

問題 37 原子核の発見とそれに伴う新たな矛盾

電気素量を  $e$  , プランク定数を  $h$  , 電子の質量を  $m_e$  , クーロンの法則の比例定数を  $k_e$  として, 次の文中の  を適切な数式または数値で埋めよ。数式は ( ) 内の物理量を用いて表せ。

I 原子核の発見

20 世紀の初頭, 原子の大きさは  $10^{-10}$  m 程度であることは知られていたが, その構造は不明であった。1903 年 J. J. Thomson は, 球形の原子内に正電荷が一様に分布し, その中に負電荷の電子が散らばっている模型を提唱した。同じ年に長岡半太郎は, 球形の正電荷を中心にして, 土星の輪を構成する岩石のように, 多数の電子が円軌道上を回る模型を提唱した。どちらが正しいかは, 荷電粒子を衝突させて, それがどのように散乱されるかを調べればわかる。

以下, トムソン模型の場合を考える。

原子番号  $Z$  , 質量  $M$  の原子  $A$  が点  $O$  に静止しており, その正電荷  $Q$  が半径  $a$  の球内に一様に分布しているとする。電子の存在を考えないときには, 点  $O$  を中心とする半径  $r$  の球面上の電場の強さ  $E(r)$  は,

$$r > a \text{ のとき, } E(r) = \boxed{\text{(1)}} (k_e, Q, r)$$

$$r \leq a \text{ のとき, } E(r) = \boxed{\text{(2)}} (k_e, Q, a, r)$$

と表される。

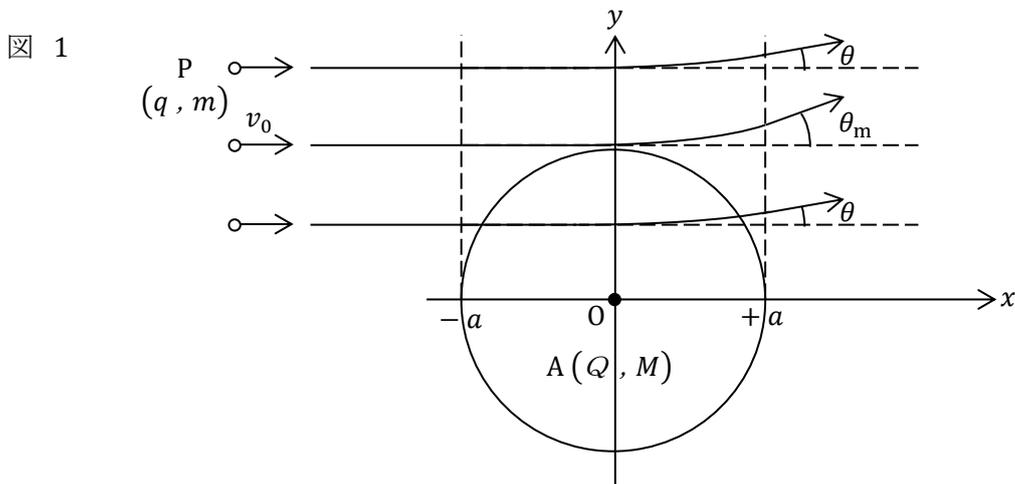


図 1 のように,  $x y$  平面上で, 質量  $m$  , 電気量  $q$  ( $q > 0$ ) の荷電粒子  $P$  が原子  $A$  の近傍を通過するとき, あるいは原子  $A$  の中を突き抜けるとき,  $m \ll M$  であれば, 原子  $A$  は動かないとしてよい。また,  $m \gg m_e$  であれば,  $P$  が原子  $A$  内の電子と相互作用するとき, 電子が大きく変位し, 跳ね飛ばされることがあっても,  $P$  の軌道はほとんど影響を受けないであろう。さらに, 通過前の速さ  $v_0$  が十分大きい場合には, 直線軌道からのずれ角  $\theta$  は小さいであろう。そのずれは原子  $A$  内の正電荷によって生じる。式 (1) (2) からわかるように,  $\theta$  が最大になるのは  $P$  が  $A$  の表面すれすれに通過する

