問題 36　アッベ屈折計

次の文中の $\boxed{}$ に適切な数式を記入し，問いに答えよ。

図 1 の ABC は，頂角が θ の直角プリズムで，その屈折率は N である。光が入射する面 AB は屈折率 n の水溶液に接し，光が出射する面 AC は屈折率 1 の空気に接している。屈折率 N , n は光の波長は依存しないものとする。以下では，紙面内を伝わる光だけを考え，紙面を横切る光は考えなくてよい。

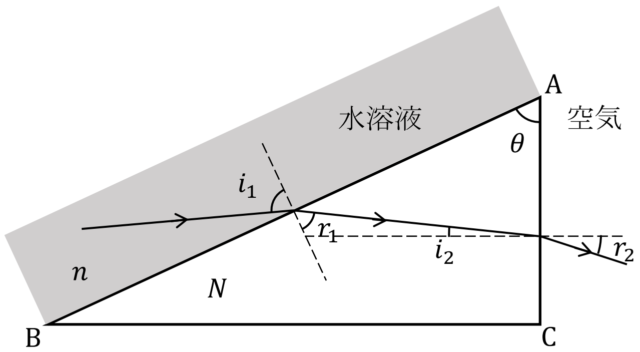


図　1

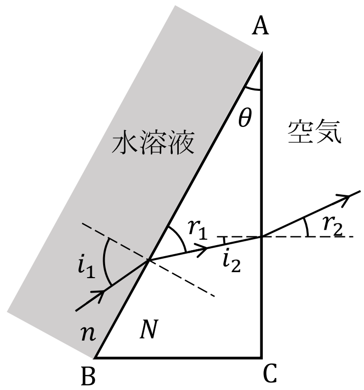


図　2

面 AB に入射角 i_1 で入射した光は屈折角 r_1 で屈折し，屈折波が面 AC に入射する場合には，入射角は i_2 で，屈折角は r_2 である。AB 面での屈折では，N , n , i_1 , r_1 の間に $\boxed{(1)}$ が成り立つ。この式からわかるように，n と N の間に不等式 $\boxed{(2)}$ が成り立つ場合には，入射角 i_1 を 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化させると，屈折角 r_1 は 0 から最大値 $r_{1\,,\,\max}$ まで変化し，$r_1 > r_{1\,,\,\max}$ の方向には屈折しない。$r_{1\,,\,\max}$ と n , N の間には $\boxed{(3)}$ が成り立つ。以下では不等式 (2) が成り立っているものとする。

問 1　光は逆行可能であるから，プリズム側から AB 面に光が入射する場合にも式 (1) が成り立つ。もし，プリズム側での入射角 r_1 が $r_{1\,,\,\max}$ より大きいときには，どのような現象が見られるか。

図 1 のように光がプリズムを透過するとき，屈折角 r_1 と入射角 i_2 と頂角 θ には $\boxed{(4)}$ が成り立つ。ただし，図 2 のような屈折の場合には，$i_2 < 0$, $r_2 < 0$ とする。AC 面での屈折では，N , i_2 , r_2 の間に $\boxed{(5)}$ が成り立つ。これらの関係式からわかるように，屈折角 r_2 には最小値 $r_{2\,,\,\min}$ が存在する。その最小値がわかれば，水溶液の屈折率 n を，N と θ と $\sin r_{2\,,\,\min}$ を用いて，$\boxed{(6)}$ と表すことができる。このような方法で測定できる n の上限値は $\boxed{(7)}$ である。

問 2　いま仮に，光は BC 面で反射しないとする。このとき，水溶液側から AB 面に向かって，あらゆる方向から太陽光のような白色光が入射すれば，AC 面から出てくる光はどのように見えるか。

実際には，BC 面で反射した光が，直接 AC 面に入射するか，あるいは AB 面でもう一度反射したあと AC 面に入射する場合もある。これらの光のために，問 2 で観察される $r_{2\,,\,\mathrm{min}}$ の方向が少しぼやける。そのために実際の屈折計では，次のような工夫がされている。

図 3 は手持型アッベ屈折計で，円筒の先端に図 1 の直角プリズム ABC が固定されている。BC 面には細かい凹凸が付けてあり，青色に着色されている。この面にプリズム側から入射した白色光は，その青色成分だけがあらゆる方向に乱反射される。したがって，ある方向に反射された青色光の強度は，入射白色光の強度に比べれば，かなり小さくなる。

直角プリズムの AB 面に水溶液の滴を垂らし，透明な採光板で押し付けると，水溶液の薄い層が採光板と AB 面の間にできる。拡大図に示されているように，採光板の水溶液側の面には細かい凹凸が付けてある。空気側から採光板に入射した白色光は，水溶液の薄層を透過したあと直角プリズムに入射し，AC 面から出ていく。その光を対物レンズによって焦点面に結像させる。その像を接眼レンズによって観察すれば，焦点面に取り付けられた透明な目盛板の拡大正立虚像が見え，角度 $r_{2\,,\,\mathrm{min}}$，したがってそれに対応する水溶液の屈折率 n が読み取れる。

