問題 42　回路網に対するキルヒホッフの法則・重ね合わせの法則・テヴナンの定理

次の文中の $\boxed{}$ に適切な数式を記入し，問いに答えよ。数式は (　　) 内の物理量を用いて表せ。

(I) キルヒホッフの法則と重ね合わせの法則

起電力 E_1 , E_2 の電池と抵抗値 R_1 , R_2 , R_3 の抵抗から成る図 1 のような回路がある。各抵抗を矢印の向きに流れる電流 (I_1 , I_2 , I_3) を，キルヒホッフの法則を用いて求める。

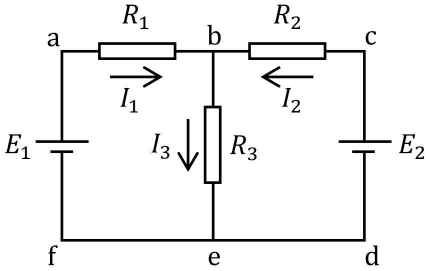


図　1

分岐点 b において，第一法則 ：

$I_3 = \boxed{(1)}$　(I_1 , I_2)　①

閉回路 abefa と cbedc に対して第二法則 ：

$E_1 = \boxed{(2)}$　(R_1 , R_3 , I_1 , I_3)　②

$E_2 = \boxed{(3)}$　(R_2 , R_3 , I_2 , I_3)　③

が成り立つ。これらを解けば，次のようになる。

$I_1 = \boxed{(4)}$　$(E_1 , E_2 , R_1 , R_2 , R_3)$　④

$I_2 = \boxed{(5)}$　$(E_1 , E_2 , R_1 , R_2 , R_3)$　⑤

$I_3 = \boxed{(6)}$　$(E_1 , E_2 , R_1 , R_2 , R_3)$　⑥

これらを別の解法で求める。その方法を説明するために，まず，図 2 のように，起電力 E_2 を取り除いて導線でつなぐ。これを短絡するという。各抵抗を矢印の向きに流れる電流を (I_1' , I_2' , I_3') とすると，式 ①，②，③ と同様の式 ：

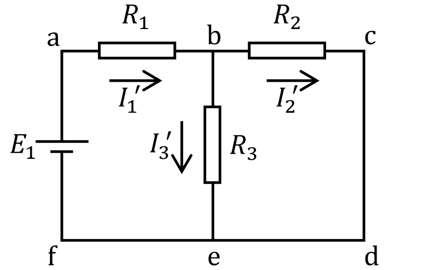


図　2

$I_3' = \boxed{(7)}$　(I_1' , I_2')　⑦

$E_1 = \boxed{(8)}$　$(R_1 , R_3 , I_1' , I_3')$　⑧

$0 = \boxed{(9)}$　$(R_2 , R_3 , I_2' , I_3')$　⑨

が成り立つ。同様に，図 3 のように，起電力 E_1 を取り除いて短絡したときには，

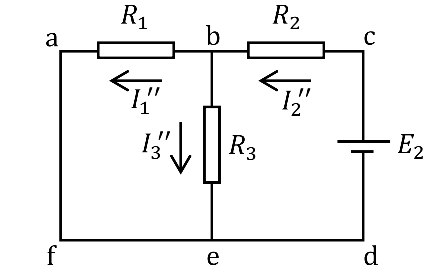


図　3

$I_3'' = \boxed{(10)}$　(I_1'' , I_2'')　⑩

$0 = \boxed{(11)}$　$(R_1 , R_3 , I_1'' , I_3'')$　⑪

$E_2 = \boxed{(12)}$　$(R_2 , R_3 , I_2'' , I_3'')$　⑫

が成り立つ。ここで，式 ⑦ と式 ⑩；式 ⑧ と式 ⑪；式 ⑨ と式 ⑫ の辺々を加え合わせた 3 つの式と式 ①；式 ②； 式 ③ を比較すれば，

$I_1 = \boxed{(13)}$　(I_1' , I_1'')　⑬

$I_2 = \boxed{(14)}$　(I_2' , I_2'')　⑭

$I_3 = \boxed{(15)}$　(I_3' , I_3'')　⑮

であることがわかる。

直列・並列の合成抵抗の公式と，並列回路に流入した電流は抵抗値の逆比で分流することを用いれば，図 2 と図 3 から (I_1', I_2', I_3') と (I_1'', I_2'', I_3'') を簡単に求めることができ，連立一次方程式を解かなくても，式 ⑬，⑭，⑮ から (I_1, I_2, I_3) を求めることができる。

