

### 問題 38 中性子の発見と中性子波の干渉実験

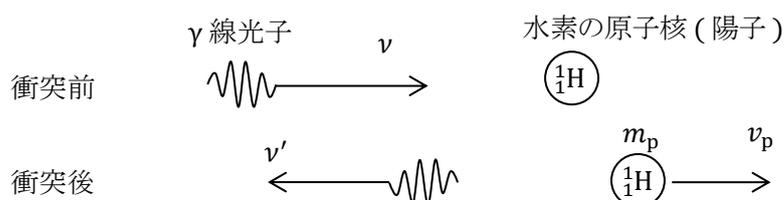
光速度を  $c$  , プランク定数を  $h$  , 陽子の質量を  $m_p$  とし,  $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$  として, 次の文中の  を適切な数式または数値で埋めよ。

#### I 中性子の発見

1930年, W.Bothe と H.Becker は, ポロニウムから放射される  $5.4 \text{ MeV}$  の  $\alpha$  線をベリリウムに照射すると, 透過力の強い放射線が発生することを発見した。電磁場をかけても曲がらないので, この放射線は帯電していない。その正体が判明するまで, この放射線はベリリウム線と呼ばれていた。

1931年, I. Joliot-Curie と F. Joliot は, 水素を豊富に含むパラフィンにベリリウム線を照射すると, 高エネルギーの陽子が飛び出してくることを発見した。そのエネルギーの最大値は  $4.5 \text{ MeV}$  であった。彼らは, ベリリウム線は  $\gamma$  線であると考え, 図 1 のように,  $\gamma$  線光子が静止している水素の原子核  ${}^1_1\text{H}$  に正面衝突をして, 逆向きに跳ね返されるときに, 陽子が最大のエネルギーで飛び出すと考えた。

図 1



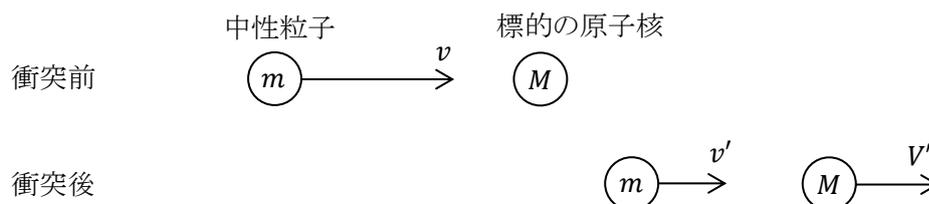
衝突前後の  $\gamma$  線の振動数を  $\nu$  ,  $\nu'$  とし, 衝突後の陽子の速さを  $\nu_p$  とすれば, 運動量保存則より  (1) が成り立ち, エネルギー保存則より,  (2) が成り立つ。これら 2 式より  $\nu'$  を消去して, 入射  $\gamma$  線光子のエネルギー  $E_\gamma$  を,  $c$  ,  $m_p$  ,  $\nu_p$  を用いて表せば,  $E_\gamma =$   (3) となる。 $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$  を用いて,  $E_\gamma$  の値を求めれば,  $E_\gamma =$   (4)  $\text{ MeV}$  となる。

この値は, 当時知られていた核反応で発生する  $\gamma$  線光子のエネルギーに比べれば, 異常に大きく, その理由は謎であった。

1932年, その謎を解明するために, J.Chadwick は, ベリリウム線照射の標的原子核として,  ${}^1_1\text{H}$  とは別に  ${}^{14}_7\text{N}$  を加え, ジョリオ-キュリーとジョリオの実験と同じベリリウム線を用いて再現実験を行った。その結果, 飛び出してきた  ${}^1_1\text{H}$  の最大エネルギーは  $5.7 \text{ MeV}$  で,  ${}^{14}_7\text{N}$  の最大エネルギーは  $1.4 \text{ MeV}$  であった。 ${}^{14}_7\text{N}$  の質量を  $14 m_p$  として,  $\gamma$  線と仮定した照射ベリリウム線のエネルギーを求めると, 標的が  ${}^1_1\text{H}$  の場合は  (5)  $\text{ MeV}$  で,  ${}^{14}_7\text{N}$  の場合は  (6) となる。同じ  $\gamma$  線であるのに, 標的によってエネルギーが異なるという矛盾が生じた。

