

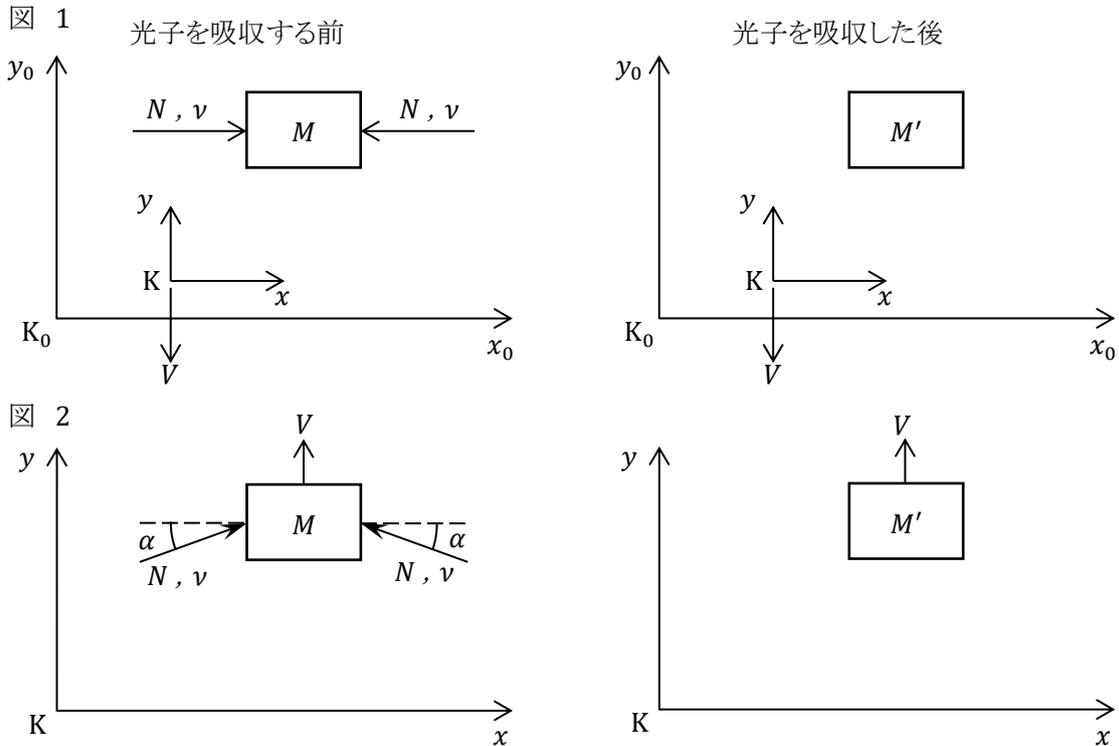
問題 39 質量とエネルギーの等価性および太陽と核融合炉での原子核反応

光速度を c , プランク定数を h として, 以下の を適切な数式で埋め, 間に答えよ。

I 図 1 のように, 慣性系 K_0 に質量 M の物体が静止しており, 左右から N 個の光子が入射して物体に吸収される場合を考える。その光の振動数は ν である。 x_0 軸の正の向きあるいは負の向きに入射した N 個の光子は, 物体に大きさが (1) の力積を与えるが, 両者の向きが逆であるために, 物体は静止したまま動かない。一方, 左右から合わせて $2N$ 個の光子を吸収することによって, 物体が得るエネルギー E は,

$$E = \text{ } \quad \text{ (2) } \quad \text{ ①}$$

である。その結果, 物体の質量が M から M' に変化したとする。



この現象を y_0 軸の負の向きに速さ V で移動する慣性系 K から見ると, 次のようになる。物体の速度は, 図 2 のように, 光子を吸収する前も吸収した後も, y 軸の正の向きに速さが V となる。 x_0 方向に伝わる光を y_0 方向に移動しながら見るので, ドップラー効果は生じず, K 系から見た光の振動数は ν のまま変わらない。しかし, 光が伝わる方向は, 光行差のために, 図 2 のように, x_0 方向からずれる。 $V \ll c$ の場合にはそのずれ角 α は小さく,