一般的に，回路網内の一つの抵抗 R_k を流れる電流 I_k を求めたいときには，回路網内の一つの起電力 E_i $(i = 1, \cdots, n)$ を残して，他の起電力を短絡し，R_k を流れる電流 $I_{k,i}$ を求める。I_k は $\sum_{i=1}^{n} I_{k,i}$ で与えられる。これを重ね合わせの法則という。ただし，抵抗はすべてオーム抵抗でなければならない。すなわち，抵抗を流れる電流は，両端間の電圧に比例し，電流が流れる向きには依存しない，という条件を満たさなければならない。

問 1 図 4 のように，3 つの起電力 E_1，E_2，E_3 と 3 つのオーム抵抗 R_1，R_2，R_3 から成る回路がある。R_1 を矢印の向きに流れる電流 I_1 を，重ね合わせの法則を用いて求めよ。

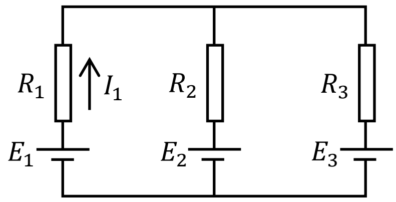


図 4

(II) テヴナンの定理

図 1 の (I_1, I_2, I_3) は，重ね合わせの法則以外の別の方法で求めることもできる。たとえば，I_3 を求める場合には，まず，図 1 の回路を図 5 のように書き換える。

次に，端子 b e の左側の電源部分を，図 6 のように，一つの起電力 E_i と一つの抵抗 R_i で表される等価回路に書き換える。等価回路とは，端子 b e 間の抵抗を流れる電流が，置き換える前と同じになる回路のことである。

E_i は，抵抗 R_3 を切り離したときに端子 b e 間に生じる電位差 V_{be} とし，R_i は，E_1 と E_2 を短絡して，端子 b e から左側を見たときの合成抵抗とすればよい。抵抗 R_3 を切り離したときに閉回路 acdfa を流れる電流 I_{12} は，

$$I_{12} = \boxed{\quad (16) \quad} \quad (E_1, E_2, R_1, R_2)$$

であるから，

$$E_i = V_{\mathrm{be}} = \boxed{\quad (17) \quad} \quad (E_1, E_2, R_1, R_2)$$

となる。また，

$$R_i = \boxed{\quad (18) \quad} \quad (R_1, R_2)$$

であるから，図 6 の回路で R_3 を流れる電流 I_3 は，

$$I_3 = \boxed{\quad (19) \quad} \quad (E_1, E_2, R_1, R_2, R_3)$$

となり，式 ⑥ と一致する。

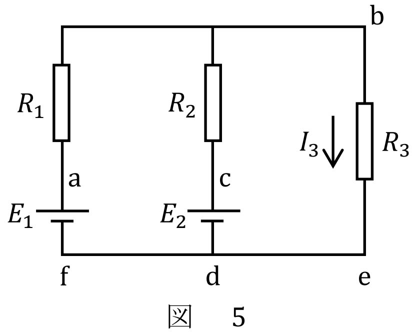


図 5

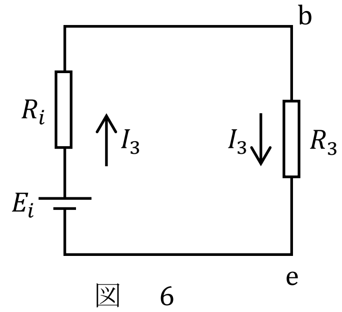


図 6

一般的に，回路網内の一つの抵抗を流れる電流を知りたいときには，その抵抗を切り離したときに，その両端子間に現れる電位差を起電力 E_i とし，回路網内のすべての起電力を短絡したときに，切り離した抵抗の両端子から回路網を見たときの合成抵抗を R_i として，切り離した抵抗と E_i と R_i を直列につないだときに流れる電流を求めればよい。これをテヴナンの定理という。

問 2 起電力 E の電池 E と抵抗値 R_1 , R_2 , R_3 のオーム抵抗 $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{R_3}$ から成る図 7 のようなブリッジ回路がある。

