が必要となるので, ここでは説明しない。

問1 式⑥が示すように, 浅水重力波の位相速度は水深 h で決まり, 波数や角振動数に依らない。よって, 波数と角振動数が (k, ω) と $(k + \Delta k, \omega + \Delta\omega)$ の浅水重力波は同じ位相速度 v_p で進行し,

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega + \Delta\omega}{k + \Delta k}$$

を満たす。 $0 < \Delta k \ll k$, $0 < \Delta\omega \ll \omega$ の場合を考え, 加比の理を用いれば, その群速度 v_g は,

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega}{k} = v_p$$

となる。

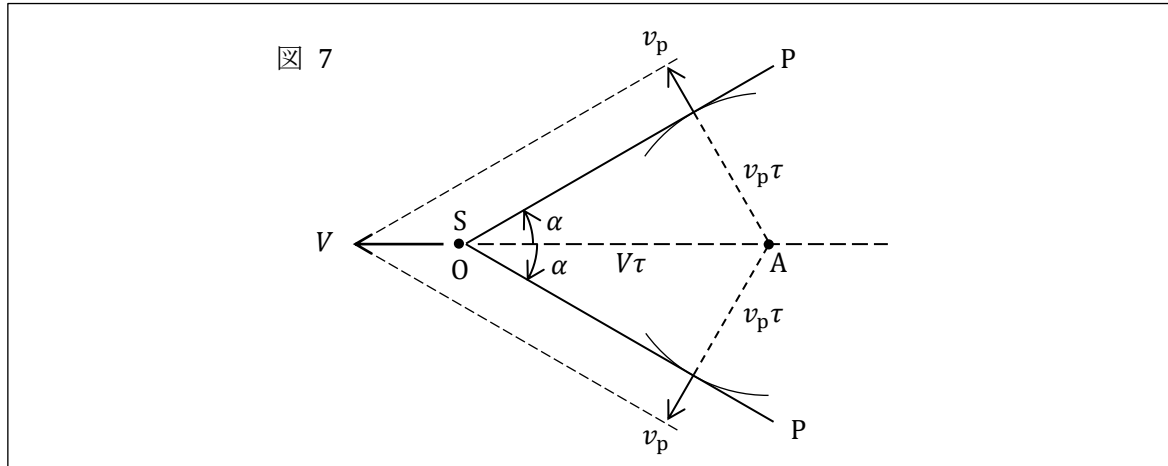
問2 図7のように、時刻 $t = 0$ のときに船 S が水面上の O 点を通過し、それより前の時刻 $t = -\tau$ のときに A 点を通過したとすると、 $\overline{OA} = V\tau$ である。

水面の山は、波数がわずかに異なる多くの波がほぼ同位相で重なって生じる波束であり、群速度 v_g で伝わる。浅水重力波の場合には、 $v_g = v_p$ であるから、 A 点で発せられた山の素元波は、時刻 $t = 0$ のときに半径 $v_p \tau$ の円弧となる。 V と v_p の比は時刻 t に依らないので、異なる時刻に出たすべての素元波に接する包絡線は直線で、これが O 点を通るくさび型の稜線 OP となる。このとき図7より、

$$\sin \alpha = \frac{v_p \tau}{V \tau} = \boxed{\frac{v_p}{V}}$$

が成り立つ。

(注) この式が成り立つとき、 $v_p = V \sin \alpha$ であるから、船 S から見た稜線 OP は動かず、船 S に付いてくるように見える。船 S をサーファー、稜線 OP を高波の頂点に見たてて、これを「波乗り条件」と言うことがある。



(IIb)

(7) 題意より、 $\frac{2\pi h}{\lambda} \gg 1$ であるから、 $\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong 1$ 。よって、式⑤より、

$$v_p \cong \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \boxed{\sqrt{\frac{g}{k}}} \quad (7)$$

となる。深水重力波の場合には、波長 λ が長い波ほど位相速度 v_p が大きくなる。

(8) 式②の $v_p = \omega / k$ と式⑦より、次の関係式を得る。

$$\omega = k v_p = \boxed{\sqrt{gk}} \quad (8)$$

問3 波数と角振動数が k と ω からわずかにずれた $k + \Delta k$ 、 $\omega + \Delta\omega$ の深水重力波にも式⑧が成り立ち、

$$\omega + \Delta\omega = \sqrt{g(k + \Delta k)} = \sqrt{gk} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)} \cong \omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta k}{k}\right)$$

となる。これより,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \Delta k \rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \rightarrow v_g = \frac{1}{2} v_p$$

を得る。あるいは,

$$\Delta k \rightarrow 0 \text{ のとき } v_g = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

であるから,

$$v_g = \frac{d}{dk} \sqrt{gk} = \sqrt{g} \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_p$$

としてもよい。

(III) (9) 問2と同じ論法を適用し, v_p に式⑦を代入すれば,

$$\sin \alpha = \frac{v_p}{V} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (9)$$