$$\alpha \cong \sin \alpha = \text{ } \quad \text{ (3) } \quad \text{ ②}$$

と表される。

光を吸収する前後で、物体と光子の全運動量の y 成分が保存される。それを $M, M', V, N, h, c, \nu, \alpha$ を用いて表せば、

$$M' V = \boxed{\quad} \quad (4) \quad \text{③}$$

となる。式 ①, ②, ③ より、光子の吸収による物体の質量の増加量 ΔM を、 E と c を用いて表せば、

$$\Delta M = \boxed{\quad} \quad (5)$$

となる。この式は質量とエネルギーが等価であることを表している。

II 太陽の中心近傍では、主に次のような一連の原子核反応によって、4 つの陽子 ${}^1_1\text{H}$ から 1 つの α 粒子 ${}^4_2\text{He}$ が合成され、その際に生じる熱エネルギーによって太陽は輝き続ける。



ただし、 e^+ は陽電子、 ν_e は電子ニュートリノ、 γ はガンマ線光子である。

問 1 4 つの陽子から 1 つの α 粒子が合成されるとき、 α 粒子以外の粒子がそれぞれいくつ生成されるか。

問 2 そのとき、核反応 (i) (ii) (iii) で発生する熱エネルギーの和 Q は何 J か。ただし、 ${}^1_1\text{H}$, ${}^4_2\text{He}$, e^+ の質量を原子質量単位 u で測った値はそれぞれ、1.00728, 4.00151, 0.00055 であり、 $1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ である。 ν_e の質量は無視できるほど小さい。

核反応 (i) (ii) (iii) が起こるためには、関与する原子核が大きなクーロン斥力に抗して、互いに接触するほどに近づかなければならない。そのためには、これらの原子核と電子から成る電離気体は高温・高密度したがって高圧力でなければならない。そのような圧力を可能にしているのは太陽自身の重力である。

問 3 太陽の中心近傍で核反応 (i) (ii) (iii) を起こすことができる領域の中にある水素の全質量は、太陽の質量 $M_\odot (= 2.0 \times 10^{30} \text{ kg})$ の 10% 程度であると見積もられている。この水素がすべてヘリウムに変換されれば、発生する熱エネルギー H は何 J になるか。

問 4 現在、太陽が宇宙空間に放射している単位時間当たりのエネルギー L_\odot は $3.8 \times 10^{26} \text{ J/s}$ である。仮に、このエネルギー放射率が変化することなく、核反応 (i) (ii) (iii) が可能な領域内の水素がすべてヘリウムに変換されるとすれば、太陽はあと何億年輝き続けるか。ただし、1 億年は $3.15 \times 10^{15} \text{ s}$ である。

III 現在、世界の核融合実験炉では、発生させることが比較的容易で、かつ効率的な核反応：



によって熱エネルギーを取り出そうとしている。重水素核 ${}^2_1\text{H}$ は海水から無尽蔵に得られるが、三重水素（トリチウム）核 ${}^3_1\text{H}$ は、半減期が 12.3 年の β 崩壊を起こすので、自然界にはほとんど存在しない。そこで、核融合炉内にリチウムを入れておき、炉内で発生する中性子と次の核反応：



を起こさせて、トリチウムを炉内で生成している。

核反応 (iv) と (v) に関与する原子核 ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$ の結合エネルギーは、それぞれ 2.2 MeV, 8.5 MeV, 28.3 MeV, 32.0 MeV である。

問 5 核反応 (iv) の Q 値は何 MeV か。 Q 値とは、核反応に関与する原子核の運動エネルギーの和の増加量である。

核反応 (iv) は、クーロン斥力に抗して、 ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ が接触するほどに近づいたときに起こる。そのためには、反応前の ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ に大きな運動エネルギーを与えなければならない。

重心系において、一直線上を逆向きに進む ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ の中心間距離が r になったときに、両者が一瞬静止するとしよう。この場合、

問 6 接近前に両者が遠く離れていたときの ${}^2_1\text{H}$ の運動エネルギー E_d を、 r と電気素量 e 、クーロンの法則の比例係数 k_e を用いて表せ。ただし、 ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ の質量の比は 2 : 3 としてよい。

最接近距離 r が 2×10^{-15} m 程度になれば、無視できない確率で ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ は合体し、核反応 (iv) を起こす。このとき、

問 7 反応後に飛び出してくる中性子 ${}^1_0\text{n}$ の運動エネルギーは α 粒子 ${}^4_2\text{He}$ の運動エネルギーの何倍か。有効数字 1 桁で答えよ。