問 3　採光板に細かい凹凸を付ける理由はなにか。

問 4　接眼レンズで見た視野のなかに，屈折角 $r_{2\,,\,\mathrm{min}}$ の方向に伝わる光が含まれているとすれば，視野はどのように色付いて見えるか。仮に n の値を 1.45 として，下図に示せ。

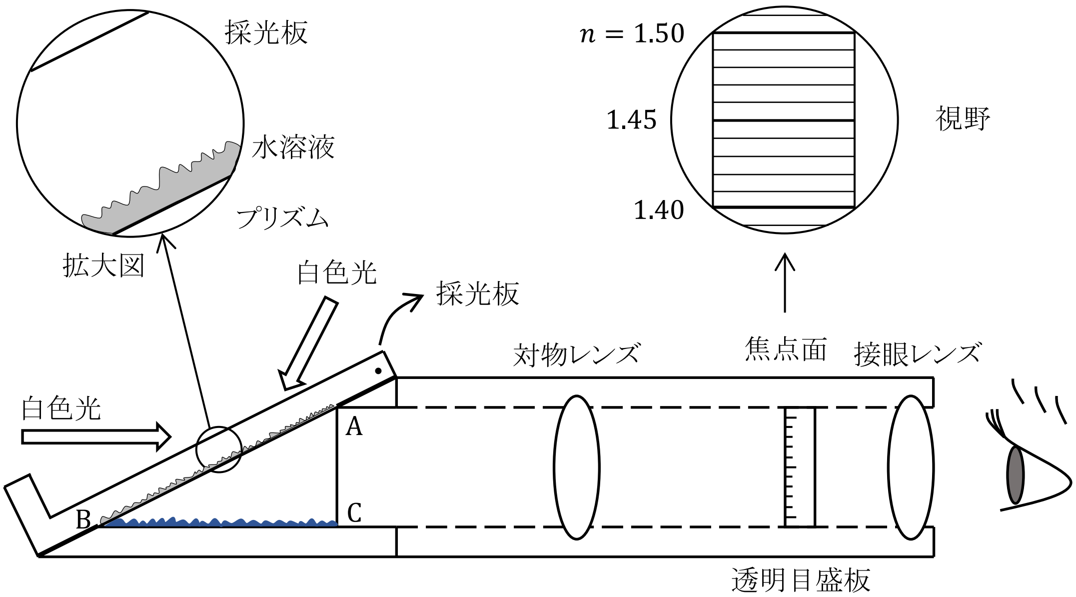


図　3

問題 36 の解答と解説

　果汁の甘味は溶けている糖分の濃度に依存する。一般的に溶質の濃度が高い水溶液ほど光の屈折率が大きくなるので，果汁の屈折率を精確に測ることによって，その甘味を数値で表すことが可能になる。手持型糖度計ではアッベ屈折計が使われている。その原理を考察する。この問題は，岩手大学の 2005 年度入試問題を参考にして作成したが，問題文と設問の内容は少し変えてある。

(1)　屈折の法則より，$\boxed{n\ \sin i_1 = N\ \sin r_1}$　①

(2)(3)　$\boxed{n < N}$　であれば，i_1 が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するとき，r_1 は 0 から $r_{1\,,\,\max}\left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ まで変化する。式①に $i_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$r_1 = r_{1\,,\,\max}$ を代入すれば，次の式を得る。

$$\boxed{\sin r_{1\,,\,\max} = \frac{n}{N}} \qquad ③$$

問 1　入射角 r_1 が $r_{1\,,\,\max}$ より大きいときには，式 ① を満たす屈折角 i_1 が存在しないので，プリズム側から AB 面に入射した光は屈折することなく反射する。すなわち，$\boxed{\text{全反射する。}}$

(4)　初等幾何学より，$\boxed{r_1 + i_2 = \theta}$　④

(5)　屈折の法則より，$\boxed{N \sin i_2 = \sin r_2}$　⑤

(6)　式 ④ より，$r_1 = r_{1\,,\,\max}$ のとき，i_2 は最小値 $i_{2\,,\,\min}$ を取る。そのとき，式 ⑤ より，屈折角 r_2 は最小値 $r_{2\,,\,\min}$ を取る。以上のことから，n は次のように表される。

$$\begin{aligned}
n &= N\ \sin r_{1\,,\,\max} && (\because \text{式③}) \\
&= N\ \sin\left(\theta - i_{2\,,\,\min}\right) && (\because \text{式④}) \\
&= N\ \sin\theta\ \cos i_{2\,,\,\min} - N\cos\theta\ \sin i_{2\,,\,\min} && (\text{加法定理}) \\
&= N\ \sin\theta\sqrt{1-\left(\sin i_{2\,,\,\min}\right)^2} - N\cos\theta\ \sin i_{2\,,\,\min} && (\text{恒等式}) \\
&= \boxed{\sin\theta\sqrt{N^2-\left(\sin r_{2\,,\,\min}\right)^2} - \cos\theta\ \sin r_{2\,,\,\min}} && (\because \text{式⑤}) \qquad ⑥
\end{aligned}$$