を得る。式⑨は、問2の(注)で述べたように、波乗り条件を満たす波面(船Sから見たときに静止して見える波面)に対して成り立つ。

(10) 図3において、波数 k の波面 OP が $A \rightarrow B$ の向きに伝わる速さが位相速度 v_p であるから、 $\angle ABO$ は 90° で $\overline{AB} = v_p \tau$ である。波束 $W(k)$ は $A \rightarrow B$ の向きに速さ v_g で伝わるから、 $\overline{AC} = v_g \tau$ となる。よって、 $\triangle AOB$ と $\triangle COB$ に着目すると、

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}}$$

が成り立つ。これらの比を取り、 $v_g = \frac{1}{2} v_p$ を用いれば、

$$\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \beta)} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{v_p \tau}{v_p \tau - v_g \tau} = 2$$

を得る。よって、

$$\tan \alpha = 2 \tan(\alpha - \beta) \quad (10)$$

となる。これを β について解けば、

$$\alpha - \beta = \text{Arctan}\left(\frac{\tan \alpha}{2}\right) \rightarrow \beta = \alpha - \text{Arctan}\left(\frac{\tan \alpha}{2}\right)$$

となる。 $\text{Arctan } x$ は $\tan x$ の逆関数である。 $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ の範囲内で β を求め、グラフで表したのが図4である。

(補足2) ケルヴィンの航跡波 (大学生向きの説明)

図8の曲線 OCD は、山の波束を連ねた稜線で、航跡波 (wake) という。その曲線を表す式を $y = y_w(x)$ とする。図3に示されているように、C点での曲線の傾きは、

$$\frac{dy_w}{dx} = \tan \alpha \quad (a)$$

である。一方、C点の位置 (x, y_w) は、

$$x = V\tau - v_g \tau \sin \alpha \quad (b)$$

$$y_w = v_g \tau \cos \alpha \quad (c)$$

と表される。ここで、

$$X := V\tau \quad (d)$$

x 軸上を x 軸の負の向きに伝わり、波乗り条件を満たす波の波数を k_0 とすると、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\frac{v_p(k_0)}{V} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{g/k_0}}{V} = 1 \rightarrow k_0 = \frac{g}{V^2}$$

となる。この波の波長 λ_0 と周期 τ_0 は、

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi V^2}{g}, \quad \tau_0 = \frac{\lambda_0}{v_p(k_0)} = \frac{2\pi V}{g}$$

と表される。

いま、図 9 は $t = 0$ のときの航跡波で、船 S が $t = -\tau_0$ のときに $x = V\tau_0$ にあって、 x 軸の負の向きに波数 k_0 の波と山の波束 $W(k_0)$ を出したとする。 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ であるから、式 (i) より $X = X_0$ で、式 (d) より $X_0 = V\tau_0$ となる。さらに波乗り条件より、 $X_0 = v_p(k_0)\tau_0 = \lambda_0$ を得る。したがって、 $t = -\tau_0$ のときに船 S から x 軸の負の向きに出た波数 k_0 の波と山の波束 $W(k_0)$ は、 $t = 0$ のときに、それぞれ、

$$x_p = \lambda_0 - v_p(k_0)\tau_0 = 0$$

$$x_g = \lambda_0 - v_g(k_0)\tau_0 = \lambda_0 - \frac{1}{2}v_p(k_0)\tau_0 = \frac{1}{2}\lambda_0$$

に達する。

次に、 $t = -\tau_0$ より少し後の時刻 $t = -\tau_0 + \Delta t$ に船 S が位置 $x = \lambda_0 - V\Delta t$ で発生させた波数 $k_0 + \Delta k$ のフーリエ成分波が波乗り条件を満たす位相速度 $v_p(k_0 + \Delta k)$ で x 軸の負の向きから角度 $\Delta\alpha$ だけ傾いた左上方向に伝わり、 $t = 0$ のときに、 O 点を通り x 軸と角度 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \Delta\alpha$ をなす波面を形成する。このとき山の波束 $W(k_0 + \Delta k)$ は群速度 $v_g(k_0 + \Delta k) = \frac{1}{2}v_p(k_0 + \Delta k)$ で同じ方向に伝わり、 $t = 0$ のときに曲線 DE 上で D 点より少し上の位置に達する。

以下同様に、船 S が時間 τ_0 の間に次々と航路上で発生させた山の波束は、 $t = 0$ のとき、図 9 の航跡波 $D(\alpha = 90^\circ) \rightarrow E(\alpha = 54.5^\circ) \rightarrow O(\alpha = 0^\circ)$ を形成する。

$t = -\tau_0$ より前の時刻 $t = -n\tau_0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) に船 S から出た波も、 $t = 0$ のときに、同様の航跡波を形成する。それらは、

$$X_0 = v_p(k_0) \cdot n\tau_0 = n\lambda_0$$

として、式 (j) と式 (k) から求めることができる。図 5 は $n = 1, 2, 3, 4$ の航跡波を重ね合わせたものである。

実際の航跡波では、 E 点近傍 ($\beta \doteq 19.5^\circ$) の航跡波が目立って見えることが多い。これは図 4 のグラフで、 $\alpha = 54.5^\circ$ 近傍での β がほぼ同じ $\beta = 19.5^\circ$ になっているので、これらの波束が目立って見えるのである。

航跡波を求める方法はいくつかあるが、ここでは筆者が最もわかり易いと思う次の文献の方法に従って解説した。

<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluid/node152.html>

他の演習問題へ