

問題 4 飛行時間型質量分析器とイオン線形加速器

静電場内での荷電粒子の運動を利用した器機は、物理の応用と実験の分野に数多く見られる。ここでは表題の二つの器機について考察する。

(A) 図 1 は飛行時間型質量分析器の原理を説明するための概念図である。A と B は導体板で、A の表面に目的とする粒子 P を含む試料が塗布されている。これにレーザー光を照射すると、帯電した粒子 P が飛び出してくる。その質量を m 、帯電量を q とする。ここでは $q > 0$ とする。

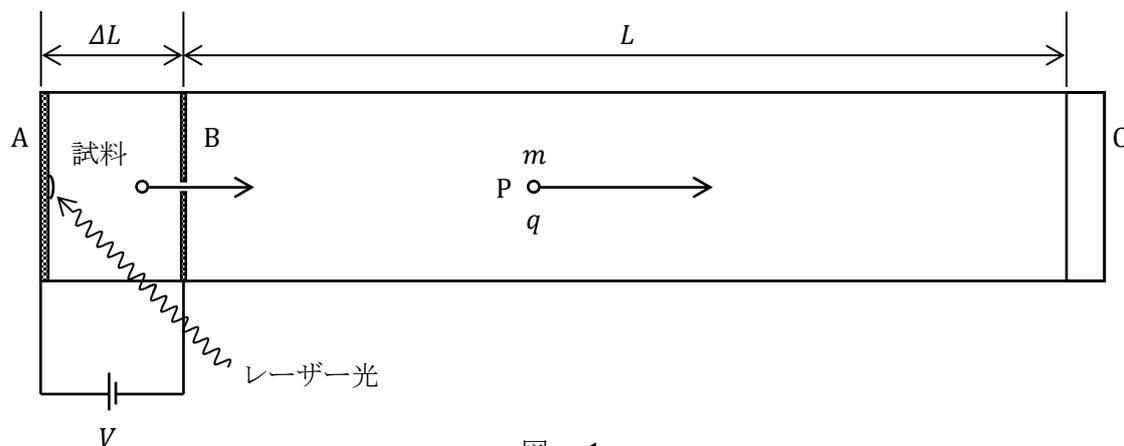


図 1

AB 間には図 1 のように電圧 V がかけられている。試料から飛び出した荷電粒子 P は AB 間の一様電場で加速されたあと、B に開けられた小さな穴を通り抜け、検出器 C に向かう。BC 間には電場がないので、P は等速直線運動する。A と B の間隔は ΔL で、B と C の間隔は L である。P は真空中を飛行し、P にはたらく重力は無視できる。簡単のために、A を飛び出すときの P の速さは無視できるとする。

(1) P が A から C まで飛行する時間を、 $m, q, V, \Delta L, L$ を用いて表せ。

粒子の飛行時間に比べて十分短い時間だけレーザー光を試料に照射する。この時刻を $t = 0$ とする。検出器 C は時刻 t に衝突した荷電粒子の数を検出する。

荷電粒子 P が分子量 M の分子イオンの場合には、原子質量単位を u 、電気素量を e として、 $m = Mu$ 、 $q = Ze$ ($Z = 1, 2, 3, \dots$) と表される。

(2) 分子量が M と $M + \Delta M$ の 2 種類の高分子が混ざった試料があり、レーザー光を照射すると、いずれも $Z = 1$ の高分子イオンになるとする。これら 2 種類の高分子イオンが C に衝突する時刻

の差を求めよ。ただし、 $\Delta M \ll M$ とし、 $|\varepsilon| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ を

用いて近似計算をせよ。

(3) (2) において、 $M = 50\,000$ 、 $\Delta M = 1$ とし、これら 2 種類の仮想的な高分子イオンを分別するために、検出器が見分けなければならない飛行時間差はいくらか。電卓を用いて数値計算をし、