そこでチャドウィックは、ベリリウム線は  $\gamma$  線ではなく、質量  $m$ 、速さ  $v$  の中性粒子であると考え、図 2 のように、その中性粒子が静止している標的原子核  ${}^1_1\text{H}$  あるいは  ${}^{14}_7\text{N}$  に正面衝突するときに、それらが最大の速さで飛び出すとした。標的原子核の質量を  $M$ 、衝突後の速さを  $V'$  とし、中性粒子の衝突後の速度を  $v'$  とすると、運動量保存則より (7) が成り立ち、エネルギー保存則より (8) が成り立つ。これらより  $v'$  を消去して  $V'$  を求めれば、 $V' =$  (9) を得る。

図 2



実験の結果、標的の原子核が  ${}^1_1\text{H}$  ( $M = m_p$ ) のときに  $V' = 3.3 \times 10^7$  m/s となり、標的の原子核が  ${}^{14}_7\text{N}$  ( $M \approx 14 m_p$ ) のときに  $V' = 4.7 \times 10^6$  m/s となることがわかった。これより中性粒子の質量  $m$  と陽子の質量  $m_p$  の比を求めると、 $m / m_p =$  (10) となる。また、 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$  kg を用いて、入射する中性粒子のエネルギーの値を求めると (11) MeV となり、異常な値ではなくなる。この実験によって、ベリリウム線が中性粒子であることが受け入れられ、この中性粒子は中性子と呼ばれるようになった。

中性子は陽子とともに原子核を構成する基本粒子であると見なされ、原子核の構造が論じられるようになる。また、中性子を原子核に衝突させて、核反応を起こさせたり、結晶に照射して、電子線回折と同様に、物質の結晶構造を調べるのに使われるようになる。

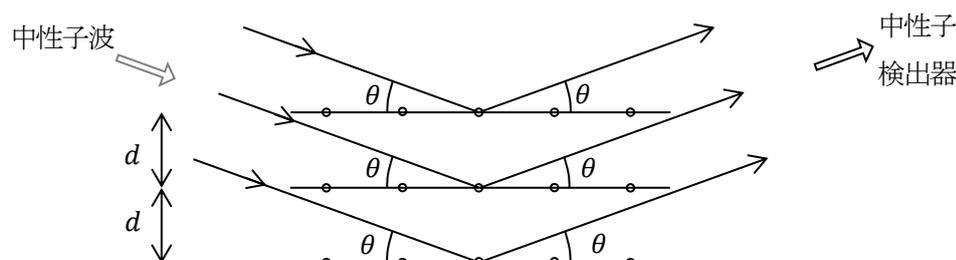
なお現在では、 $m / m_p$  の値は 1.00137... であることがわかっている。

## II 中性子波の干渉実験

質量  $m$ 、速さ  $v$  の中性子に付随するド・ブロイ波 (中性子波) の波長  $\lambda$  は、 $\lambda = \frac{h}{mv}$  で与えられる。