いま、重水素とトリチウムの混合電離気体が温度 T の熱平衡状態にあるとする。このとき ${}^2_1\text{H}$ の運動エネルギーの平均値は $\frac{3}{2} k_B T$ に等しい。ただし、 k_B はボルツマン定数で、その値は 1.4×10^{-23} J/K である。

問 8 ${}^2_1\text{H}$ の運動エネルギーの平均値が問 6 で求めた E_d に等しいとして、重水素の電離気体の温度 T を、 k_B , k_e , e , r を用いて表せ。これより、 $r = 1 \times 10^{-14}$ m であるときの T の値を有効数字 1 桁で求めよ。 e と k_e の値は、それぞれ 1.6×10^{-19} C, 9.0×10^9 Nm²/C² である。

この温度では、平均の運動エネルギーをもつ ${}^2_1\text{H}$ が核反応(iv)を起こす確率は小さい。しかしながら、熱平衡状態にある電離気体では、 $r \sim 2 \times 10^{-15} \text{ m}$ となるような大きな運動エネルギーを持つ ${}^2_1\text{H}$ がわずかではあっても存在し、それらが核反応(iv)を起こす。

微量のトリチウムを含む重水素の温度をこのような高温にすることによって核融合反応を起こさせる炉を熱核融合炉という。高温の電離気体が直接炉の内壁に接すると内壁を損傷するので、ドーナツ形の真空容器内に、ドーナツ形の強い磁場を生じさせ、その磁場に巻き付くようならせん運動をさせて、 ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ を炉内に閉じ込める。

核反応(iv)で生成される高エネルギーの中性子は、帯電していないので、直進して容器の内壁に衝突する。それによる損傷を防ぐために、容器の内壁はリチウムを含む物質で覆われている。高エネルギーの中性子はリチウムと相互作用をして、リチウムを熱すると同時に、核反応(v)によって ${}^3_1\text{H}$ を生成する。その ${}^3_1\text{H}$ は炉外へ排出され、加速器で加速されたあと炉内に戻される。炉内に入るとき、 ${}^3_1\text{H}$ は一旦電氣的に中性にされ、高速度のトリチウム原子となつてらせん運動している ${}^2_1\text{H}$ に吹き付けられる。その結果、核反応(iv)が起こり、連鎖的に核融合反応が進む。

問9 加速された ${}^3_1\text{H}$ を ${}^2_1\text{H}$ に吹き付ける前に、 ${}^3_1\text{H}$ を一旦電氣的に中性にする理由はなにか。

問10 核反応(v)のQ値は何MeVか。

核反応(iv)と(v)で発生した熱エネルギーが、その連鎖反応を起こさせるのに要したエネルギーより大きくなれば、実用炉が可能となる。

問題 39 の解答と解説

I アインシュタインの名を冠した最も有名な公式 $E = m c^2$ を、アインシュタイン自身が初等的な方法で導出している。この問題はその論文：

「質量とエネルギーの等価性の初等的証明」、アインシュタイン選集 1, 51 頁(共立出版)に基づいている。ただし、電磁波の運動量 P とエネルギー E の関係を表す式 $P = E/c$ をアインシュタインはマックスウェル方程式から導かれる式としているが、ここでは光子の運動量 $P = h \nu / c$ とエネルギー $E = h \nu$ の関係式として作問した。

(1) N 個の光子が物体に及ぼす力積の大きさ

$$= \text{吸収される前に } N \text{ 個の光子が持っていた運動量の大きさ} = \boxed{N \frac{h \nu}{c}}$$

(2) 物体が得たエネルギー E

$$= \text{吸収される前に } 2N \text{ 個の光子が持っていたエネルギー} = \boxed{2N h \nu} \quad \text{①}$$

(3) 鉛直に落下する雨滴を歩きながら見ると、前方斜め上から落下するように見えるのと同じで、 $V \ll c$ の場合には、

$$\alpha \cong \sin \alpha = \boxed{\frac{V}{c}} \quad \text{②}$$

と表される (注 1)。

(4) y 方向の運動量保存則より、次の式が成り立つ。

$$M' V = \boxed{M V + 2 \frac{N h \nu}{c} \sin \alpha} \quad \text{③}$$

(5) 式 ①, ②, ③ より、次の式を得る。

$$\Delta M = M' - M = \frac{2 N h \nu}{c^2} = \boxed{\frac{E}{c^2}}$$

(注 1)