(1) キルヒホッフの法則を用いて，$\mathrm{R_3}$ を矢印の向きに流れる電流 I_3 を求めよ。

(2) 端子 a と端子 d の間の合成抵抗 R_{ad} を求めよ。

(3) テヴナンの定理を用いて，I_3 を求めよ。

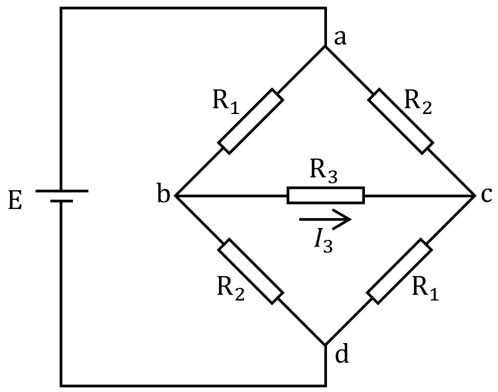


図　7

問題 **42** の解答と解説

(I) キルヒホッフの法則と重ね合わせの法則

(1) (2) (3) 図 1 の回路にキルヒホッフの法則を適用すれば,

$$I_3 = \boxed{I_1 + I_2} \qquad ①$$

$$E_1 = \boxed{R_1 I_1 + R_3 I_3} \qquad ②$$

$$E_2 = \boxed{R_2 I_2 + R_3 I_3} \qquad ③$$

(4) (5) (6) 連立方程式 ① , ② , ③ を解けば,

$$I_1 = \boxed{\frac{(R_2 + R_3) E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}} \qquad ④$$

$$I_2 = \boxed{\frac{(R_1 + R_3) E_2 - R_3 E_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}} \qquad ⑤$$

$$I_3 = \boxed{\frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}} \qquad ⑥$$

(7) (8) (9) 図 2 の回路にキルヒホッフの法則を適用すれば,

$$I_3' = \boxed{I_1' - I_2'} \qquad ⑦$$

$$E_1 = \boxed{R_1 I_1' + R_3 I_3'} \qquad ⑧$$

$$0 = \boxed{-R_2 I_2' + R_3 I_3'} \qquad ⑨$$

(10) (11) (12) 図 3 の回路にキルヒホッフの法則を適用すれば,

$$I_3'' = \boxed{-I_1'' + I_2''} \qquad ⑩$$

$$0 = \boxed{-R_1 I_1'' + R_3 I_3''} \qquad ⑪$$

$$E_2 = \boxed{R_2 I_2'' + R_3 I_3''} \qquad ⑫$$

(13) (14) (15) 式 ⑦ +式 ⑩ , 式 ⑧ +式 ⑪ , 式 ⑨ +式 ⑫ , すなわち, 図 2 と図 3 の回路を式の上で重ね合わせれば,

$$(I_3' + I_3'') = (I_1' - I_1'') + (I_2'' - I_2')$$

$$E_1 = R_1 (I_1' - I_1'') + R_3 (I_3' + I_3'')$$

$$E_2 = R_2 (I_2'' - I_2') + R_3 (I_3' + I_3'')$$

となる。これらと式 ① , 式 ② , 式 ③ を比べれば, 次の式が成り立つ。

$$I_1 = \boxed{I_1' - I_1''}\ , \ I_2 = \boxed{I_2'' - I_2'}\ , \ I_3 = \boxed{I_3' + I_3''} \qquad ⑬ , ⑭ , ⑮$$

図 2 で, 端子 a f 間の合成抵抗 R' は,

$$R' = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2 + R_3}$$

よって,

$$I_1' = \frac{E_1}{R'} = \frac{(R_2 + R_3) E_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3 E_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

図 3 で，端子 c d 間の合成抵抗 R'' は，

$$R'' = R_2 + \frac{R_1\,R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}{R_1 + R_3}$$

よって，

$$I_2'' = \frac{E_2}{R''} = \frac{(\,R_1 + R_3\,)\,E_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

$$I_1'' = I_2''\ \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3\,E_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

⑬，⑭，⑮ より，

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{(\,R_2 + R_3\,)\,E_1 - R_3\,E_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

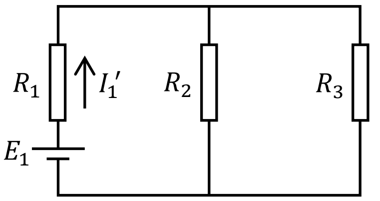
$$I_2 = I_2'' - I_2' = \frac{(\,R_1 + R_3\,)\,E_2 - R_3\,E_1}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = (\,I_1' - I_2'\,) + (\,-I_1'' + I_2''\,) = \frac{R_2\,E_1 + R_1\,E_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

