問題 40　断熱不変量と量子化条件

次の文中の $\boxed{\quad\quad}$ に適切な数式を記入し，問いに答えよ。数式は (　) 内の物理量を用いて表せ。

(Ⅰ) 図 1 のように，軽いひもにつながれた質量 m の小球 P が滑らかな水平面上で，半径 r , 速さ v の円運動をしている。r が変化しないように，小さな穴 O に通されたひもの下端を手で支える。穴とひもの間の摩擦は無視できる。このとき小球 P の回転角速度 ω は $\boxed{(1)}$ $(r\,,\,v)$ で，手がひもに及ぼす力の大きさ f は $\boxed{(2)}$ $(m\,,\,r\,,\,v)$ である。

ここで，ひもの下端を Δr だけゆっくり引き下げる。ただし，$0 < \Delta r \ll r$ とする。ゆっくりとは，引き下げる時間が小球 P の回転周期に比べて充分長いという意味である。その結果，小球 P の回転半径 r , 接線速度の大きさ v , 角速度 ω , 運動エネルギー E は，それぞれ Δr , Δv , $\Delta\omega$, ΔE だけ微小変化する。それらの間には，$|\,x\,| \ll 1$ のときに成り立つ近似式：$(1+x)^n \fallingdotseq 1 + n\,x$ を用い，微小量の積を無視すれば，

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \boxed{(3)}\ (r\,,\,v\,,\,\Delta r\,,\,\Delta v)\,,\qquad \frac{\Delta E}{E} = \boxed{(4)}\ (v\,,\,\Delta v)$$

が成り立つ。

ひもを引き下げるときに手がする仕事 ΔW は，f の微小変化を無視して近似計算をすれば，

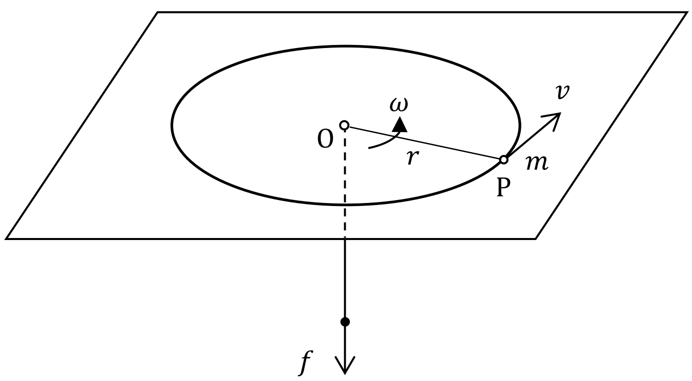
$$\Delta W = \boxed{(5)}\ (m\,,\,r\,,\,v\,,\,\Delta r)$$

となる。ΔW と ΔE の関係および式 (4) を用いれば，r , v , Δr , Δv の間に関係式 $\boxed{(6)}$ が成り立つことがわかる。以上の結果から，E , ω , ΔE , $\Delta\omega$ の間の関係式を求めれば，$\boxed{(7)}$ となる。

問 1　ひもをゆっくり引き下げるとき，$\dfrac{E}{\omega}$ が一定に保たれることを示し，一定となる量を m , r , v を用いて表せ。

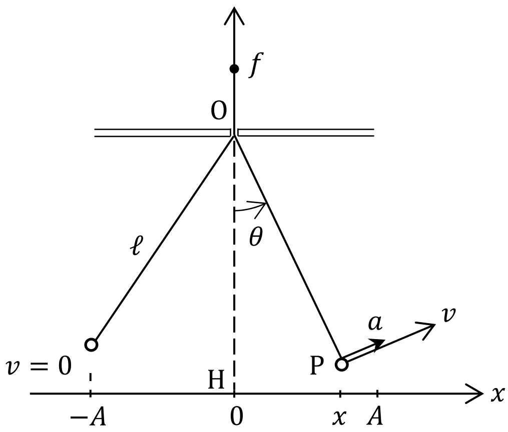
このように，回転系や振動系のパラメータ，いまの場合なら OP 間のひもの長さ，をゆっくり変化させるとき，一定に保たれる量を断熱不変量という。