慣性系 K_0 において、 y_0 軸の正の向きに対して角度 ϕ だけ傾いた方向に、振動数 ν の光が伝播しているとする。特殊相対論によれば、この光を y_0 方向に速度 v で移動する慣性系 K' から見ると、その振動数 ν' と伝播する方向 ϕ' は、

$$\nu' = \nu \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right) \cos \phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \cos \phi' = \frac{\cos \phi - \frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right) \cos \phi}$$

で与えられる。したがって、本問のように、 $\phi = \frac{\pi}{2}$, $v = -V$ のときでもドップラー効果が生じ、

$$\nu' = \nu / \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \text{ となるのだが、} \left(\frac{V}{c}\right)^2 = 0 \text{ と見なせる場合には、} \nu' \cong \nu \text{ となる。}$$

またこのとき、 $\cos \phi' = \frac{V}{c}$ であるが、本問では $\phi' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ であるから $\sin \alpha = \frac{V}{c}$ となる。

II 問題文に与えられている一連の核反応を p - p chain (陽子-陽子連鎖反応) という。これが太陽のエネルギー源の大部分を占める。

問1 陽子から α 粒子が合成される過程で副次的に現れる ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_2\text{He}$ を, $2 \times (\text{i}) + 2 \times (\text{ii}) + (\text{iii})$ によって消去すれば,



を得る。よって, 4 つの陽子から 1 つの α 粒子が合成されるとき, 陽電子, 電子ニュートリノ, ガンマ線光子がそれぞれ 2 つずつ生成される。

陽電子は電子と結合して 2 つの γ 線光子になる。 γ 線光子は周囲の電子や原子核と相互作用をしてその温度を維持し, 余った熱エネルギーは, 放射や対流によって, 徐々に太陽表面へ運ばれる。

電子ニュートリノは他の粒子とほとんど相互作用をせず, 中心近傍から太陽内部を素通りして宇宙空間へ放射される。そのエネルギー流量は, 太陽表面から主に可視光として放射されるエネルギー流量の数 % 程度である。

問2 粒子 X の質量を $m(X)$ で表すと, 反応式 (vi) で減少する質量 Δm は,

$$\begin{aligned} \Delta m &= 4 \times m({}^1_1\text{H}) - \{ m({}^4_2\text{He}) + 2 \times m(e^+) + 2 \times m(\nu_e) \} \\ &= 0.02651 \text{ u} = 4.40 \times 10^{-29} \text{ kg} \end{aligned}$$

となる。この質量欠損と等価なエネルギーが核反応 (vi) で発生する熱エネルギーになるので,

$$Q = \Delta m c^2 = \boxed{3.96 \times 10^{-12} \text{ J}}$$

となる。

(注 2)

$m({}^2_1\text{H}) = 2.01355 \text{ u}$, $m({}^3_2\text{He}) = 3.01548 \text{ u}$ を用いて, 核反応 (i)(ii)(iii) で発生する熱エネルギーを別々に計算すれば, それぞれ,

$$Q_{\text{i}} = 0.69 \times 10^{-13} \text{ J}, \quad Q_{\text{ii}} = 7.99 \times 10^{-13} \text{ J}, \quad Q_{\text{iii}} = 22.25 \times 10^{-13} \text{ J}$$

となる。よって, $2 \times (\text{i})$ と $2 \times (\text{ii})$ と (iii) で発生する熱エネルギーの和である Q は,

$$Q = 2Q_{\text{i}} + 2Q_{\text{ii}} + Q_{\text{iii}} = 39.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

となり, 核反応 (vi) で発生する熱エネルギーと一致する。

問3 前問で求めた Q は 4 つの陽子から取り出される熱エネルギーと考えられるので,

$$H = \frac{Q}{4} \frac{M_{\odot} \times 0.1}{m({}^1_1\text{H})} = \frac{3.96 \times 10^{-12} \text{ J}}{4} \frac{2.0 \times 10^{29} \text{ kg}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = \boxed{1.2 \times 10^{44} \text{ J}}$$

問4 太陽が輝き続ける時間を T とすれば,

$$T = \frac{H}{L_{\odot}} = \frac{1.2 \times 10^{44} \text{ J}}{3.8 \times 10^{26} \text{ J/s}} = 3.1 \times 10^{17} \text{ s} = \boxed{100 \text{ 億年}}$$