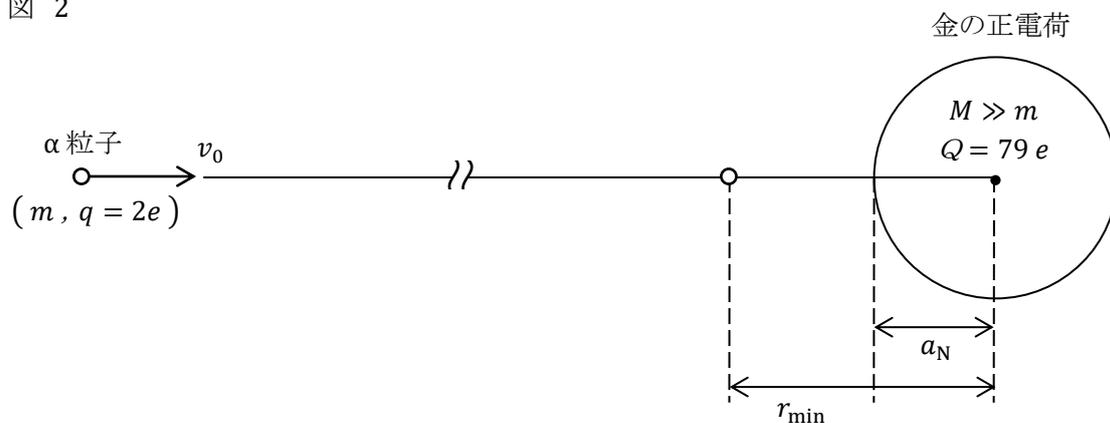
ときである。その最大値  $\theta_m$  のおおよその値を求めるために、P が  $x$  座標の区間  $-a \leq x \leq +a$  を通り過ぎるときにのみ、 $y$  軸の正の向きに大きさが  $qE(a)$  の一定の電気力が働くとする。そうすると、この区間での P の運動は、 $y$  軸方向の加速度が  $(3)$  ( $k_e, a, Q, q, m$ ) の等加速度運動で、区間  $2a$  を通過する時間が  $(4)$  ( $a, v_0$ ) となるので、 $\tan \theta_m$  は  $(5)$  ( $k_e, a, Q, q, m, v_0$ ) と表される。

1908～1913 年に E. Rutherford の指示によって、H. Geiger と E. Marsden はラドンの  $\alpha$  崩壊で放出される  $\alpha$  線を、真空中の金 ( $Z = 79$ ) の薄膜に照射し、透過する  $\alpha$  粒子の散乱角  $\theta$  とその数を測定した。トムソン模型が正しければ、 $\tan \theta_m \doteq (6)$  (数値) となる。ただし、 $Q = 79e$ 、 $q = 2e$ 、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、 $k_e = 9.0 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$ 、 $a = 1.4 \times 10^{-10} \text{ m}$ 、 $\frac{1}{2} m v_0^2 = 9.0 \times 10^{-13} \text{ J}$  である。

実際、大多数の  $\alpha$  粒子はこのような微小角で散乱されるのだが、 $\theta_m$  よりも大きな角度で散乱されるものや、わずかではあるが  $90^\circ$  を越える角度で散乱される  $\alpha$  粒子も検出された。金の薄膜を通過する間に、微小角の散乱を多数回起こすことによって  $\theta > 90^\circ$  となる確率は 0 に近い。したがって、この大きな散乱角は、 $\alpha$  粒子が金原子の正電荷から大きな電気力を受けて、1 回の衝突で跳ね返されたものと考えられる。