図　1



(**II**) 図 1 の上下を逆様にして，図 2 のように小穴 O を支点として，小球 P を鉛直面内で振動させる。ひもの上端を手で支えて，O P 間のひもの長さ ℓ を一定に保つ。重力加速度の大きさを g とする。

図　2



ひも $\overline{\mathrm{OP}}$ が鉛直線から角度 θ だけ傾いたときの，ひもの張力を f，小球の接線速度を v，接線加速度を a とする。θ，v，a は反時計まわりの向きを正とする。このとき，小球 P の運動方程式の接線成分は $\boxed{\ (8)\ }$ (m, g, θ, a)，向心成分は $\boxed{\ (9)\ }$ $(m, g, \ell, \theta, v, f)$ と表される。

以下では，$\theta \fallingdotseq 0$ の微小振動を考える。このとき，小球 P は最下点 H を原点とする水平な x 軸上を往復運動するとしてよい。v を v_x に，a を a_x に書き換え，近似式：

$\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1 - \dfrac{1}{2}\theta^2$ を用いると，式 (8) と式 (9) は，

$$m\,a_x = \boxed{\ (10)\ }\,(m, g, \ell, x) \qquad ①$$

$$f = \boxed{\ (11)\ }\,(m, g, \ell, x, v_x) \qquad ②$$

と書き換えられる。

式 ① は単振動の運動方程式であるから，その角振動数 ω は，

$$\omega = \boxed{\ (12)\ }\,(g, \ell) \qquad ③$$

となる。時刻 $t = 0$ のときに，$x = -A$ から $v_x = 0$ で単振動が始まるとすると，時刻 t での x と v_x は，

$$x = -A\cos\omega t, \qquad v_x = A\,\omega\,\sin\omega t \qquad ④$$

と表される。小球 P の力学的エネルギー E は保存され，

$$E = \boxed{\ (13)\ }\,(m, \omega, A) \qquad ⑤$$

となる。

次に，手で支えていたひもの上端をゆっくり微小距離 $\Delta\ell$ だけ引き上げる。その間，ひもの張力 f は式 ② に従って時間的に変化するので，手がする仕事 ΔW を計算するときには，f を 1 周期に亘る平均値 $< f >$ で置き換える。$< \cos^2\omega t > = < \sin^2\omega t > = \dfrac{1}{2}$ に注意すれば，

$$\Delta W = m\,g\,\Delta\ell + \boxed{\ (14)\ }\,(m, g, \ell, \omega, A, \Delta\ell) \qquad ⑥$$

となる。式 ⑥ の右辺第 1 項は，振動系の重力による位置エネルギーの増加量を表しており，単振動のエネルギー変化には寄与しない。このことに注意して，単振動の力学的エネルギーの変化量 ΔE と

E の比を求めれば,

$$\frac{\Delta E}{E} = \boxed{\ (15)\ }\left(\ell \ , \Delta\ell \ \right) \tag{⑦}$$

となる。

一方, ℓ の微小変化 $\Delta\ell$ (> 0) に伴う ω の微小変化を $\Delta\omega$ とすれば, ℓ , $\Delta\ell$, ω , $\Delta\omega$ の間に,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \boxed{\ (16)\ }\left(\ell \ , \Delta\ell \ \right) \tag{⑧}$$

が成り立つ。式 ⑦ と式 ⑧ より, E , ΔE , ω , $\Delta\omega$ の間に成り立つ関係式 :

$$\frac{\Delta E}{E} = \boxed{\ (17)\ }\left(\omega \ , \Delta\omega \right) \tag{⑨}$$