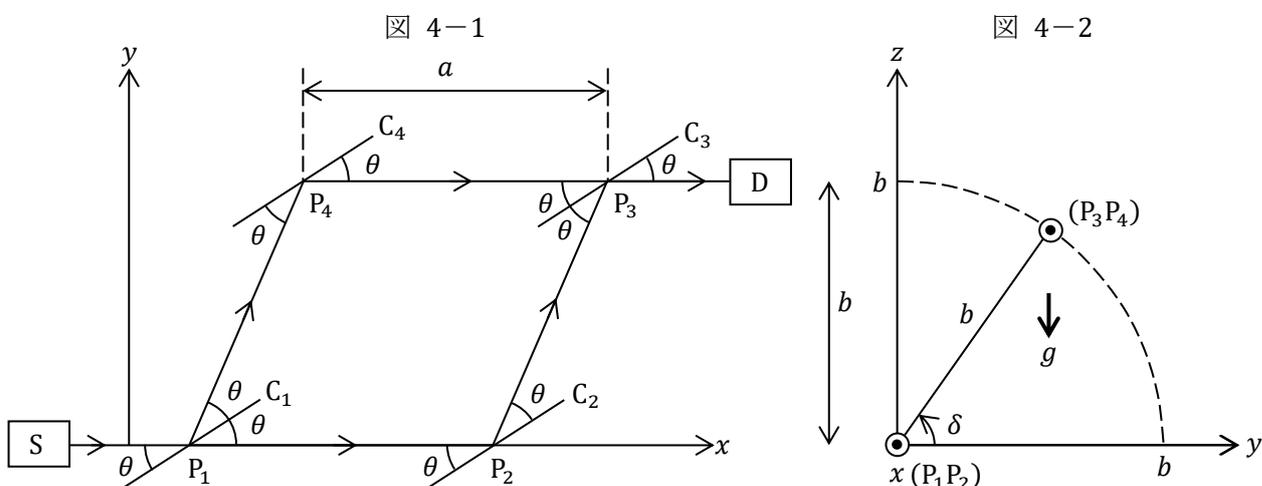
図 3 のように、この中性子波が原子面間隔  $d$  の結晶に、原子面と角度  $\theta$  をなす方向から入射し、角度  $\theta$  で反射する場合、角度  $\theta$  を変化させると、正整数を  $n$  として、 $\lambda$ 、 $d$ 、 $\theta$ 、 $n$  の間に関係式 (12) が成り立つときに、中性子波は強く反射され、その方向で検出される中性子の数が極大となる。

図 3



たとえば、 $d = 1.40 \times 10^{-10} \text{ m}$  の結晶 C で、 $\theta = 30^\circ$  のときに  $n = 1$  の強い反射が検出されたとすれば、その中性子波の波長  $\lambda_0$  は (13) m で、それに対応する中性子の速さ  $v_0$  は (14) m/s となる。ただし、 $h = 6.60 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、 $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  とする。

図 4-1 は中性子波の干渉計で、中性子源 S を出た中性子波は、水平な  $xy$  平面上を 2 つの経路  $S P_1 P_2 P_3 D$  と  $S P_1 P_4 P_3 D$  に沿って進み、検出器 D で重なって干渉を起こす。 $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は結晶板  $C_i$  上の点で、 $C_1$  と  $C_3$  は上述の結晶 C で作られた薄い結晶板で、入射する中性子波の一部を反射し、残りを透過させる。 $C_2$  と  $C_4$  は結晶 C で作られた厚い結晶板で、入射する中性子波を全反射する。4 枚の結晶板は  $xy$  平面に垂直で、いずれも  $x$  軸と角度  $\theta$  だけ傾いており、 $P_1 P_2 P_3 P_4$  は平行四辺形をなす。辺  $P_1 P_2$  と辺  $P_3 P_4$  の長さは  $a$  で、これら 2 辺の間隔は  $b$  である。



ここで、中性子源 S から上述の速さ  $v_0$  の中性子 (波長  $\lambda_0$  の中性子波) を放出すると、検出器 D に向かう 2 つの中性子波の間に位相差がないので、これらは D で重なって強め合い、多くの中性子が検出される。

次に、図 4-2 のように、この装置全体を  $x$  軸のまわりに角度  $\delta$  ( $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ ) だけ回転させると、経路  $P_4 P_3$  にある中性子は経路  $P_1 P_2$  にある中性子より重力の位置エネルギーが大きくなり、経路  $P_4 P_3$  を移動するときの中性子の速さ  $v$  は、 $v =$  (15) となる。ただし、重力加速度の大きさを  $g$  とする。そのため、検出器 D に向かう 2 つの中性子波の間に位相差  $\Delta\phi$  が生じる。 $g b \ll v_0^2$  を仮定し、 $|x| \ll 1$  のときに成り立つ近似式  $\sqrt{1-x} \cong 1 - \frac{1}{2}x$  を用いて、 $\delta = \frac{\pi}{2}$  のときの  $\Delta\phi$  を、 $h, m, \lambda_0, a, b, g$  で表せば、 $\Delta\phi =$  (16) となる。

