問題 41　フェルマーの原理と水中光源の見かけの位置

次の文中の $\boxed{}$ に適切な数式または数値をを記入し，問いに答えよ。数式は (　　) 内の物理量を用いて表せ。

(I)　3 次元空間内の点 A を出た光が別の点 B に伝わる場合を考える。図 1 のように，点 A から点 B に至る無数の伝播経路が考えられるが，実際には，点 A から点 B までの伝播時間が最小となる経路に沿って光は伝わる。これをフェルマーの原理 (Fermat′s principle) という。

空間が真空の場合，あるいは一様かつ等方的な媒質で満たされている場合，光は直線 A B に沿って伝わる。なぜなら，この場合，光はどこでもどの方向にも同じ速さで伝わるので，経路の長さが最小のときに伝播時間が最小となるからである。

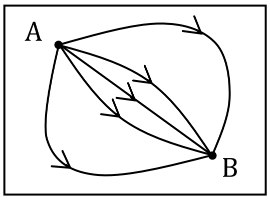
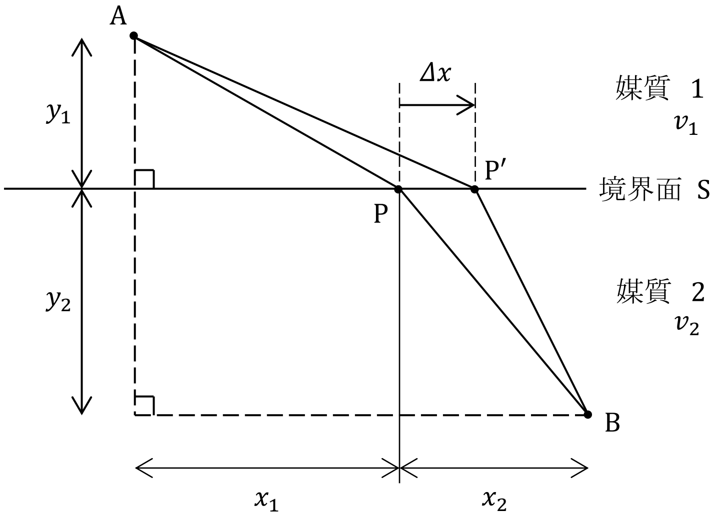


図　1

図　2



次に，図 2 のように，一様かつ等方的な媒質 1 と 2 が平面 S で接しており，点 A が媒質 1 に，点 B が媒質 2 にある場合を考える。媒質　1，2　での光速度をそれぞれ v_1 , v_2 とする。点 A を出た光が境界面上の点 P で屈折して点 B に達したとする。3 点 A , B , P の位置は，図に示された長さ x_1 , y_1 , x_2 , y_2 で与えられる。このとき，光が点 A から点 B まで伝わるのに要するに時間 t_{AB} は $\boxed{(1)}$ $(x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , v_1 , v_2)$ となる。ここで仮に，点 A を出た光が点 P の近傍の点 P′ を通って点 B に伝わったとする。ただし，簡単のために，点 A , B , P , P′ は境界面 S に垂直な平面上にあるとする。点 P′ が点 P の右側にあるとき，そのずれ Δx を正とし，左側にあるとき，そのずれ Δx を負とする。この仮想的な経路 A P′ B を光が伝わる時間の最小値 t'_{AB} は $\boxed{(2)}$ $(x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , v_1 , v_2 , \Delta x)$ である。$\Delta x / x_1$ ，$\Delta x / x_2$ の 2 次以上の微小量を無視し，$|\,\varepsilon\,| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1+\varepsilon)^a \fallingdotseq 1 + a$ を用いて，$\Delta t = t'_{\mathrm{AB}} - t_{\mathrm{AB}}$ を求めれば，

$$\Delta t = \boxed{(3)} \times \Delta x \quad (x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , v_1 , v_2)$$

となる。

フェルマーの原理より，Δt は $\Delta x = 0$ で極小値 0 を取らなければならない。このことから，x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , v_1 , v_2 の間に成り立つ関係式 $\boxed{\quad (4) \quad}$ を得る。よって，フェルマーの原理が成り立つとき，光は屈折の法則に従って屈折する。