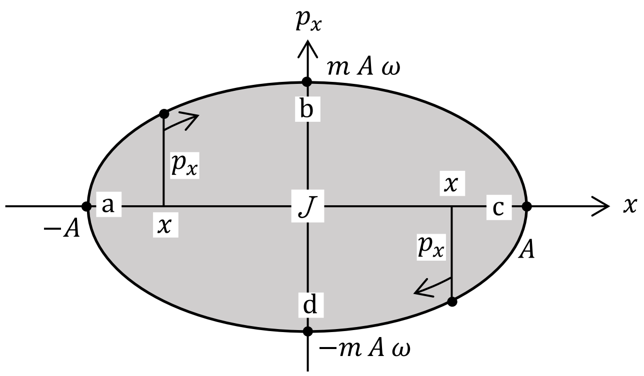
を得る。(**I**) の問 1 と同様に, 式 ⑨ から $\dfrac{E}{\omega}$ が断熱不変量であることがわかる。その不変量を C として, m , ω , A を用いて C を表せば,

$$C = \boxed{\ (18)\ } \tag{⑩}$$

となる。

(**III**) 前節 (**II**) で扱った単振動する小球 P の位置 x を横軸に, 運動量 p_x $(= m\,v_x)$ を縦軸にとった図 3 のグラフで, 一周期の間に点 $\left(x \ , p_x \right)$ が描く軌跡 a → b → c → d → a は楕円になる。このとき, 位置 x で長さ $|\,p_x\,|$ の線分が 1 周期の間に $x - p_x$ 面を掃く面積は $\boxed{\ (19)\ }\left(m \ , A \ , \omega \right)$ である。これを作用変数と言い, J で表す。作用変数 J と式 ⑩ の断熱不変量 C を比べれば, 作用変数 J は断熱不変量であることがわかる。すなわち, 図 2 でひも $\overline{\mathrm{OP}}$ の長さ ℓ をゆっくり変化させると, ω , A , E は変化するが, J は変化しない。よって, 図 3 の楕円の形は変化するが, 面積は変化しない。

図　3



問 2　国際単位系 (S I) の基本単位 m , kg , s で表した作用変数 J とプランク定数 h の単位は同じであることを示せ。

プランク定数は物理定数であるから, 一定に保たれる作用変数 J の値を h の無次元数倍として表すことができる。その無次元数を負でない整数として,

$$J = n\,h \quad \left(n = 0 \ , 1 \ , 2 \ , \cdots \right) \tag{⑪}$$

と仮定する。これをボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件という。これを認めれば, 単振動する小

球 P の力学的エネルギーは離散的な値を取る。すなわち，量子化される。そのエネルギー E_n を n と $\hbar$ と角振動数 ω で表せば，

$$E_n = \boxed{\quad (20) \quad}\left(n\ ,\ \hbar\ ,\ \omega\right) \qquad ⑫$$

となる。ただし，$\hbar = \dfrac{h}{2\,\pi}$ である。これをディラック定数と言うことがある。

式 ⑫ が示すように，単振動を量子化すると，エネルギー準位 E_n は等間隔になる。

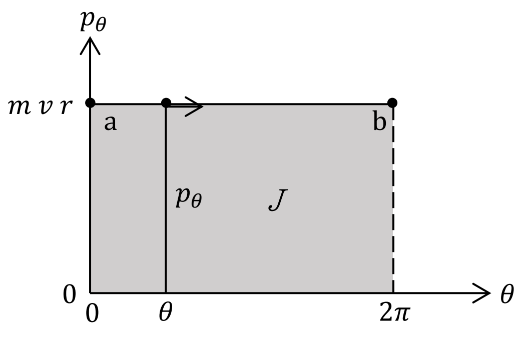
次に，前々節 (**I**) で扱った半径 r ，速さ v の等速円運動に，ボーア･ゾンマーフェルトの量子化条件を適用する。小球 P の位置は，時刻 $t = 0$ におけるひも $\overline{\mathrm{OP}}$ の位置から測ったひもの回転角 θ で与えられる。この位置における小球 P の回転運動の勢いを表す量 $m\,v\,r$ ($\equiv p_\theta$) を角運動量と言う。これは，単振動する小球 P の位置 x における直線運動の勢いを表す運動量 p_x に相当する。