具体例として、 $\frac{m^2 g}{h^2} = 6.25 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$ 、 $a b = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  で、 $\lambda_0$  の値が設問 (13) で求めた値であるとき、 $\delta$  を 0 から  $\frac{\pi}{2}$  まで変化させれば、D で検出される中性子の数は増減を繰り返し、その途中で極大となる回数は (17) 回となる。ただし、 $\delta = 0$  のときの極大は回数に含めない。

問題 38 の解答と解説

I 中性子の発見

(1) (2)  $\gamma$  線光子の衝突前後の運動量の大きさは  $\frac{h\nu}{c}$ ,  $\frac{h\nu'}{c}$  で、エネルギーは  $h\nu$ ,  $h\nu'$  であるから、

$$\text{運動量保存則より, } \boxed{\frac{h\nu}{c} = -\frac{h\nu'}{c} + m_p v_p} \quad \text{①}$$

$$\text{エネルギー保存則より, } \boxed{h\nu = h\nu' + \frac{1}{2} m_p v_p^2} \quad \text{②}$$

が成り立つ。

(3) (4) 式①と式②より  $h\nu'$  を消去して、 $h\nu$  を求めれば、

$$\begin{aligned} E_\gamma = h\nu &= \boxed{\frac{1}{2} \left( m_p v_p c + \frac{1}{2} m_p v_p^2 \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{m_p v_p^2 \cdot m_p c^2} + \frac{1}{2} m_p v_p^2 \right) \end{aligned} \quad \text{③}$$

となる。式③に与えられた数値を代入すれば、次のようになる。

$$E_\gamma = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 \times 4.5 \text{ MeV} \times 938 \text{ MeV}} + 4.5 \text{ MeV} \right) = \boxed{48} \text{ MeV}$$

(5) 式③の  $\frac{1}{2} m_p v_p^2$  にチャドウィックが実験で得た値 5.7 MeV を代入すれば、

$$\text{標的が } {}^1_1\text{H} \text{ の場合: } E_\gamma = \boxed{55} \text{ MeV}$$

となる。陽子の最大エネルギーが、ジョリオ-キュリーとジョリオの実験とチャドウィックの実験で異なる理由は不明である。いずれにしても、得られた  $E_\gamma$  の値は当時の常識からすれば、異常に大きな値である。

(6) 式③の  $m_p$  と  $v_p$  を  ${}^{14}_7\text{N}$  の質量  $m_N$  と速さ  $v_N$  に置き換え、 $\frac{1}{2} m_N v_N^2 = 1.4 \text{ MeV}$ ,  $m_N \doteq 14 m_p$  を代入すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{標的が } {}^{14}_7\text{N} \text{ の場合: } E_\gamma &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{m_N v_N^2 \cdot m_N c^2} + \frac{1}{2} m_N v_N^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 \times 1.4 \text{ MeV} \times 14 \times 938 \text{ MeV}} + 1.4 \text{ MeV} \right) = \boxed{97} \text{ MeV} \end{aligned}$$

(7) (8) (9) 運動量保存則とエネルギー保存則より、

$$\boxed{m v = m v' + M V'} \quad \text{④}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V'^2} \quad \text{⑤}$$