問 1　同様の論法で，光が点 P で反射するとき，反射の法則に従って反射することを示せ。

問 2　フェルマーの原理は，「点 A から点 B までの伝播経路の光路長（光学的距離）が最小となる経路に沿って光が伝わる」と言い換えられることを示せ。

(II)　図 3 のように，液体中の点光源 P を空気中から見ると，点光源が浮き上がって見える。線分 $\overline{\mathrm{E\,E'}}$ は瞳孔の直径で，点 E を通る光は点 O で屈折し，点 E′ を通る光は点 O′ で屈折する。瞳孔を通る光は，直線 OE と直線 O′E′ の延長線上の交点 P′ から出てくるように見える。点 O および点 O′ における点光源 P からの光の入射角と屈折角を，それぞれ θ_1 , θ_2 および θ_1' , θ_2' とし，$\Delta\theta_1 = \theta_1' - \theta_1$, $\Delta\theta_2 = \theta_2' - \theta_2$ とする。点 O を原点として，図 3 のように $(x\,,\,y)$ 座標を設定する。このとき，直線 PO と直線 PO′ を数式で表せば，

$$\mathrm{PO}\ :\ x = \boxed{\quad (5) \quad}\ (y\,,\,\theta_1) \qquad ①$$

$$\mathrm{PO'}:\ x - \Delta x = \boxed{\quad (6) \quad}\ (y\,,\,\theta_1\,,\,\Delta\theta_1) \qquad ②$$

となる。これら 2 直線の交点が点 P である。その座標を $(-d\,,-h)$ とおけば，

$$d = \boxed{\quad (7) \quad}\ (\theta_1\,,\,\Delta\theta_1\,,\,\Delta x) \qquad ③$$

$$h = \boxed{\quad (8) \quad}\ (\theta_1\,,\,\Delta\theta_1\,,\,\Delta x) \qquad ④$$

と表される。同様にして，点 P′ の座標 $(-d'\,,-h')$ を求めれば，

$$d' = \boxed{\quad (9) \quad}\ (\theta_2\,,\,\Delta\theta_2\,,\,\Delta x) \qquad ⑤$$

$$h' = \boxed{\quad (10) \quad}\ (\theta_2\,,\,\Delta\theta_2\,,\,\Delta x) \qquad ⑥$$

となる。これらより，次の関係式を得る。

$$\frac{d'}{d} = \boxed{\quad (11) \quad}\ (\theta_1\,,\,\theta_2\,,\,\Delta\theta_1\,,\,\Delta\theta_2) \qquad ⑦$$

$$\frac{h'}{h} = \boxed{\quad (12) \quad}\ (\theta_1\,,\,\theta_2\,,\,\Delta\theta_1\,,\,\Delta\theta_2) \qquad ⑧$$

液体の屈折率を n , 空気の屈折率を 1 とする。点 O と点 O′ での屈折に対する屈折の法則より，

$$n = \boxed{\quad (13) \quad}\ (\theta_1\,,\,\theta_2) \qquad ⑨$$

$$n = \boxed{\quad (14) \quad}\ (\theta_1\,,\,\theta_2\,,\,\Delta\theta_1\,,\,\Delta\theta_2) \qquad ⑩$$

が成り立つ。以下では，$\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ を微小角とする。式 ⑨ と式 ⑩ の右辺が等しいこと，および微小角 $\Delta\theta$ に対して成り立つ近似式 ：

$$\sin\Delta\theta \fallingdotseq \Delta\theta\,, \qquad \cos\Delta\theta \fallingdotseq 1$$

を用いれば，

$$\frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} \fallingdotseq \boxed{\quad (15) \quad}\ (\theta_1\,,\,\theta_2) \qquad ⑪$$

を得る。さらに，近似式　：

$$\tan(\theta+\Delta\theta) \fallingdotseq \tan\theta + \frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}\theta}\Delta\theta = \tan\theta + \frac{1}{\cos^2\theta}\Delta\theta$$