となる。太陽系の年齢は 46 億年と考えられているので, 太陽はいま寿命の半ばにある。

(参考) 陽子から α 粒子を合成する連鎖反応には, (i)(ii)(iii) 以外に次のようなものがある。
 (i)(ii) までは同じであるが, (iii) に進まずに, 少し発生確率は小さくなるが,



によって, α 粒子を合成するのである。この他にも ${}^1_1\text{H}$ から ${}^4_2\text{He}$ を合成する連鎖反応があるが, 太陽で発生している熱エネルギーのほぼすべてが, 連鎖反応 (i)(ii)(iii) と (i)(ii)(vii)(viii)(ix) によって発生する。

III まず, 原子核の結合エネルギーと質量エネルギー (静止エネルギー) の関係について述べる。

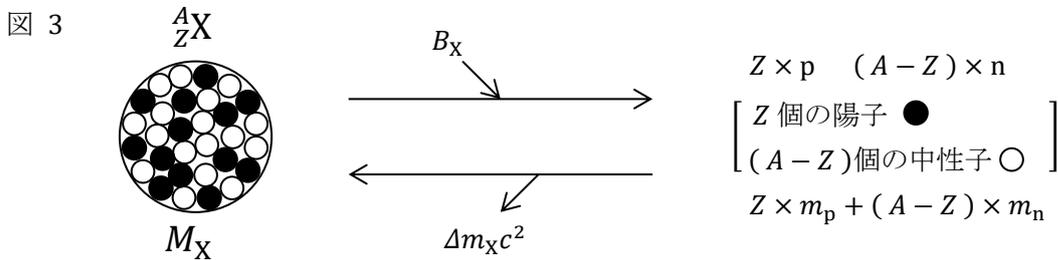


図 3 のように, 原子番号 Z , 質量数 A の原子核 ${}^A_Z\text{X}$ を, ばらばらの Z 個の陽子 p と $(A-Z)$ 個の中性子 n にするのに必要な最小のエネルギーを原子核 ${}^A_Z\text{X}$ の結合エネルギーと言い, B_X で表す。逆に, Z 個の陽子 p と $(A-Z)$ 個の中性子 n を結合させてもとの原子核 ${}^A_Z\text{X}$ に戻すと, 質量が Δm_X だけ減少し, それと等価なエネルギー $\Delta m_X c^2$ が放出される。エネルギー保存則より,

$$B_X = \Delta m_X c^2 = [\{ Z m_p + (A-Z) m_n \} - m_X] c^2$$

が成り立つ。ただし, m_p, m_n, m_X はそれぞれ, 陽子, 中性子, 原子核 ${}^A_Z\text{X}$ の質量である。よって, ${}^2_1\text{H}, {}^3_1\text{H}, {}^4_2\text{He}, {}^6_3\text{Li}$ の結合エネルギーは, それぞれ次のように表される。

$$B_d = (m_p + m_n - m_d) c^2$$

$$B_t = (m_p + 2m_n - m_t) c^2$$

$$B_\alpha = (2m_p + 2m_n - m_\alpha) c^2$$

$$B_{\text{Li}} = (3m_p + 3m_n - m_{\text{Li}}) c^2$$

問5 核反応で発生する熱エネルギーは関与する粒子の質量エネルギーの減少量に等しいから, 核反応 (iv) の反応熱 Q_{iv} は

$$\begin{aligned} Q_{\text{iv}} &= (m_d c^2 + m_t c^2) - (m_\alpha c^2 + m_n c^2) \\ &= \{ (m_p c^2 + m_n c^2 - B_d) + (m_p c^2 + 2m_n c^2 - B_t) \} \\ &\quad - \{ (2m_p c^2 + 2m_n c^2 - B_\alpha) + m_n c^2 \} \\ &= B_\alpha - (B_d + B_t) \end{aligned}$$

となり, 核反応に関与する原子核の結合エネルギーの和の増加量に等しい。よって,

$$Q_{\text{iv}} = 28.3 \text{ MeV} - (2.2 \text{ MeV} + 8.5 \text{ MeV}) = \boxed{17.6 \text{ MeV}}$$