いま、粒子 P を  $\alpha$  粒子、原子 A を金原子とする。図 2 のように、 $\alpha$  粒子が金原子の正電荷と正面衝突し、 $r = r_{\min}$  になったときに一瞬静止して引き返したとする。正電荷は半径  $a_N$  の球内にある。この衝突で金原子が動かなかったとすると、 $\alpha$  粒子に対するエネルギー保存則より、 $\frac{1}{2} m v_0^2 = (7)$  ( $k_e, e, r_{\min}$ ) が成り立つ。これに上記の数値を代入して  $r_{\min}$  を求めれば、 $(8)$  m となる。もし、 $r_{\min} < a_N$  であれば、 $\alpha$  粒子は金原子の正電荷と合体し、金原子は別の原子になる可能性がある。よって、 $a_N < r_{\min}$  でなければならない。このことから、金原子の正電荷は金原子の半径  $1.4 \times 10^{-10} \text{ m}$  より桁違いに小さな領域に集中していることがわかる。以後、この正電荷の小さな塊は原子核と呼ばれるようになった。

図 2

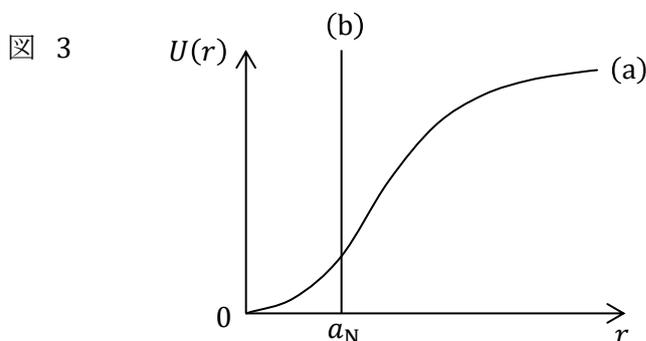


原子核の周りを電子が回っているとすると、古典電磁気学によれば、電子は電磁波を放射してエネルギーを失い、らせん運動をしながら落下して原子核と合体してしまう(補注)。この矛盾を解消したのが1913年に提唱されたN. Bohrの量子論であった。

これ以外に、原子核の発見は次のような矛盾も引き起こした。

## II 新たな矛盾とその解消

1920年代に知られていた基本粒子は陽子と電子だけであったので、当時の研究者が原子核は陽子と電子で構成されていると考えたのは頷ける。すなわち、原子番号 $Z$ 、質量数 $A$ の原子核は $A$ 個の陽子と $(A - Z)$ 個の電子から成るとした。これを認めると、原子核の帯電量は $Ze$ で、質量は陽子の質量のほぼ $A$ 倍になる。そして、陽子と電子は互いに力を及ぼし合って、一つの塊として安定的に存在することになる。



このような原子核を半径 $a_N$ の球としよう。陽子が電子に及ぼす力が電気力だけであれば、その位置エネルギー $U(r)$ は図3(a)のような曲線になるが、ここでは簡単のために、 $U(r)$ は図3(b)のような井戸型になっているとする。すなわち、

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a_N \text{ のとき} \\ \infty, & r > a_N \text{ のとき} \end{cases}$$

を仮定する。この原子核内に安定的に存在する電子には、原子核内を伝わる電子波の定常波が対応すると考える。 $r = a_N$ で弾性的に跳ね返され、原子核の直径上を往復する電子の速さを $v_e$ とすると、 $r = a_N$ を節とする電子波の定常波が生じる条件式は、正整数を $n$ として、

$$2a_N = \boxed{(9)} \quad (n, h, m_e, v_e)$$

と表される。よって、電子のエネルギー $E_n$ は、

$$E_n = \boxed{(10)} \quad (n, h, m_e, a_N)$$

となり、離散的な値を取る。

原子核の間で核反応が生じたとき、反応生成核が不安定となって $\gamma$ 崩壊し、 $\gamma$ 線を放出することがある。この $\gamma$ 線は、電子がエネルギー準位 $E_2$ から $E_1$ へ遷移するときに放出する光子であるとすれば、 $\gamma$ 線のエネルギー $E_\gamma$ は