となり，式 ④，⑤，⑥ と一致する。

回路網に対する重ね合わせの法則は，各抵抗にかかる電圧と流れる電流が比例関係にあり，方向性を持たないときに成り立つ。各抵抗での消費電力は流れる電流の 2 乗に比例するので，消費電力は重ね合わせの法則に従わない。

問 1　右図のように，E_2 と E_3 を短絡したとき，E_1 から見た回路の合成抵抗 R' は，

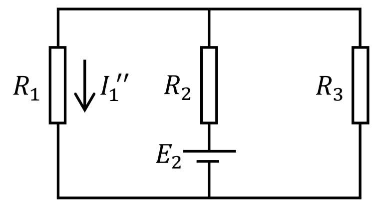


$$R' = R_1 + \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}{R_2 + R_3}$$

となり，R_1 を上向きに流れる電流 I_1' は，

$$I_1' = \frac{E_1}{R'} = \frac{(\,R_2 + R_3\,)\,E_1}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

となる。次に，E_1 と E_3 を短絡したとき，E_2 から見た回路の合成抵抗 R'' は，

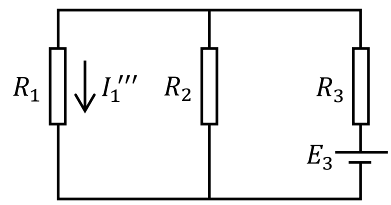


$$R'' = R_2 + \frac{R_1\,R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}{R_1 + R_3}$$

となり，R_1 を下向きに流れる電流 I_1'' は，

$$I_1'' = \frac{E_2}{R''}\ \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3\,E_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

となる。同様に，E_1 と E_2 を短絡したとき，R_1 を下向きに流れる電流 I_1''' は，



$$I_1''' = \frac{R_2\,E_3}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}$$

となる。重ね合わせの法則より，I_1 は次のようになる。

$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1'''$$

$$= \boxed{\frac{(\,R_2 + R_3\,)\,E_1 - R_3\,E_2 - R_2\,E_3}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}}$$

R_2 , R_3 を流れる電流は，I_1 の答の添字 $(1, 2, 3)$ に置換 ： $(1, 2, 3) \to (2, 3, 1) \to (3, 1, 2)$ を施したものになる。すなわち，次のようになる。

$$I_2 = \frac{(R_3 + R_1)\,E_2 - R_1\,E_3 - R_3\,E_1}{R_2\,R_3 + R_3\,R_1 + R_1\,R_2}$$

$$I_3 = \frac{(R_1 + R_2)\,E_3 - R_2\,E_1 - R_1\,E_2}{R_3\,R_1 + R_1\,R_2 + R_2\,R_3}$$

(II) テヴナンの定理

(16) 図 5 の閉回路 acdfa にキルヒホッフの第二法則を適用し，I_{12} を求めれば，

$$E_1 - E_2 = R_1\,I_{12} + R_2\,I_{12} \longrightarrow I_{12} = \boxed{\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}$$

(17) R_3 を切り離したとき，端子 e に対する端子 b の電位差は，

$$V_{\mathrm{be}} = E_2 + R_2\,I_{12} = \boxed{\frac{R_2\,E_1 + R_1\,E_2}{R_1 + R_2}}$$

(18) E_1 と E_2 を短絡したとき，電源部の合成抵抗は，

$$R_i = \boxed{\frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}}$$

(19) 図 6 の回路を流れる電流 I_3 は，$E_i = V_{\mathrm{be}}$ として，

$$I_3 = \frac{E_i}{R_i + R_3} = \boxed{\frac{R_2\,E_1 + R_1\,E_2}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1}}$$

となり，式 ⑥ と一致する。

テヴナンの定理 (Thévenin′s theorem) の証明は，大学レベルの電気回路の教科書に載っているが，WIKIPEDIA の " Thévenin's theorem " でも見ることができる。テヴナンの定理に関する入試問題は 2014 年の奈良医科大学に見られる。