小球 P が円周を 1 回転するとき，横軸に θ ，縦軸に p_θ をとったグラフで，点 $\left(\theta\ ,\ p_\theta\right)$ が描く軌跡は，図 4 のように，直線 a → b になる。このとき，位置 θ で長さ $|\,p_\theta\,|$ の線分が 1 周期の間に $\theta - p_\theta$ 面を掃く面積 J に，ボーア･ゾンマーフェルトの量子化条件を適用することができる。その結果，小球 P の角運動量 p_θ は離散的な値 L_n を取り，$n = 0$ ，1 ，2 ，… として，

$$L_n = \boxed{\quad (21) \quad}\left(n\ ,\ \hbar\right) \qquad ⑬$$

と表される。

図　4



問 3　水素原子のエネルギー準位を論じるとき，電子が原子核のまわりに円軌道を描くためには，円軌道に沿って電子のド･ブロイ波の定常波が生じなければならない，という条件を用いた。この量子化条件を用いて式 ⑬ を導け。

問題 40 の解答と解説

1925 年以前の前期量子論 (old quantum theory) は，ボーア･ゾンマーフェルトの量子化条件に基づいている。それと断熱不変量の間には密接な関係がある。この問題では，高校の物理の知識を用いて，断熱不変量と量子化条件を考察する。

(I) 問題のこの部分は，京都大学の 1990 年度入試問題に出題されている。

(1) 微小時間 Δt にひもが $\Delta\theta$ だけ回転すれば，小球 P の変位の大きさ $|\Delta\vec{r}|$ は $r\,\Delta\theta$ であるから，接線速度の大きさは，$v = \left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = r\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$ となり，$\omega = \boxed{\dfrac{v}{r}}$ を得る。

(2) 小球の運動方程式の向心成分より，$f = \boxed{m\dfrac{v^2}{r}}$

(3) 回転半径が $r - \Delta r$ になったときの角速度 $\omega + \Delta\omega$ を，近似式を用いて変形すれば，

$$\omega + \Delta\omega = \frac{v+\Delta v}{r-\Delta r} = \frac{v}{r}\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)^{-1} \fallingdotseq \omega\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)$$

となる。微小量の積 $\Delta v \cdot \Delta r$ を無視すれば，$\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \boxed{\dfrac{\Delta v}{v}+\dfrac{\Delta r}{r}}$ を得る。

(4) 同様に，

$$E + \Delta E = \frac{1}{2}m\,(\,v+\Delta v\,)^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \fallingdotseq E\left(1+2\,\frac{\Delta v}{v}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta E}{E} = \boxed{2\,\frac{\Delta v}{v}}$$

(5) 仕事の定義と式 (2) より，$\Delta W \fallingdotseq f\,\Delta r = \boxed{\dfrac{mv^2}{r}\,\Delta r}$

(6) この仕事は小球 P の運動エネルギーの増加量になる。式で表せば，

$$\Delta E = \Delta W = mv^2\frac{\Delta r}{r} = 2\,E\,\frac{\Delta r}{r} \quad\longrightarrow\quad \frac{\Delta E}{E} = 2\,\frac{\Delta r}{r}$$

となる。これと式 (4) を比べれば，$\boxed{\dfrac{\Delta r}{r} = \dfrac{\Delta v}{v}}$ を得る。

(7) 式 (3) と式 (6) より，$\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = 2\dfrac{\Delta v}{v}$ が成り立つ。これと式 (4) より，$\boxed{\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \dfrac{\Delta E}{E}}$ を得る。

問 1　式 (7) と加比の理より，

$$\frac{E}{\omega} = \frac{\Delta E}{\Delta\omega} = \frac{E+\Delta E}{\omega+\Delta\omega}$$

が成り立つ。この式は，r がゆっくり変化する間，$\dfrac{E}{\omega}$ が一定に保たれることを表している。その一定量 C は次のようになる。

$$C = \frac{E}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{v\,/\,r} = \boxed{\frac{1}{2}m\,v\,r}$$

(注 1)

微積分を用いて $\dfrac{E}{\omega}$ = 一定 を証明してもよい。ΔE , $\Delta\omega$ を微分 $\mathrm{d}E$ $\mathrm{d}\omega$ に置き換えれば，

$\dfrac{\mathrm{d}E}{E} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$ が成り立つ。この両辺を積分して，積分定数を$\log C$とおけば，

$$\int \frac{\mathrm{d}E}{E} = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} \quad \longrightarrow \quad \log E = \log \omega + \log C \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{\omega} = C$$