問6 互いに遠く離れているときの ${}^2_1\text{H}$ と ${}^3_1\text{H}$ の速さをそれぞれ v_d , v_t とすれば, 運動量保存則より, $m_d v_d - m_t v_t = 0$ が成り立つので, 両者の運動エネルギーの和は,

$$\frac{1}{2} m_d v_d^2 + \frac{1}{2} m_t v_t^2 = E_d \frac{m_t + m_d}{m_t} \cong \frac{5}{3} E_d$$

と表される。両者が一瞬静止したときのクーロン力による位置エネルギーは $k_e \frac{e^2}{r}$ であるから, エネルギー保存則より,

$$\frac{5}{3} E_d = k_e \frac{e^2}{r} \quad \rightarrow \quad E_d = \boxed{\frac{3 k_e e^2}{5 r}}$$

を得る。

問7 飛び出してくる中性子と α 粒子の速さをそれぞれ v_n , v_α とすれば, 運動量保存則より, $m_n v_n - m_\alpha v_\alpha = 0$ が成り立つので,

$$\frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{(m_n v_n)^2}{2 m_n} = \frac{(m_\alpha v_\alpha)^2}{2 m_n} = \frac{m_\alpha}{m_n} \left(\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \right)$$

となり,

$$\frac{1}{2} m_n v_n^2 / \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{m_\alpha}{m_n} \cong \boxed{4}$$

となる。よって, 核反応(iv) によって発生した熱エネルギー Q_{iv} のうち, $\frac{4}{5} Q_{iv} = 14.1 \text{ MeV}$ を中性子が担い, 残りの 3.5 MeV を α 粒子が担う。ただし, これらは重心系から見たときのエネルギーである。

問8 題意より,

$$\frac{3}{2} k_B T = E_d = \frac{3 k_e e^2}{5 r}$$

が成り立つ。これより,

$$T = \boxed{\frac{2 k_e e^2}{5 k_B r}} = \frac{2 \times 9.0 \times 10^9 \text{ Jm} / \text{C}^2 \times (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{5 \times 1.4 \times 10^{-23} \text{ J} / \text{K} \times 1 \times 10^{-14} \text{ m}} \cong \boxed{7 \times 10^8 \text{ K}}$$

を得る。途轍もない高温であるが, 外部から高エネルギー粒子を衝突させるか, 電子レンジのように, 高周波の電磁波で ${}^2_1\text{H}$ を振動させることによって可能となる。

問9 炉内にはドーナツ形の強い磁場があるので, 流入した ${}^3_1\text{H}$ はローレンツ力を受けて跳ね飛ばされ, 磁場内の ${}^2_1\text{H}$ に近づくことができない。 ${}^3_1\text{H}$ が中性のトリチウム原子になれば, ローレンツ力を受けないので, ${}^2_1\text{H}$ に高速で近づくことができる。そして, ${}^2_1\text{H}$ と相互作用をすることによって電離し, ${}^2_1\text{H}$ にエネルギーを与えると同時に, 核反応 (iv) を起こすことができるからである。

問10 問5と同様にして,

$$\begin{aligned} Q_v &= (B_t + B_\alpha) - B_{\text{Li}} \\ &= (8.5 \text{ MeV} + 28.3 \text{ MeV}) - 32.0 \text{ MeV} \\ &= \boxed{4.8 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

を得る。反応式 (iv) と (v) の和を取れば,

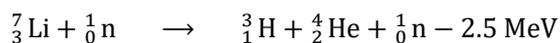


となり、リチウムと重水素から 2 つの α 粒子が生じたことがわかる。生成された高速の α 粒子は、熱の吸収板に衝突して運動エネルギーを失ったあと、炉外へ排出される。

(余談)

海水中の重水 HDO とリチウムの存在比率はそれぞれ 150 ppm , 0.17 ppmである。重水素 D (Deuterium) を海水から取り出す技術は確立しているが、Li を安価に取り出す技術はこれからの課題で、現在開発競争の真最中にある。

リチウムには安定な同位体 ${}^6_3\text{Li}$ と ${}^7_3\text{Li}$ があり、それらの存在比は 0.076 : 0.924 である。 ${}^7_3\text{Li}$ に中性子を照射すると、核反応 :



が起こるが、この核反応は吸熱反応である。 ${}^7_3\text{Li}$ を核融合炉内に入れておくと、他の核反応で生じた熱エネルギーを奪うが、 ${}^3_1\text{H}$ の生成には寄与する。しかしながら、この核反応が起こる確率は非常に小さい。

他の演習問題へ