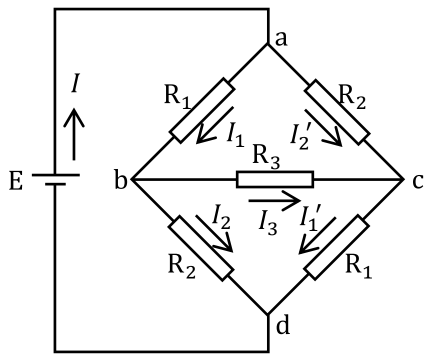


図 8

問 2 (1) 各抵抗を図 8 のように電流が流れるとする。分岐点 b と c で，キルヒホッフの第一法則 ：

$$I_1 - I_2 = I_3 = I_1' - I_2' \qquad ⑯$$

が成り立ち，閉回路 EabdE , EacdE , abca に対して，キルヒホッフの第二法則 ：

$$E = R_1\,I_1 + R_2\,I_2 = R_1\,I_1' + R_2\,I_2' \qquad ⑰$$

$$0 = R_1\,I_1 + R_3\,I_3 - R_2\,I_2' \qquad ⑱$$

が成り立つ。このとき，

式 ⑯ より， $I_1 - I_1' = I_2 - I_2'$ ⑲

式 ⑰ より， $R_1\,(I_1 - I_1') = -R_2\,(I_2 - I_2')$ ⑳

式 ⑲ , ⑳ より， $R_1\,(I_1 - I_1') = -R_2\,(I_1 - I_1')$

$R_1 > 0$, $R_2 > 0$ であるから，$I_1' = I_1$, $I_2' = I_2$ ㉑

となる。式 ㉑ は別の方法で導くこともできる (**参考**) 。さらに，

式 ⑱，⑯，㉑ より，$(R_1 + R_3)\,I_1 = (R_2 + R_3)\,I_2$ ㉒

式 ⑰，㉒ より，

$$E = R_1 I_1 + R_2 \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_3} I_1 \quad \longrightarrow \quad I_1 = \frac{R_2 + R_3}{2 R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} E \qquad ㉓$$

となる。I_2 と I_3 は，式 ㉒，㉓，⑯ より，次のようになる。

$$I_2 = \frac{R_1 + R_3}{2 R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} E, \quad I_3 = \boxed{\frac{R_2 - R_1}{2 R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} E}$$

(2) 分岐点 a でのキルヒホッフの第一法則より，電池 E を流れる電流 I は，

$$I = I_1 + I_2 = \frac{R_1 + R_2 + 2 R_3}{2 R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} E$$

となる。よって，端子 a と端子 d の間の合成抵抗 R_{ad} は次のようになる。

$$R_{\mathrm{ad}} = \frac{E}{I} = \boxed{\frac{2 R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + 2 R_3}}$$

(3) 図 7 で抵抗 R_3 を切り離したとき，a → b → d と a → c → d を流れる電流は，どちらも，

$I_{12} = \dfrac{E}{R_1 + R_2}$ である。端子 d の電位を 0 として，端子 b の電位 V_{b} と端子 c の電位 V_{c} の差 V_{bc} を求めれば，

$$V_{\mathrm{bc}} = V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{c}} = R_2 I_{12} - R_1 I_{12} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} E$$

となる。次に，抵抗 R_3 を切り離して，電池 E を短絡すれば，端子 b c から回路を見たときの合成抵抗 R_i は，

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} = \frac{2 R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

となる。I_3 は，$V_i \equiv V_{\mathrm{be}}$ と R_i と R_3 を直列につないだときに流れる電流であるから，

$$I_3 = \frac{V_i}{R_i + R_3} = \boxed{\frac{(R_2 - R_1)}{2 R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)} E}$$

となり，(1) で求めた式と一致する。

(参考)

次頁の図 8 で，直線 ad を軸として，抵抗部分だけを 180° 回転させると，図 9 のようになる。

次に，図 9 で電池の極性を逆にすると，図 10 のように，各抵抗を流れる電流は逆向きになり，大きさは変化しない。これが成り立つのは，各抵抗をオーム抵抗と仮定しているからである。