を用いれば，式 ⑦，⑧，⑨，⑪ より，

$$\frac{d'}{d} \fallingdotseq \boxed{(16)} \ (n,\ \sin\theta_2) \qquad ⑫$$

$$\frac{h'}{h} \fallingdotseq \boxed{(17)} \ (n,\ \sin\theta_2) \qquad ⑬$$

となる。式 ⑫ と式 ⑬ より，n と θ_2 が与えられれば，点光源 P に対する見かけの光源 P′ の相対的な位置がわかる。

たとえば，$\theta_2 \fallingdotseq 0$ のとき，すなわち，真上から光源 P を見下ろせば，

$$\frac{h'}{h} \fallingdotseq \boxed{(18)} \ (n)$$

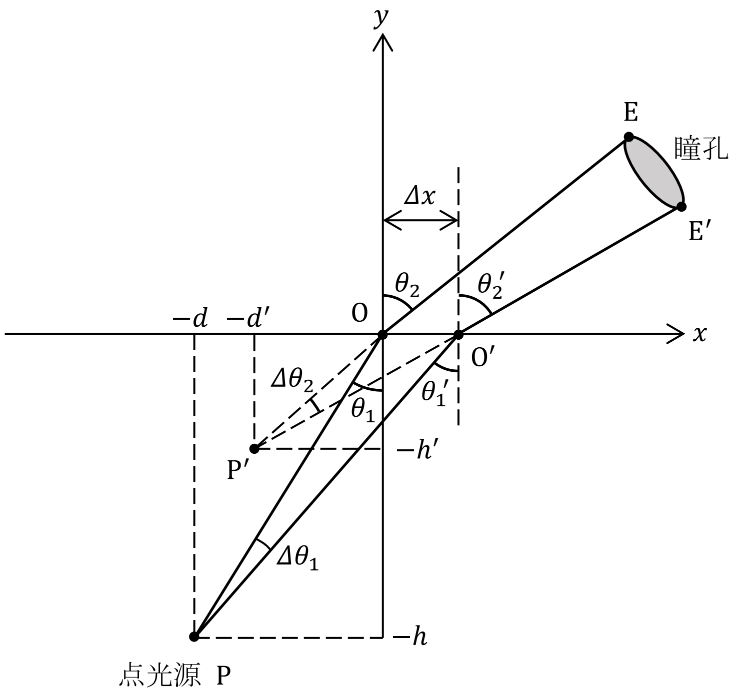
となる。また，液体が水の場合，$n \fallingdotseq 4/3$ であるので，$\theta_2 = 45°$ の方向から光源 P を見れば，

$$\frac{d'}{d} \fallingdotseq \boxed{(19)} \ (\text{数値})$$

$$\frac{h'}{h} \fallingdotseq \boxed{(20)} \ (\text{数値})$$

となる。

図 3



問題 41 の解答と解説

(I) フェルマーの原理に関する入試問題は，2～3 年に一度の頻度でどこかの大学に出題される。

(1) 媒質 1，2 は一様かつ等方的であるから，屈折する点 P が与えられれば，A P 間と P B 間の伝播経路は直線で，伝播時間 t_{AB} は次のようになる。

$$t_{\mathrm{AB}} = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{v_1} + \frac{\overline{\mathrm{PB}}}{v_2} = \boxed{\frac{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}{v_2}} \qquad ①$$

(2) 点 A を出た光が点 P′ を通って点 B に伝わるとき，A P′ B 間の伝播時間が最小となるのは，$\overline{\mathrm{AP'}}$ 間と $\overline{\mathrm{P'B}}$ 間の経路が直線のときである。したがって，

$$t'_{\mathrm{AB}} = \frac{\overline{\mathrm{AP'}}}{v_1} + \frac{\overline{\mathrm{P'B}}}{v_2} = \boxed{\frac{\sqrt{(x_1 + \Delta x) + {y_1}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - \Delta x) + {y_2}^2}}{v_2}} \qquad ②$$

(3) 与えられた近似式を用い，$(\Delta x)^2$ を無視すれば，

$$\{(x_1 + \Delta x)^2 + {y_1}^2\}^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq \{({x_1}^2 + {y_1}^2) + 2x_1\,\Delta x\}^{\frac{1}{2}} = ({x_1}^2 + {y_1}^2)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{2x_1\,\Delta x}{{x_1}^2 + {y_1}^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq ({x_1}^2 + {y_1}^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x_1\,\Delta x}{{x_1}^2 + {y_1}^2}\right) = ({x_1}^2 + {y_1}^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x_1\,\Delta x}{({x_1}^2 + {y_1}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