を得る。これらより  $V'$  と  $v'$  を求めれば、

$$V' = \boxed{\frac{2m}{m+M} v} \quad \text{⑥}$$

$$v' = \boxed{\frac{m-M}{m+M} v} \quad \text{⑦}$$

となる。式⑤の代りに、反発係数  $e$  を 1 として、 $e$  の定義式：

$$-1 = \frac{V' - v'}{0 - v}$$

を立て、これと式④を連立させて、 $V'$  と  $v'$  を求めてもよい。

(10) 標的が  ${}^1_1\text{H}$  のとき、 $M = m_p$ 、 $V' = V_p$  とすれば、式⑥より、

$$V_p = \frac{2m}{m + m_p} v \quad \text{⑧}$$

を得る。同様に、標的が  ${}^{14}_7\text{N}$  のとき、 $M = m_N \equiv 14 m_p$ 、 $V' = V_N$  とすれば、式⑥より、

$$V_N = \frac{2m}{m + 14m_p} v \quad \text{⑨}$$

を得る。式⑧と式⑨より  $v$  を消去して、 $m/m_p$  を求めれば、

$$\frac{m}{m_p} = \frac{14V_N - V_p}{V_p - V_N}$$

となる。これに与えられた数値を代入すれば、次のようになる。

$$\frac{m}{m_p} = \frac{14 \times 4.7 \times 10^6 \text{ m/s} - 33 \times 10^6 \text{ m/s}}{33 \times 10^6 \text{ m/s} - 4.7 \times 10^6 \text{ m/s}} = 1.16 \equiv \boxed{1.2} \quad \text{⑩}$$

(11) 次に、式⑧を用いて、入射中性粒子のエネルギーを求めると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} m \left( \frac{m + m_p}{2m} \right)^2 V_p^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{m_p} \left( \frac{m/m_p + 1}{2m/m_p} \right)^2 m_p V_p^2 \\ &= \frac{1}{8} \times 1.16 \times \left( \frac{2.16}{1.16} \right)^2 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \times (3.3 \times 10^7 \text{ m/s})^2 \\ &= 9.14 \times 10^{-13} \text{ J} = \boxed{5.7} \text{ MeV} \end{aligned}$$

となる。(補注)

## II 中性子波の干渉実験

この問題は京都大学の2021年度の入試問題を参考にして作成した。ただし、問題文は少し書き換えてある。

(12) ある原子面で反射された中性子波のとそれより一段下の原子面で反射された中性子波の経路差は  $2d \sin \theta$  である。反射による位相のずれは同じであるから、これら2つの中性子波が重なって強め合う条件は、

$$\boxed{2d \sin \theta = n \lambda} = n \frac{h}{m v} \quad \text{⑪}$$

となる。これが満たされておれば、すべての原子面で角度  $\theta$  で反射された中性子波が強め合い、その方向に反射される中性子の数が多くなる。

(13) (14) 式⑪に与えられた数値を代入して  $\lambda_0$  と  $v_0$  を求めれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{2 \times 1.40 \times 10^{-10} \text{ m} \times \sin 30^\circ}{1} = \boxed{1.40 \times 10^{-10}} \text{ m} \\ v_0 &= \frac{h}{m \lambda_0} = \frac{6.60 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 1.40 \times 10^{-10} \text{ m}} = \boxed{2.82 \times 10^3} \text{ m/s} \end{aligned}$$

(注) この速さは核反応の世界では低速で、このような中性子を遅い中性子 (あるいは熱中性子) という。たとえば、 $E_n = 5.7 \text{ MeV}$  のベリリウム線の速さ  $v$  は、 $\frac{1}{2} m v^2 = E_n$  より、

$$v = \sqrt{\frac{2 E_n}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 5.7 \times 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 3.3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

である。これに比べれば  $v_0$  の値がいかに小さいかがよくわかるであろう。温度が  $50^\circ \text{C}$  程度の水素原子を多く含む物質に、核反応で生じた速い中性子を打ち込むと、水素原子と衝突を繰り返して徐々にエネルギーを失い、最終的に  $v_0$  ぐらいの遅い中性子になる。

(15) 中性子に対する力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g b \sin \delta = \frac{1}{2} m v_0^2$$

が成り立つ。これより  $v$  を求めれば、次のようになる。

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 g b \sin \delta} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2 g b}{v_0^2} \sin \delta} \quad (12)$$