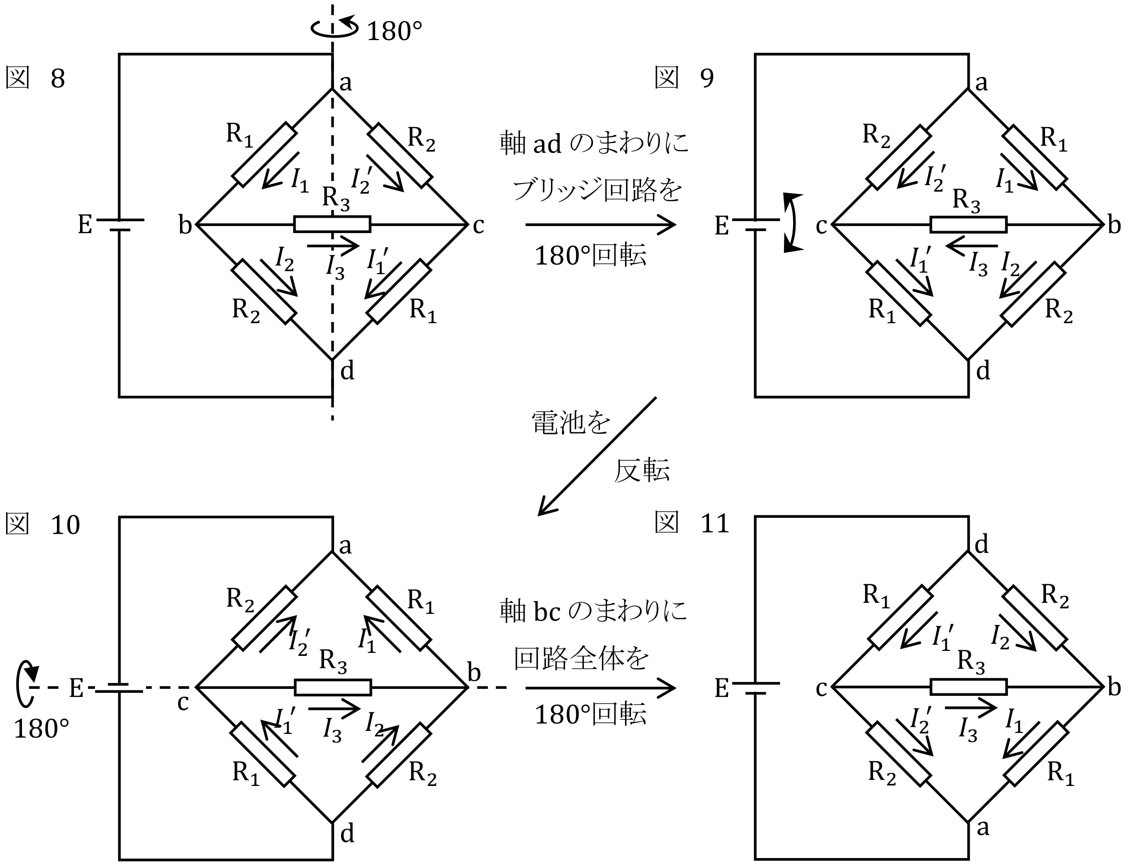
次に，図 10 で，直線 bc を軸として，回路全体を 180° 回転させると，図 11 のようになる。

図 11 と図 8 を比べれば，$I_1' = I_1$，$I_2' = I_2$ であることがわかる。

これらのなかで物理的に意味がある操作は電池の反転で，他の二つの操作は電池とブリッジ回路の位置を変えているだけである。

ある操作 A によって，具体的な物理系 S あるいは抽象的な物理法則 L が変化しないとき，物理系 S あるいは物理法則 L は，操作 A に対して対称であるという。

図 8 の回路は，軸 ad のまわりの 180° の回転 → 電池の反転 → 軸 bc のまわりの 180° の回転という操作に対して対称になっているのである。



あるいはもっと簡単に，次のように考えてもよい。

図 7 の閉回路bcdb に対してキルヒホッフの第二法則を適用すれば，

$$0 = R_3 I_3 + R_1 I_1' - R_2 I_2 \qquad ⑱'$$

が成り立つ。この式は，式 ⑯，⑰，⑱ から導くこともできる。式 ⑯，⑰，⑱，⑱′ からわかるように，(I_1, I_2) と (I_1', I_2') を置き換えても，これら 4 つ一組の式は変化しない。よって，$I_1' = I_1$，$I_2' = I_2$ が成り立つ。

すなわち，図 7 の回路に対するキルヒホッフの法則は，(I_1, I_2) と (I_1', I_2') を置き換える操作に対して対称になっているのである。

対称性は，現代の物理学を支えている基礎概念の一つである。

他の演習問題へ