となる。同様に，

$$\{(x_2 - \Delta x)^2 + {y_2}^2\}^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq ({x_2}^2 + {y_2}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_2\,\Delta x}{({x_2}^2 + {y_2}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

となる。これらを用いて式 ② と式 ① の差を求めれば，次のようになる。

$$\Delta t = t'_{\mathrm{AB}} - t_{\mathrm{AB}} = \boxed{\left\{\frac{x_1}{({x_1}^2 + {y_1}^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{v_1} - \frac{x_2}{({x_2}^2 + {y_2}^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{v_2}\right\}} \times \Delta x \qquad ③$$

(4) フェルマーの原理によれば，光が経路 A P B を伝わるときに，A B 間の伝播時間が最小値を取るので，境界面上の点 P の近傍で点 P′ を移動させると，図 4 のように，Δt は $\Delta x = 0$ で極小値 $\Delta t = 0$ を取る。図 4 の曲線は Δx の 2 次以上の項も考慮して描いてある。よって，式 ③ の Δx の係数は 0 でなければならない。すなわち，

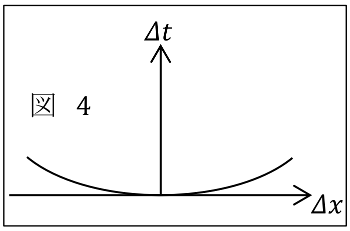


図 4

$$\boxed{\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}}\,\frac{1}{v_1} = \frac{x_2}{\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}\,\frac{1}{v_2}} \qquad ④$$

でなければならない。点 P での光の入射角を θ_1，屈折角を θ_2 とすれば，

$\sin\theta_1 = x_1 / \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$ ，$\sin\theta_2 = x_2 / \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ であるから，式 ④ は，

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

と書き換えられる。すなわち，屈折の法則 (スネルの法則) が成り立つ。

問 1　図 5 の直線 P C が実際の反射光の経路であるとし，図のように入射角を θ_1，反射角を θ_3 とする。このとき，光が経路 A P C を伝わる時間 t_{AC} は,

$$t_{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{{x_3}^2+{y_3}^2}}{v_1}$$

となる。仮に，点 A から出た光が点 P の近傍の点 P′ で反射して点 C に伝わるとすると，その伝播時間の最小値 t'_{AC} は

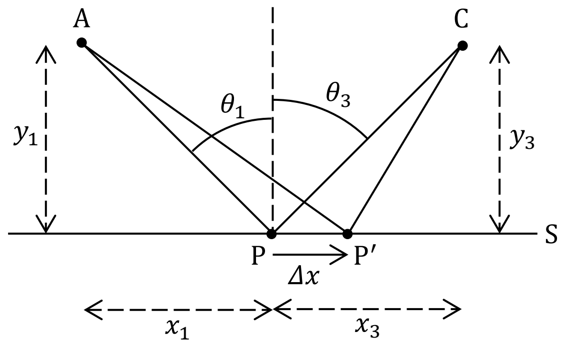


図 5

$$t'_{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{(x_1+\Delta x)^2+{y_1}^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x_3-\Delta x)^2+{y_3}^2}}{v_1}$$

となる。Δx の 2 次以上の微小量を無視すれば,

$$t'_{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}{v_1}+\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}\frac{\Delta x}{v_1}+\frac{\sqrt{{x_3}^2+{y_3}^2}}{v_1}-\frac{x_3}{\sqrt{{x_3}^2+{y_3}^2}}\frac{\Delta x}{v_1}$$

となる。これより,

$$\Delta t=t'_{\mathrm{AC}}-t_{\mathrm{AC}}=\left(\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}-\frac{x_3}{\sqrt{{x_3}^2+{y_3}^2}}\right)\frac{\Delta x}{v_1}$$

を得る。フェルマーの原理より，Δt は $\Delta x=0$ で極小値 $\Delta t=0$ を取らなければならないので，Δx の係数は 0 でなければならない。よって,

$$\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}=\frac{x_3}{\sqrt{{x_3}^2+{y_3}^2}}\quad\longrightarrow\quad\sin\theta_1=\sin\theta_3\quad\longrightarrow\quad\theta_1=\theta_3$$