(16) 経路  $P_4 P_3$  を伝播する中性子波の波長  $\lambda$  は、式 (12) を用いて、

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{h}{m v_0} / \sqrt{1 - \frac{2 g b}{v_0^2} \sin \delta} \equiv \lambda_0 / \left( 1 - \frac{g b}{v_0^2} \sin \delta \right)$$

と表される。中性子波が経路  $P_1 P_2$  を伝播するときの波数  $a / \lambda_0$  と経路  $P_4 P_3$  を伝播するときの波数  $a / \lambda$  に差が生じ、位相差  $\Delta \phi$  が生じる。よって、 $\delta = \frac{\pi}{2}$  のとき、2 つの中性子波の位相差は、

$$\Delta \phi = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} - 2\pi \frac{a}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{g b}{v_0^2} \right) \right\} = \frac{2\pi a g b}{\lambda_0 v_0^2}$$

となる。 $\lambda_0 = \frac{h}{m v_0}$  を用いて、 $v_0$  消去すれば、

$$\Delta \phi = \frac{2\pi m^2 g a b \lambda_0}{h^2}$$

となる。

(17)  $\delta = 0$  から回転角を大きくして、D で測定される中性子の数が  $k$  回目に極大になるときの回転角を  $\delta_k$  とすれば、

$$\frac{2\pi m^2 g a b \lambda_0}{h^2} \sin \delta_k = 2\pi k$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} \sin \delta_k &= \frac{h^2}{m^2 g a b \lambda_0} k = \frac{k}{6.25 \times 10^{13} \text{ m}^{-3} \times 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \times 1.40 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ &= \frac{k}{8.75} \end{aligned}$$

を得る。 $0 < \sin \delta_k \leq 1$  であるから、 $0 < k \leq 8$  となる。よって、回転角  $\delta$  が  $0$  から  $\frac{\pi}{2}$  まで変化する間に、D で検出される中性子の数は  $\boxed{8}$  回極大となる。

(参考)

この実験によって、素粒子の中性子和天体の地球が重力の相互作用をしていることが実証されたことになる。実際の実験については、

R.Colella and A.W.Overhauser : Observation of Gravitationaly Induced Quantum Interference, Phys. Rev. Lett. 34, pp1472-1474, 1975

にその記述がある。

重力場の代りに回転座標系で遠心力が働く場合に、同様の実験を行い、中性子波の干渉が確認できれば、一般相対論の基礎をなす " 等価原理 " が量子現象に対しても成り立つことになり、有意義な実証実験となる。

(補注)

ベリリウム線が発生する核反応式は、

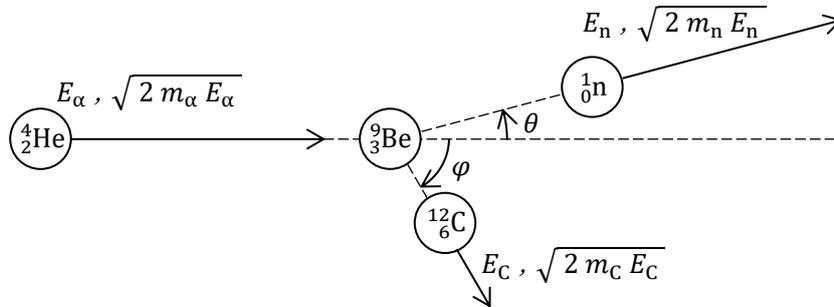


である。原子核  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^9_4\text{Be}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$  の核子 1 個あたりの結合エネルギーの値は、それぞれ、7.07 MeV, 6.46 MeV, 7.68 MeV である。よって、Q 値 (反応熱) は、

$$Q = 12 \times 7.68 \text{ MeV} - (4 \times 7.07 \text{ MeV} + 9 \times 6.46 \text{ MeV}) = 5.74 \text{ MeV} \quad (\text{ii})$$

となる。この値がチャドウィックの実験から推測されるベリリウム線 (中性子) のエネルギー (設問 (11)) 5.7 MeV に近いのは奇妙である。なぜなら、もしこれが正しいとすると、入射  $\alpha$  線のエネルギーは 0 に近くなければならず、 $E_\alpha = 5.4 \text{ MeV}$  という測定値に反するからである。