有効数字 2 桁で答えよ。ただし、

$$u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

であり、この設問にかぎり、

$$V = 3.0 \times 10^3 \text{ V}, \Delta L \ll L = 1.0 \text{ m}$$

とする。

図 2 は、1 種類の高分子を含む試料を測定したときに、検出器 C で得られたデータである。横軸はイオンの飛行時間 t で、単位は μs ($= 10^{-6} \text{ s}$) である。縦軸は検出されたイオンの個数である。 $t = 4.6 \mu\text{s}$ のところに見られるピークは、不純物として試料に含まれていたナトリウムの 1 価イオン Na^+ であることがわかっている。

(4) 飛行時間 t が $148.0 \mu\text{s}$ のところに見られるピークは $Z = 1$ の高分子イオンによるものである。その分子量はいくらか。ただし、ナトリウムの原子量は 23 である。

また、 $t = 104.6 \mu\text{s} \cong \frac{148.0}{\sqrt{2}} \mu\text{s}$ と $t = 209.3 \mu\text{s} \cong \sqrt{2} \times 148.0 \mu\text{s}$ に見られる 2 つのピークは、

それぞれどのようなイオンによるものと推測できるか。

イオンの検出個数

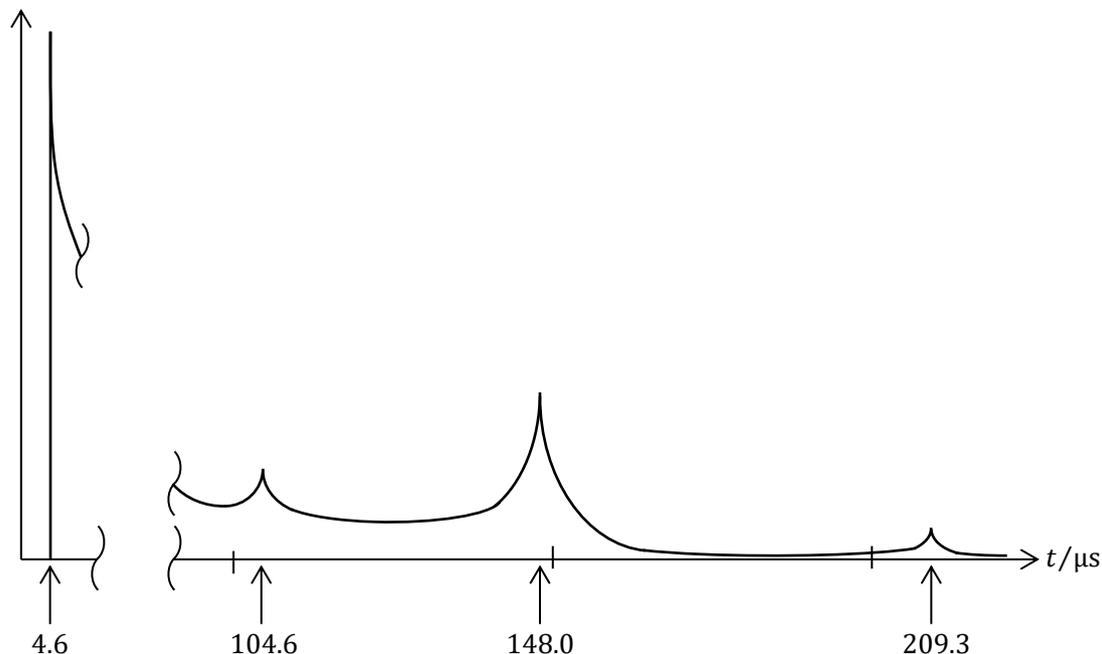


図 2 検出イオンの飛行時間と検出個数の関係
(信号だけを取り出し、雑音は均してある)

(B) 図3はイオン線形加速器の原理を説明するための概念図である。

真空中に、長さが異なる円筒形の電極 $C_0, C_1, \dots, C_N, C_{N+1}$ が設置されている。それらには、図に示すように、周波数 f の交流電源がつながれている。電源の端子 A に対する端子 B の電位差を $V(t)$ とする。円筒電極の内部には電場はなく、隣り合う電極間の狭い隙間にだけ電場がある。イオン源 IS を速さ v_0 で出た陽イオンは、円筒電極の中心軸に沿って進み、隙間を通過するときと同じ右向き電場によって加速される。その結果、陽イオンのエネルギーは隙間を通過するたびに大きくなり、最終的に C_{N+1} から出てきたときには、原子核を破壊できるほどの高エネルギーになる。電極 C_n ($n = 1, 2, \dots, N$) の長さを ℓ_n とする。