となる。

(**II**)

(8) 小球 P に働く力の接線成分は $-mg\sin\theta$ であるから，運動方程式の接線成分は，

$$\boxed{m\,a = -mg\sin\theta}$$

(9) 小球 P の向心加速度は $\dfrac{v^2}{\ell}$ であるから，運動方程式の向心成分は，$\boxed{m\dfrac{v^2}{\ell} = f - mg\cos\theta}$

(10) (11) $x = \ell\ \sin\theta \fallingdotseq \ell\,\theta$ であるから，式 (8) と式 (9) は次のように書き換えられる。

$$m\,a_x = \boxed{-\frac{m\,g}{\ell}\,x} \qquad ①$$

$$f = \boxed{m\,\frac{v_x^2}{\ell} + m\,g\left(1 - \frac{x^2}{2\,\ell^2}\right)} \qquad ②$$

(12) 単振動する場合には，x，a_x と ω の間に，$a_x = -\omega^2\,x$ の関係が成り立つ。これと式 ① を比べれば，次のようになる。

$$\omega = \boxed{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} \qquad ③$$

(13) 復元力 $-\dfrac{m\,g}{\ell}\,x$ の位置エネルギーは $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m\,g}{\ell}\right)x^2$ であるから，式 ③ と問題文の式 ④ を用いれば，力学的エネルギーは次のように表される。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\,m\,v_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\,g}{\ell}\right)x^2 \\ &= \frac{1}{2}\,m\,(A\,\omega\ \sin\omega\,t)^2 + \frac{1}{2}(m\,\omega^2)\,(-A\ \cos\omega\,t)^2 = \boxed{\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2} \end{aligned} \qquad ⑤$$

(14) 題意より，時間的に一定な力 $< f >$ で $\Delta\ell$ だけ引き上げると考えてよいので，式 ②，式 ③，式 ④ を用いて，

$$\begin{aligned} \Delta W &= < f > \Delta\ell = \left\{\frac{m}{\ell} < v_x^2 > + m\,g - \frac{m\,g}{2\ell^2} < x^2 >\right\}\Delta\ell \\ &= \left\{\frac{m}{\ell}\,\frac{(A\omega)^2}{2} + m\,g - \frac{m\,\omega^2}{2\ell}\,\frac{A^2}{2}\right\}\Delta\ell \\ &= m\,g\,\Delta\ell + \boxed{\frac{1}{4}m\,\omega^2\,A^2\,\frac{\Delta\ell}{\ell}} \end{aligned} \qquad ⑥$$

を得る。

(15) 単振動のエネルギー E の変化量 ΔE は式 ⑥ の第 2 項に等しい。これと式 ⑤ を用いれば，次の関係式を得る。

$$\Delta E = \frac{1}{4}m\,\omega^2\,A^2\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{2}E\frac{\Delta\ell}{\ell} \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta E}{E} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell}} \qquad ⑦$$

(16)　式 ③ と近似式を用いれば，次のようになる。

$$\omega+\Delta\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell-\Delta\ell}}=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(1-\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^{-\frac{1}{2}}\fallingdotseq\omega\left(1+\frac{\Delta\ell}{2\ell}\right)$$

$$\rightarrow\quad\frac{\Delta\omega}{\omega}=\boxed{\frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell}}\qquad⑧$$

(17)　式 ⑦ と式 ⑧ より，次の関係式を得る。

$$\rightarrow\quad\frac{\Delta E}{E}=\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega}}\qquad⑨$$

(18)　**(I)** の問 1 の解答で示したように，式 ⑨ より，$\dfrac{E}{\omega}$ は断熱不変量 C となり，C は式 ⑤ より，

$$C=\frac{E}{\omega}=\boxed{\frac{1}{2}\,m\,A^2\,\omega}\qquad⑩$$

と表される。

(III)

(19)　問題文に与えられている式 ④ の 2 つの式より時刻 t を消去すれば，

$$1=\cos^2\omega\,t+\sin^2\omega\,t=\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{m\,v_x}{m\,A\,\omega}\right)^2$$