$$E_{\gamma} = \boxed{\text{(11)}} (h, m_e, a_N)$$

と表される。ここで、代表的な原子核の半径として、 $a_N = 5 \times 10^{-15} \text{ m}$  を採用すれば、

$$E_{\gamma} = \boxed{\text{(12)}} \text{ MeV}$$

となる。ただし、 $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$  である。さまざまな  $\gamma$  崩壊で測定される  $\gamma$  線のエネルギーは  $1 \text{ keV} \sim 10 \text{ MeV}$  であるので、(12) の値はあまりにも大きすぎる。したがって、ここで考えた原子核の模型と(あるいは)  $\gamma$  線の放出機構は正しくない。

別の考え方を採用しても、原子核が陽子と電子から成るという仮説は、理論計算や実験結果と矛盾する。この矛盾を解消したのが J. Chadwick による中性子の発見 (1932 年) であった。そして、原子核は陽子と中性子から成るという考え方が定着した。

#### (補注)

長岡半太郎は論文の中で、これが土星型模型に対する「致命的な反対意見」と述べているが、その反対意見を覆す反論については何も述べていない。

1911 年、原子核の発見とそれに基づく原子模型に関するラザフォードの論文を読んだ長岡半太郎は、ラザフォードに手紙を書き、「あなたが用いた実験機器の単純さとあなたが得たすばらしい成果に、私は心を打たれました」と賛辞を送っている。

問題 37 の解答と解説

I 原子核の発見

(1)(2) 正電荷の電荷密度  $\rho$  は  $Q / \left( \frac{4\pi}{3} a^3 \right)$  であるから、点  $O$  を中心とする半径  $r$  の球面でガウスの法則を適用すれば、

$$r > a \text{ のとき, } 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e Q \text{ より, } E(r) = \boxed{k_e \frac{Q}{r^2}}$$

$$r \leq a \text{ のとき, } 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e \left( \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \right) = 4\pi k_e \frac{Q r^3}{a^3} \text{ より,}$$

$$E(r) = \boxed{k_e \frac{Q}{a^3} r}$$

となり、 $E(r)$  は  $r = a$  で最大値  $k_e \frac{Q}{a^2}$  を取る。

(3)  $y$  方向の加速度を  $\alpha_y$  として、粒子  $P$  の運動方程式を立てれば、次のようになる。

$$m \alpha_y = q E(a) = k_e \frac{q Q}{a^2} \quad \rightarrow \quad \alpha_y = \boxed{k_e \frac{q Q}{m a^2}}$$

(4) 題意より、 $x$  方向には等速度運動するので、通過時間  $\Delta t$  は  $\boxed{2a / v_0}$  となる。

(5)  $x = a$  に達したとき、速度の  $y$  成分  $v_y$  は、

$$v_y = \alpha_y \Delta t = k_e \frac{2 q Q}{m a v_0}$$

となる。このときの速度ベクトルと  $x$  軸の正の向きがなす角度が  $\theta_m$  であるから、

$$\tan \theta_m = \frac{v_y}{v_0} = \boxed{\frac{2 k_e q Q}{m v_0^2 a}}$$

(6) 与えられた数値を上式に代入すれば、

$$\tan \theta_m = \frac{2 \times 9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \times (2 \times 79) \times (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{2 \times 9.0 \times 10^{-13} \text{ J} \times 1.4 \times 10^{-10} \text{ m}} = \boxed{2.9 \times 10^{-4}}$$

を得る。 $\theta_m$  は  $2.9 \times 10^{-4}$  rad という微小角であるから、すべての  $\alpha$  粒子の軌道はほぼ直線となる。