ある瞬間に、質量 m 、電荷 q ($q > 0$) のイオン P が C_{n-1} の右端を速さ v_{n-1} で通過したとする。このとき C_n に対する C_{n-1} の電位が V_S ($V_S > 0$) だけ高くなっているために、P は加速され、 C_n の左端で速さが v_n になったとする。

(1) v_n を v_{n-1}, m, q, V_S を用いて表せ。ただし、P が隙間を通過する時間は短く、その間、電位差 V_S は一定と見なせるものとする。

P が速さ v_n で円筒 C_n の中を通り抜けて、 C_n と次の円筒電極 C_{n+1} との隙間でまた同じ右向き加速を受けるとすれば、電源の周波数 f と v_n, ℓ_n はある関係式を満たさなければならない。

(2) その関係式を満たす f のうち最小のものを求めよ。ただし、隙間を通過する時間は無視できるものとする。

具体例として、 $N = 30, f = 7.0 \times 10^6 \text{ Hz}, V_S = 4.2 \times 10^4 \text{ V}$ の線形加速器で水銀の 1 価イオン Hg^+ ($m = 3.3 \times 10^{-25} \text{ kg}, q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) を加速する場合を考える。以下に問われている数値は電卓を用いて計算せよ。

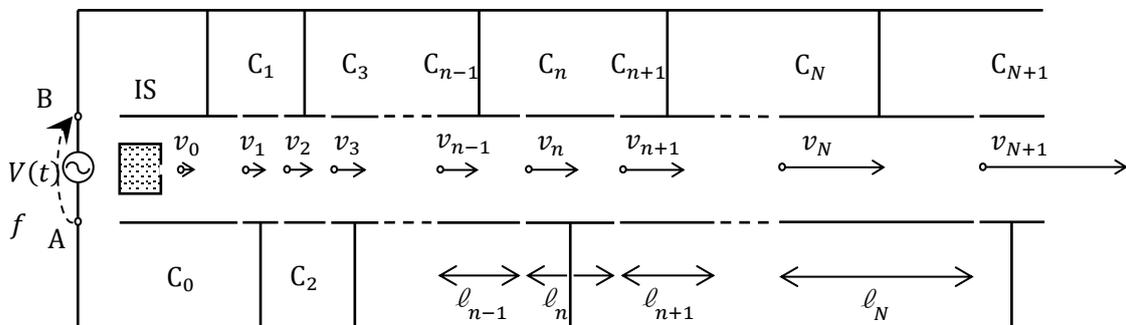


図 3

イオン源から飛び出すときの Hg^+ のエネルギー $\frac{1}{2} m v_0^2$ は、円筒電極 C_{31} から出てくるときのエネルギー $\frac{1}{2} m v_{31}^2$ に比べて十分に小さいので、以下では $\frac{1}{2} m v_0^2 = 0$ と見なす。このとき、

- (3) $\frac{1}{2} m v_{31}^2$ の値はいくらか。
 (4) 円筒電極 C_1 と C_{30} の長さ ℓ_1 と ℓ_{30} の値はいくらか。

イオン源から微小時間の間だけイオンが飛び出して来るようにすると、これらのイオンは集団となって、線形加速器の中心軸に沿って進む。

いま、設問 (1) と (2) で求めた関係式を満たすイオン P_S が、 C_{n-1} の右端を通り過ぎる時刻 $t = t_S$ のときに、電源電圧 $V(t)$ が V_S であれば、イオン P_S は順調に加速されて C_{N+1} から外に速さ v_{N+1} で飛び出していく。

ところが、集団として進むイオンの中には、イオン P_S より時間的に少し早く、あるいは少し遅く、 C_{n-1} の右端を通り過ぎるイオンがある。そのためイオンの集団がばらけてしまう場合もあるし、逆に、すべてのイオンがイオン P_S の運動に近づき、集団がばらけることなく、安定した一つの塊として進む場合もある。どちらになるかは、 $V(t) = V_S$ となる時刻 t_S が、図 4 の (a) の場合か、あるいは (b) の場合かによる。