核反応 (i) によって、 ${}^{12}_6\text{C}$  と  ${}^1_0\text{n}$  の飛び出す向きが次図のようになっているとする。



ただし、粒子  $i$  の質量を  $m_i$ 、運動エネルギーを  $E_i$  とし、運動量の大きさを  $\sqrt{2m_i E_i}$  で表している。このとき、運動量保存則とエネルギー保存則より、

$$\sqrt{2m_\alpha E_\alpha} = \sqrt{2m_n E_n} \cos \theta + \sqrt{2m_C E_C} \cos \phi \quad (\text{iii})$$

$$0 = \sqrt{2m_n E_n} \sin \theta - \sqrt{2m_C E_C} \sin \phi \quad (\text{iv})$$

$$m_\alpha c^2 + E_\alpha + m_{\text{Be}} c^2 = m_n c^2 + E_n + m_C c^2 + E_C \quad (\text{v})$$

$$Q = \{ (m_\alpha + m_{\text{Be}}) - (m_n + m_C) \} c^2 \quad (\text{vi})$$

が成り立つ。まず、式 (vi) を式 (v) に代入したあと、 $m_\alpha \cong 4m_p$ ,  $m_{\text{Be}} \cong 9m_p$ ,  $m_n \cong m_p$ ,  $m_C \cong$

12  $m_p$  と近似する。さらに、式 (iii) , (iv) , (v) より  $\phi$  と  $E_C$  を消去すれば、 $\sqrt{E_n}$  に対する 2 次方程式：

$$13 (\sqrt{E_n})^2 - (4\sqrt{E_\alpha} \cos \theta) \sqrt{E_n} - (8 E_\alpha + 12 Q) = 0$$

を得る。 $E_\alpha = 5.4 \text{ MeV}$  (チャドウィックはこれを  $5.25 \text{ MeV}$  としている) ,  $Q = 5.74 \text{ MeV}$  を代入して、 $\sqrt{E_n}$  について解くと、 $E_n$  が  $\cos \theta$  をパラメータとして求まる。これは  $\theta$  の単調減少関数で、 $\theta = 0$  のときに最大値  $10.99 \text{ MeV}$  ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときに  $8.62 \text{ MeV}$  ,  $\theta = \pi$  のときに最小値  $6.76 \text{ MeV}$  をとる。最大値は設問 (11) で求めた最大値  $5.7 \text{ MeV}$  の 1.9 倍もある。

チャドウィックは 1932 年の論文で式 (v) を用いているが、当時  ${}^9_3\text{Be}$  の質量はまだ測定されていなかったの、粗い近似によって  $E_n$  の上限値が  $8 \text{ MeV}$  であることを示し、 $5.7 \text{ MeV}$  という値は矛盾しないとだけ述べている。しかし、上述のように、理論計算による  $E_n$  の最大値は  $11 \text{ MeV}$  である。この食い違いについては誰かが論じていると思うが、筆者にはその理由を推測しかない。

パラフィンにベリリウム線 (中性子) を打ち込んだときに飛び出す陽子の速さが最大となるのは、最大のエネルギー  $E_n$  を持つ中性子が静止している陽子に正面衝突するときで、そのときの陽子のエネルギーはほぼ  $E_n$  となる。

飛び出してくる陽子は電離箱で検出される。その窓の前に据え付けられたアルミ箔の厚さを大きくすると、一定時間内に検出される陽子の数は減少する。チャドウィックは、陽子が検出されなくなる時のアルミ箔の厚さを等価な空気層の厚さに換算し、その値から陽子のエネルギーの最大値を求めている。

素人目には、中性子が陽子に正面衝突するときの断面積 (確率) は非常に小さいので、電離箱での陽子の検出数が余程多くないと (観測時間が余程長くないと) , 最大のエネルギーを持つ陽子の検出を見逃してしまう可能性があるように思える。

他の演習問題へ