が成り立ち，点 $(\,x\,,\,p_x\,)$ の軌跡は図 3 の楕円になる。その面積は，

$$J=\pi\cdot A\cdot m\,A\,\omega=\boxed{\pi\,m\,A^2\,\omega}\qquad⑭$$

である。単振動が図 3 の点 a から始まって，楕円上を時計回りに a → b → c と半回転する半周期の間に，$p_x\,(x)$ が $(\,x\,,\,p_x\,)$ 面を掃く面積は楕円の上半分の面積で，さらに c → d → a と半回転する半周期の間に，$p_x\,(x)$ が $(\,x\,,\,p_x\,)$ 面を掃く面積は楕円の下半分の面積である。そして，1 周期の間に $p_x\,(x)$ は楕円の全面積を掃く。それが作用変数 J である。

問 2　式 ⑭ より，作用変数 J の単位は，$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ である。

一方，振動数 ν の光子のエネルギー E は $h\,\nu$ であるから，$h=E\,/\,\nu$ の単位は，

$$\mathrm{J}\ (\text{ジュール})\,/\,\mathrm{s}^{-1}=(\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,)\,/\,\mathrm{s}^{-1}=\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$$

となり，J の単位と一致する。

一般的に，この単位を持つ量を作用と言うので，プランク定数 h を，作用の最小量という意味で，作用量子とも言う。

(20)　式 ⑭ と問題文中の式 ⑪ より，単振動の量子化条件は，

$$\pi\,m\,A^2\,\omega=n\,h$$

となる。これと式 ⑤ より，単振動する小球 P の力学的エネルギーは，

$$E=\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2=\frac{\omega}{2}\,\frac{n\,h}{\pi}=\boxed{n\,\hbar\,\omega}\qquad⑫$$

と表され，離散的な値を取る。エネルギー準位は等間隔 $\hbar\,\omega$ で並んでいる。基底状態 ($n=0$) では，$x=0\,,\,v_x=0$ であるから，小球 P は図 2 の最下点 H で静止している。

(21)　小球 P が 1 回転するとき，回転角 θ が 0 から 2π まで変化し，その間に角運動量 $p_\theta(\theta)$ が，図 4 の陰影を施した長方形の面積 ：

$$J = 2\pi \cdot m v r$$

を掃く。ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件より，

$$J = n h$$

であるから，これら 2 式より，角運動量 L_n は，

$$L_n = m v r = \frac{J}{2\pi} = \boxed{n \hbar} \qquad ⑬$$

となり，離散的な値を取る。

問 3　小球 P のド・ブロイ波の波長 λ は $\dfrac{h}{m v}$ であるから，半径 r の円周上にド・ブロイ波の定常波が生じる条件は，

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{m v} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

である。これより，

$$m v r = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

が導かれ，式 ⑬ と一致する。高校の物理教育では，ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を導入すると負担が大きくなるので，ド・ブロイ波による量子化条件を代用している。

(**注 2**)　上記の p_x, p_θ を，位置を表す変数 x, θ の共役運動量という。共役運動量の定義には解析力学が必要となるので，ここでは説明しない。(x, p_x) や (θ, p_θ) のような座標面（位相空間）で，粒子の運動が一周期の間に閉じた曲線を描くときに，ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件が適用される。ただし，図 4 では $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ は同じと見なす。

(**注 3**)　今年 (2026 年) は，量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式が論文に発表されてから丁度 100 年になる。単振動にシュレーディンガー方程式を適用すれば，粒子のエネルギーは離散的な値 ：

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を取るという結果を得る。ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件から得られる式 ⑫ とは $\dfrac{1}{2}\hbar\omega$ だけずれている。そのために，基底状態 ($n = 0$) で粒子は静止しない。

ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を用いれば，$x = 0$ で $p_x = 0$ となることは可能であるが，これは，位置座標 x とその共役運動量 p_x が同時に確定値を取ることはできない，という不確定性原理に反する。前期量子論は古典論から量子論に至る過渡的な理論なのである。

他の演習問題へ