- (5) 集団がばらけないのは、(a) と (b) のどちらの場合か。

イオン P_S よりわずかに早く $t = t_S - \Delta t$ のときに、 C_{n-1} の右端を通り過ぎるイオンを例にとり、その理由を述べよ。

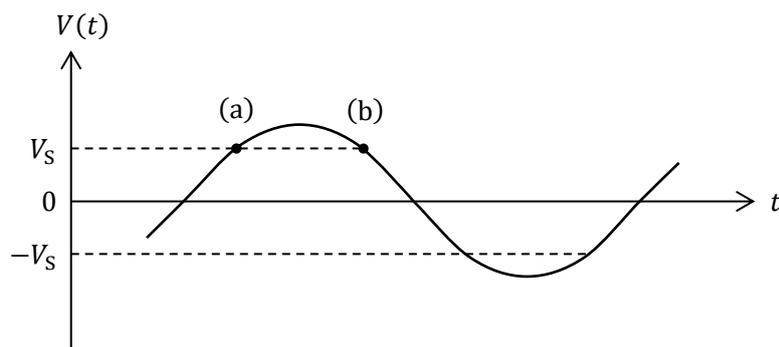


図 4

問題 4 の解答と解説

(A) (1) AB 間の一様電場の強さ E は $\frac{V}{\Delta L}$ であるから, AB 間での P の加速度 a は, 運動方程式より,

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{m\Delta L}$$

となる。AB 間の飛行時間を t_{AB} , B の小穴を通過するときの P の速さを v_B とすると,

$$\Delta L = \frac{1}{2} a t_{AB}^2 = \frac{qV}{2m\Delta L} t_{AB}^2, \quad v_B = a t_{AB} = \frac{qV}{m\Delta L} t_{AB}$$

が成り立つ。これらより,

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2m}{qV}} \Delta L, \quad v_B = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

を得る。BC 間の飛行時間 t_{BC} は,

$$t_{BC} = \frac{L}{v_B} = \sqrt{\frac{m}{2qV}} L$$

であるから, AC 間の飛行時間 t は,

$$t = t_{AB} + t_{BC} = \sqrt{\frac{m}{2qV}} (2\Delta L + L) \quad \text{①}$$

と表される。

さまざまな分子イオンに対して, 同じ装置で同じ電圧 V をかけて実験をすれば, その飛行時間 $t(Z, M)$ は次のように表される。

$$t(Z, M) = C \sqrt{\frac{M}{Z}} \quad \text{②}$$

$$C = \sqrt{\frac{1u}{2eV}} (2\Delta L + L)$$

(2) 2つの高分子イオンの飛行時間の差 Δt は, 式②より,

$$\Delta t = t(1, M + \Delta M) - t(1, M) = C \sqrt{M} \left\{ \left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}$$

$$\cong \sqrt{\frac{Mu}{2eV}} (2\Delta L + L) \frac{\Delta M}{2M} \quad \text{③}$$

(3) $\Delta L = 0$ として, 与えられた数値を式③に代入すれば,

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sqrt{\frac{50\,000 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 3.0 \times 10^3 \text{ V}}} \times 1 \text{ m} \times \frac{1}{2 \times 50\,000} \\ &= 2.94 \times 10^{-9} \text{ s} = \boxed{2.9 \text{ ns}} \end{aligned}$$

となる。もっと大きな分子量の高分子イオンを同定するためには、これより高い時間分解能が必要となる。

分子イオンの $\frac{M}{Z}$ の値と飛行時間 t の関係は、図 1 のような簡単な構造の質量分析器なら、式②のように計算できるが、実際の分析器では、精度の高い関係式を理論計算によって求めるのはむずかしい。そのため、 $\frac{M}{Z}$ の値がわかっている分子イオンの飛行時間を測定することによって、その関係式の較正をしている。