となり，反射の法則が成り立つ。

問 2　真空中の光速度を c，媒質 1，2 の屈折率をそれぞれ n_1，n_2 とすると，屈折率の定義より,

$$v_1=\frac{c}{n_1}\ ,\qquad v_2=\frac{c}{n_2}$$

となる。これを用いれば，点 A を出た光が境界面上の点 P′ を通って点 B に伝わるときの伝播時間の最小値は,

$$t'_{\mathrm{AB}}=\frac{\overline{\mathrm{AP'}}}{v_1}+\frac{\overline{\mathrm{P'B}}}{v_2}=\frac{1}{c}\left(n_1\,\overline{\mathrm{AP'}}+n_2\,\overline{\mathrm{P'B}}\right)=\frac{1}{c}\left(\text{経路 A P′ B の光路長 }\ell'\right)$$

と表される。よって，点 A から点 B までの伝播時間が最小値を取るのは，光路長 ℓ' が最小値を取るときである，と言い換えられる。 **(参考)**

(II) フェルマーの原理に関する入試問題は，設問数が少なくなりがちなので，屈折の法則の応用問題として，水中光源の見かけの位置を問う設問を付け加えることが多い。真上からではなく，斜め方向から見る場合には，数学の計算問題になってしまうので，出題を避ける作成者が多い。出題された場合には，$d'=d$ とする間違い問題になっていることがよくあるので，注意が必要である。

(5)　PO ： $x=\boxed{y\tan\theta_1}$　①

(6)　P′O ： $x-\Delta x=y\tan\theta'_1=\boxed{y\tan(\theta_1+\Delta\theta_1)}$　②

(7)　式 ①，② より y を消去して x を求め，それを $-d$ とすれば,

$$d = \boxed{\frac{\tan\theta_1}{\tan(\theta_1 + \Delta\theta_1) - \tan\theta_1}}\ \Delta x \qquad ③$$

(8)
$$h = \frac{d}{\tan\theta_1} = \boxed{\frac{1}{\tan(\theta_1 + \Delta\theta_1) - \tan\theta_1}}\ \Delta x \qquad ④$$

(9)(10) 式①，②，③，④で，θ_1，$\Delta\theta_1$，d，h をそれぞれ θ_2，$\Delta\theta_2$，d'，h' に置き換えれば，

$$d' = \boxed{\frac{\tan\theta_2}{\tan(\theta_2 + \Delta\theta_2) - \tan\theta_2}}\ \Delta x \qquad ⑤$$

$$h' = \boxed{\frac{1}{\tan(\theta_2 + \Delta\theta_2) - \tan\theta_2}}\ \Delta x \qquad ⑥$$

(11)(12) 式③，④，⑤，⑥より，

$$\frac{d'}{d} = \boxed{\frac{\tan\theta_2\ \{\tan(\theta_1 + \Delta\theta_1) - \tan\theta_1\}}{\tan\theta_1\ \{\tan(\theta_2 + \Delta\theta_2) - \tan\theta_2\}}} \qquad ⑦$$

$$\frac{h'}{h} = \boxed{\frac{\tan(\theta_1 + \Delta\theta_1) - \tan\theta_1}{\tan(\theta_2 + \Delta\theta_2) - \tan\theta_2}} \qquad ⑧$$

(13)(14) 屈折の法則より，

$$n = \boxed{\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}} \qquad ⑨$$

$$n = \frac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_1'} = \boxed{\frac{\sin(\theta_2 + \Delta\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \Delta\theta_1)}} \qquad ⑩$$

(15) 式⑨，⑩と与えられた近似式を用いれば，

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{\sin\theta_2\ \cos\Delta\theta_2 + \cos\theta_2\ \sin\Delta\theta_2}{\sin\theta_1\ \cos\Delta\theta_1 + \cos\theta_1\ \sin\Delta\theta_1} \fallingdotseq \frac{\sin\theta_2 + \cos\theta_2\,\Delta\theta_2}{\sin\theta_1 + \cos\theta_1\,\Delta\theta_1}$$

$$\rightarrow\ \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{\sin\theta_2\ \cos\theta_1}{\sin\theta_1\ \cos\theta_2} = \boxed{\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}} \qquad ⑪$$