(7)(8)  $\alpha$  粒子に対するエネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \boxed{k_e \frac{(2e)(79e)}{r_{\min}}}$$

が成り立つ。これより、 $r_{\min}$  を求め、与えられた数値を代入すれば、

$$r_{\min} = \frac{2 \times 79 \times k_e e^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} = \frac{2 \times 79 \times 9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \times (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{9.0 \times 10^{-13} \text{ J}}$$

$$= \boxed{4.0 \times 10^{-14}} \text{ m}$$

を得る。これは金原子の半径  $1.4 \times 10^{-10}$  m の約 3 万分の 1 である。原子核の半径はこれより小さい。

## II 新たな矛盾とその解消

(9) 電子波の波長  $\lambda_e$  は  $\frac{h}{m_e v_e}$  である。両端を節とする電子波の定常波が原子核の直径上に生じるとき、正整数を  $n$  として、

$$2 a_N = n \frac{\lambda_e}{2} = \boxed{n \frac{h}{2 m_e v_e}}$$

が成り立つ。これより、 $m_e v_e = \frac{n h}{4 a_N}$  を得る。

(10) このとき、電子の運動エネルギーが  $\frac{1}{2} m_e v_e^2$  で、位置エネルギーが 0 であるから、 $E_n$  は、

$$E_n = \frac{(m_e v_e)^2}{2 m_e} = \boxed{\frac{n^2 h^2}{32 m_e a_N^2}}$$

と表される。

(11) (12)  $n = 2$  から  $n = 1$  へ遷移したときに電子が失うエネルギーが  $\gamma$  線光子のエネルギーとなるので、

$$\begin{aligned} E_\gamma = E_2 - E_1 &= \boxed{\frac{3 h^2}{32 m_e a_N^2}} \\ &= \frac{3 \times (6.6 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{32 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (5 \times 10^{-15} \text{ m})^2} = 1.8 \times 10^{-9} \text{ J} = \boxed{1.1 \times 10^4} \text{ MeV} \end{aligned}$$

となる。

### (補足)

高校生でも理解できるようにこのような説明をしたが、研究者の間で実際に論じられた矛盾を理解するには、大学レベルの物理の知識と量子力学による計算が必要となる。しかし、そのうちの一つは「不確定性原理」の知識があれば容易に理解できるので、それを以下で説明する、

ある粒子の位置座標  $x$  と運動量  $p_x$  の測定値は、同時に確定値を取ることはできず、それぞれの不確定さを  $\Delta x$ 、 $\Delta p_x$  とすれば、 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar$  を満たす。ただし、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  である。これを不確定性原理という。

電子が原子核のなかに存在しているとすると、その位置座標  $x$  の不確定さは  $\Delta x \sim a_N$  であるから、その運動量  $p_x = m_e v_x$  の不確定さ  $\Delta p_x = m_e \Delta v_x$  は、不確定性原理より、

$$m_e \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta x} \sim \frac{\hbar}{2 a_N}$$

を満たす。よって、電子のエネルギー  $E$  の不確定さは、

$$\Delta E \sim \frac{(m_e \Delta v_x)^2}{2 m_e} \geq \frac{\hbar^2}{8 m_e a_N^2}$$

となる。 $a_N$  の代表的な値として、 $5 \times 10^{-15} \text{ m}$  を採用すれば、

$$\Delta E \geq \frac{(6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} / 2\pi)^2}{8 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (5 \times 10^{-15} \text{ m})^2} = 6.1 \times 10^{-11} \text{ J} = 3.8 \times 10^2 \text{ MeV}$$

となる。

いろいろな原子核の結合エネルギー  $B$  の測定が進むにつれて、核子 1 個あたりの結合エネルギー  $B / A$  は 9 MeV を越えないことがわかった。にも拘らず、原子核の構成要素の一つと見なしている電子のエネルギーが 10 MeV をはるかに越えるのは異常で、あり得ないことである。

他の演習問題へ