(4) 未知の分子量を M_0 として、 $Z = 1$ の高分子イオンとナトリウムイオンの飛行時間の比を式②より求めれば、

$$\frac{t(1, M_0)}{t(1, 23)} = \sqrt{\frac{M_0}{23}}$$

となる。測定データの値は、 $t(1, M_0) = 148.0 \mu\text{s}$ 、 $t(1, 23) = 4.6 \mu\text{s}$ であるから、

$$M_0 = 23 \times \left(\frac{148.0}{4.6} \right)^2 = \boxed{2.4 \times 10^4}$$

となる。

つぎに、 $t = 104.6 \mu\text{s}$ に見られるピークが、 $Z = Z_1, M = M_1$ の高分子によるとして、 $M = M_1$ と $M = M_0$ の高分子イオンの飛行時間の比を、式②より求めれば、

$$\frac{t(Z_1, M_1)}{t(1, M_0)} = \sqrt{\frac{M_1}{Z_1 M_0}}$$

となる。測定データよりこの比の値を求めれば、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。よって、

$$\frac{M_1}{Z_1} = \frac{M_0}{2}$$

を得る。このとき、可能な組み合わせとして、

$$(i) \quad Z_1 = 1, \quad M_1 = \frac{1}{2} M_0 \qquad (ii) \quad Z_1 = 2, \quad M_1 = M_0$$

$$(iii) \quad Z_1 = 3 \text{ 以上の奇数}, \quad M_1 = \frac{Z_1}{2} M_0 \quad (iv) \quad Z_1 = 4 \text{ 以上の偶数}, \quad M_1 = \frac{Z_1}{2} M_0$$

が考えられるが、(ii) の可能性が高い。これは、分子量 M_0 の高分子 (これをモノマーと呼ぶ) が、レーザー光の照射によって、電子を 2 つ剥ぎ取られたのである。電子を 1 つ剥ぎ取られる確率より小さくなるが、起こり得る。(iv) の場合は、モノマーが 2 つ、3 つ、 \dots とくっついてポリマーとなり、それらから電子が 4 つ、6 つ、 \dots 剥ぎ取られたとすればつじつまは合うが、その確率は小さい。(i) と (iii) の場合は、レーザー光を照射されたモノマーが真っ二つになる必要がある。よほど特殊な構造をもつ高分子でなければ、このような分裂は起こり得ない。よって、答えの一例は、

「電子を 2 つ失った分子量が 2.4×10^4 の高分子イオン、と推測される。」

最後に、 $t = 209.3 \mu\text{s}$ に見られるピークが、 $Z = Z_2, M = M_2$ の高分子イオンによるとして、同様の計算をすれば、

$$\frac{M_2}{Z_2} = 2 M_0$$

を得る。可能な組み合わせとして、

$$(i) \quad Z_2 = 1, \quad M_2 = 2 M_0 \quad (ii) \quad Z_2 = 2 \text{ 以上の整数}, \quad M_2 = 2 Z_2 M_0$$

が考えられるが、(i) の可能性が高い。これは、モノマーが 2 つくっついたもの (これをダイマーという) が、レーザー光の照射によって、電子を 1 つ剥ぎ取られたものである。モノマーが 4 つくっついたポリマーから電子が 2 つ剥ぎ取られる確率は 0 ではないかもしれないが、その可能性は低い。さらに Z_2 が増えると、ますますその可能性は低くなる。よって、答えの一例は、

「分子量が 2.4×10^4 の高分子が 2 つくっついたものから、電子が 1 つ剥ぎ取られた高分子イオン、と推測される。」

(余談)

飛行時間型質量分析器は、田中耕一のノーベル化学賞受賞で一躍有名になったが、分析器そのものは昔からある。田中耕一の功績は、試料にレーザー光を照射したときに、高分子を破壊することなくイオン化する方法を発見したことである。高分子と金属微粒子をアセトンの溶媒で混合して試料を作っていたのであるが、あるとき間違ってグリセリンに混ぜてしまった。金属微粒子は高価で捨てるのがもったいないので、試しに実験に用いたところ、他のいくつかの偶然も重なって、高分子の分子量を測定することに成功したという(田中耕一:「生涯最高の失敗」,朝日新聞社,2003年,138頁)。