(16) 問題文に与えられた近似式と式⑦，⑪，⑨より，

$$\frac{d'}{d} \fallingdotseq \frac{\tan\theta_2\{(\tan\theta_1 + \Delta\theta_1 / \cos^2\theta_1) - \tan\theta_1\}}{\tan\theta_1\{(\tan\theta_2 + \Delta\theta_2 / \cos^2\theta_2) - \tan\theta_2\}} = \frac{\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_1}$$

$$= \frac{1 - \sin^2\theta_2}{1 - \left(\frac{1}{n}\sin\theta_2\right)^2} = \boxed{n^2\ \frac{1 - \sin^2\theta_2}{n^2 - \sin^2\theta_2}} \qquad ⑫$$

(17) 同様に，式⑧，⑪より，

$$\frac{h'}{h} \fallingdotseq \frac{\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_1}\ \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} \fallingdotseq \frac{\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_1}\ \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\cos^3\theta_2}{\cos^3\theta_1}\ \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

これと式⑨より，

$$\frac{h'}{h} = \left\{\frac{1 - \sin^2\theta_2}{1 - \left(\frac{\sin\theta_1}{n}\right)^2}\right\}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{n} = \boxed{n^2\left(\frac{1 - \sin^2\theta_2}{n^2 - \sin^2\theta_2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad ⑬$$

(18)　$\theta_2 \fallingdotseq 0$ のとき，式 ⑬ より，

$$\frac{h'}{h} \fallingdotseq \boxed{\frac{1}{n}}$$

(19) (20)　$n \fallingdotseq \dfrac{4}{3}$, $\theta_2 = 45°$ のとき，式 ⑫ と式 ⑬ より，

$$\frac{d'}{d} \fallingdotseq \frac{16}{23} \fallingdotseq \boxed{0.696}$$

$$\frac{h'}{h} \fallingdotseq \frac{48}{23\sqrt{23}} \fallingdotseq \boxed{0.435}$$

(参考)

これを一般化すれば次のようになる。媒質が一様ではなく，屈折率が位置 $\vec{r} = (\,x\,,\,y\,,\,z\,)$ の関数 $n\,(\,\vec{r}\,)$ であるとする。点 A から点 B までの任意の経路を N 個の微小区間に分割し，i 番目の微小区間の長さを $\Delta\ell_i = \sqrt{(\Delta x)_i^2 + (\Delta y)_i^2 + (\Delta z)_i^2}$　$(\,i = 1\,,\cdots,N\,)$ とする。この微小区間の近傍で，光速度 $v_i = c\,/\,n\,(\,\vec{r}_i\,)$ が等方的であるとすれば，点 A から点 B まで光が伝わる時間は，

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta\ell_i}{v_i} = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N} n_i\,\Delta\ell_i = \frac{1}{c}\,(\,\text{AB 間の光路長}\,)$$

となる。フェルマーの原理より，これが最小となる経路，すなわち光路長が最小となる経路に沿って光は伝わる。点 A から測った経路の長さを s とし，これを微小区間の位置を表すパラメータとして，$N \to \infty$ の極限をとれば，光路長 S は次のように表される。

$$S = \int_{s_\mathrm{A}}^{s_\mathrm{B}} L\,\mathrm{d}\,s\ \ , \qquad L = n\,(\,\vec{r}\,(s)\,)\cdot\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2}$$

このように定義された L をラグランジアンという。点 A と点 B の位置を固定したときに，S が極小値 (極大値の場合もある) を取る経路に沿って光は伝わる。この原理から幾何光学のすべての現象が説明される。高校生には無理だが，具体的な計算に興味がある人は，

山本義隆 「幾何光学の正準理論」 数学書房

を読まれるとよい。

力学や電磁気学などでも，ラグランジアン $L\,(\,\vec{r}(t)\,,\,\dot{\vec{r}}(t)\,)$ [$\dot{}$ は時刻による微分] を適切に定義し，パラメータとして時刻 t を採って，

$$S = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} L\,\mathrm{d}\,t$$

が極値を取る経路を求めれば，固定点 A と B の間を粒子や荷電粒子がどのように運動するかがわかる。S を作用と言い，このような考え方を最小作用の原理と言う。最小作用の原理が現代物理学の根底を支えている。

他の演習問題へ