似たような話は、白川英樹:「私の歩んだ道—ノーベル化学賞の発想」(朝日新聞社,2001年,83頁)にもある。アセチレンモノマーからフィルム状のポリアセチレンを作る方法は、間違っただけで触媒の量を千倍多くしてしまったことから見つかったらしい。これが受賞対象となった「導電性高分子の発見と開発」の端緒になったという。

もう一つ似たような話を思い出した。1950年代後半に、ソニーがラジオ用に開発した高周波トランジスタは、エミッター側の添加不純物としてリンを多く含むもので、性能もよかったのだが、実際に製品に組み入れてみると不良品が多く出るという歩留り問題が生じた。その原因を探っていたときに、江崎玲於奈は、リンの濃度が高い P-N 接合ダイオードに現れる異常な電流-電圧特性が、トンネル効果に起因することを突き止めた。そして、この現象を利用したエサキ・ダイオードを発明した。これによって、江崎玲於奈は日本人として 3 人目のノーベル物理学賞受賞者となったのである。

当たり前のことながら、4 匹目のドジョウを狙って、滅茶苦茶な実験をしても滅茶苦茶な結果に終わるだけで、下手をすれば事故につながる。大切なことは、実験や観測でなにか異常な結果が出て来たときに、その原因をとことん追究するしつこさと、それがなにかの役に立ちそうなどときには、その適用対象を嗅ぎ付ける視野の広さであろう。

(B) (1) 隙間を通過するとき、イオン P の電氣的位置エネルギーが $q V_S$ だけ減少し、それが運動エネルギーの増加となるので、

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{2} m v_{n-1}^2 + q V_S \quad \text{①}$$

が成り立つ。これより、 v_n は次のようになる。

$$v_n = \sqrt{v_{n-1}^2 + \frac{2 q V_S}{m}}$$

(2) C_n に対する C_{n-1} の電位差が V_S になっている時刻から、 i を非負の整数として、 $\left(i + \frac{1}{2}\right)$

周期経過すると、 C_n に対する C_{n-1} および C_{n+1} の電位差は $-V_S$ になる。よって、このときイオン P が C_n の右端にあれば、 C_n と C_{n+1} の隙間を通過するとき、行き先の C_{n+1} の方が電位が V_S だけ低くなっているため、イオン P は C_{n-1} と C_n の隙間での加速と同じ加速を受ける。イオン P が C_n を通過する時間は ℓ_n / v_n であるから、 f と v_n 、 ℓ_n の間に成り立つべき関係式は、

$$\left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{f} = \frac{\ell_n}{v_n}$$

である。これを満たす最小の f は、 $i = 0$ の場合で、

$$f = \frac{1}{2} \frac{v_n}{\ell_n} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad \text{②}$$

となる。

(3) 隙間を通過するごとに、 Hg^+ の運動エネルギーは $q V_S$ だけ増加し、隙間の数 $(N + 1)$ は 31 であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{31}^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 + 31 \cdot q V_S & \text{③} \\ &\equiv 0 + 31 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 4.2 \times 10^4 \text{ V} \\ &= 1.30 \text{ MeV} \quad (1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}) \\ &= \boxed{2.1 \times 10^{-13} \text{ J}} \end{aligned}$$

となる。

(補注) この実験は 1931 年に、E.O. Lawrence と助手の D.H. Sloan によって行なわれた。陽子がこれぐらいのエネルギーで小さな原子核に衝突すれば原子核反応が起こるが、水銀イオンは質量が大きいので、小さな原子核に衝突するとき、重心系から見たエネルギーは小さく、原子核反応は起こらない。

(4) 式③の 31 を n に置き換えれば、

$$v_n = \sqrt{v_0^2 + \frac{2 n q V_S}{m}}$$

$$\cong \sqrt{\frac{2 n q V_S}{m}} \quad (n = 1, 2, \dots, 31)$$

を得る。よって、式②より、

$$\ell_n = \frac{v_n}{2f} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{n q V_S}{2 m}} \quad (n = 1, 2, \dots, 30)$$

となる。 $n = 1$ と 30 のときは、

$$\ell_1 = \frac{1}{7.0 \times 10^6 \text{ Hz}} \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 4.2 \times 10^4 \text{ V}}{2 \times 3.3 \times 10^{-25} \text{ kg}}} = 1.4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\ell_{30} = \sqrt{30} \times \ell_1 = 7.9 \times 10^{-2} \text{ m}$$

となる。

(補注) ちなみに、円筒電極の全長 ℓ は、

$$\ell = \ell_1 (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{30}) = 1.62 \text{ m}$$

である。仮に、 N, f, V_S を変えずに、イオンを Hg^+ から陽子 H^+ に変えれば、円筒電極の全長は、

$$\ell(\text{H}^+) = \ell(\text{Hg}^+) \sqrt{\frac{m(\text{Hg}^+)}{m(\text{H}^+)}} = 1.62 \text{ m} \times \sqrt{200} = 23 \text{ m}$$

となる。1931年当時では、このような長さの装置は論外と考えられたようである。さらにエネルギーを高めるために、 N を大きくする場合のことを考えればなおさらである。もし、 f が 1 桁大きい高周波電源があればよかったのであるが、当時の技術では、 $f = 7 \text{ MHz}$ が限度であった。

このような事情があったので、Lawrence は直線円筒電極を半円形にし、その中をイオンが等速円運動するように磁場をかければよいことに気がついた。こうすれば円筒電極は不要になる。サイクロトロン の登場である。誰でも思い付きそうなことであるが、それはコロンブスの卵である。最初に作られたのは、直径が 10 cm ほどのおもちゃのようなサイクロトロンであったが、高電圧技術に長じていた助手の M.S. Livingston が直径 27.5 cm のサイクロトロンを完成させた。彼らは、これを使って陽子を加速し、原子核反応を起こさせることに成功した。この業績によって、Lawrence は 1939 年のノーベル物理学賞を受賞した。

(5) 答は (a) の場合 である。

イオン P_S より時間的に少し早く、 $t = t_S - \Delta t$ のときに C_{n-1} の右端を通り過ぎるイオン P_a には、図 4 の (a) の場合、 V_S より少し小さい電圧による電場がかかる。そのため、このイオンの C_{n-1} と C_n の隙間での加速がイオン P_S より小さくなる。よって、 P_a の P_S に対する相対加速度は負となり、相対速度が減少する。そのため、 C_n の中を移動している間に P_a は P_S に少しだけ追い付かれ、 C_n の右端に達する時刻の差が Δt より小さくなる。これが繰り返されると、 P_a が P_S と同時に隙間に到達する状態に近づく。

逆に、イオン P_S より時間的に少し遅く、 $t = t_S + \Delta t$ のときに C_{n-1} の右端を通り過ぎるイオン P_b は、 P_S に対する相対加速度が増加し、 P_S の運動に追い付こうとする。

図 4 の (b) の場合は、逆のことが起こり、イオン P_a と P_b の運動はイオン P_S の運動から遠ざかるので、集団はばらけてしまう。

(余談)

サイクロトロン以降、加速器はより高いエネルギーを目指して、巨大化と高精度化の道をたどり、素粒子の根源を探る研究に多大な貢献をしてきた。

現在、日本の研究者たちが計画している加速器は I L C (International Linear Collider) と呼ばれており、電子と陽電子をそれぞれ長さ 11 km の線形加速器で逆向きに加速し、2 つの経路が交わるところで正面衝突させる。衝突のエネルギーは当初 500GeV を想定していたが、日本学術会議の所見を考慮して、目的達成にギリギリの 250GeV に変更された。建設場所は北上山地が予定されている。

ところが、この加速器はあまりにも巨大で、実際に建設するとなると日本一国ではできそうにない。そこで国際的に協力して建設する計画が進められているのだが、そのための ILC 準備研究所には予算が付かなかった。前途多難である。

具体的に、いつごろ、だれが責任者となって、どこに、どのような規模の ILC を、どのような費用分担で建設するのか、正式には何も決まっていないのに、世界中で二千人ぐらいの研究者と技術者が、加速器本体と周辺器機の開発研究に携わっているらしい。素粒子の標準理論を超える領域の研究には、必要不可欠な実験装置であるから、いつの日か必ず実現するとは思いますが、残念ながら筆者が生きている間は無理かもしれない。

[他の演習問題へ](#)