(7)　式 ⑥ が示すように，θ と N が既知のときに，$r_{2\,,\,\min}$ を測定して n の値を求めるのであるから，nが測定できるためには，$r_{2\,,\,\min}$ が存在しなければならない。そのためには，$i_{2\,,\,\min}$，したがって $r_{1\,,\,\max}$ が存在しなければならない。よって，$r_{1\,,\,\max} < \dfrac{\pi}{2}$ でなければならず，式 ③ より，$n < \boxed{N}$ を得る。

問 2　図 4 に示すように，入射面 AB からプリズム側へ屈折した白色光は，BC 面に達するものと AC 面に達するものの二つに分かれる。AC 面に入射した白色光は，そこで反射して BC 面に達するものと空気側へ屈折するものの二つに分かれる。題意より，BC 面に入射した白色光は反射されず，BC 面を透過するか BC 面に吸収される。AC 面から空気側へ屈折した白色光の屈折角は $r_{2\,,\,\min}$ より大きい。よって，屈折角が $r_{2\,,\,\min}$ より大きい方向では白色光が見えるが，$r_{2\,,\,\min}$ より小さい方向では真暗になる。

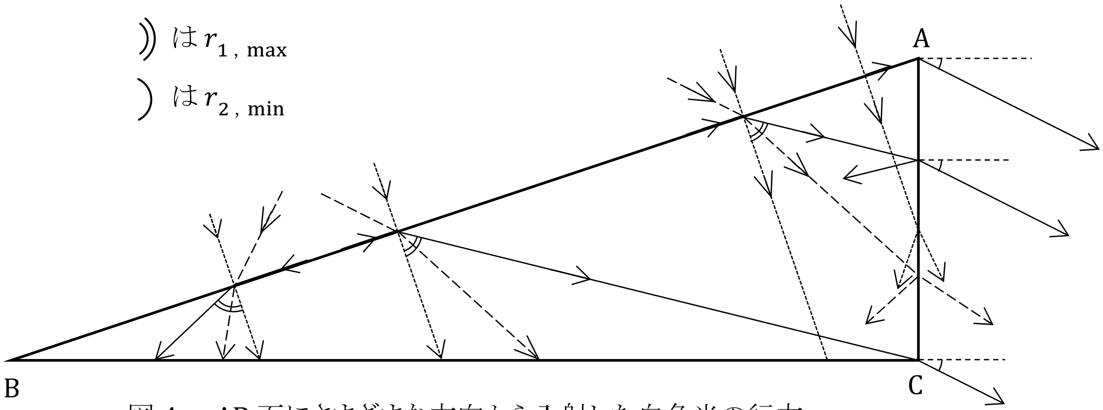


図 4　AB 面にさまざまな方向から入射した白色光の行方

問 3　採光板の下面が平面の場合と比べ，細かい凹凸がある場合には，そこに入射した光が散乱され，水溶液からプリズムに向かって，$\frac{\pi}{2}$ に近い入射角で入射する光の明るさが大きくなる。その結果，出射面での屈折角が $r_{2,\min}$ に近い光が明るくなり，最小屈折角 $r_{2,\min}$ が測定しやすくなるからである。

問 4　入射面 AB で屈折したあと BC 面に入射した白色光は，青色光として乱反射される。そのあと青色光は，図 5 に示すように，AB 面と AC 面で反射・屈折を，BC 面で乱反射を繰り返すが，反射・屈折をする度に光の強度が小さくなり，最終的に AC 面から出射する青色光の強度に対する寄与が小さくなる。BC 面から AC 面へ直接入射した青色光は屈折して AC 面から右上方向に出ていく。一方，BC 面での乱反射のあと，1 回 AB 面で反射して AC 面に入射する青色光のなかには，屈折して AC 面から右下方向に出ていくものもあるが，反射が 1 回多いので，右上方向に出ていく青色光より少し暗い。そのうえ，AC 面での屈折角が $r_{2,\min}$ より大きい方向には明るい白色光があるので，その方向に屈折する青色光は白色光に埋もれてしまい，重ね合わされた光は白色に見える。よって，接眼レンズで見た視野は図 5 のように色付いて見える。

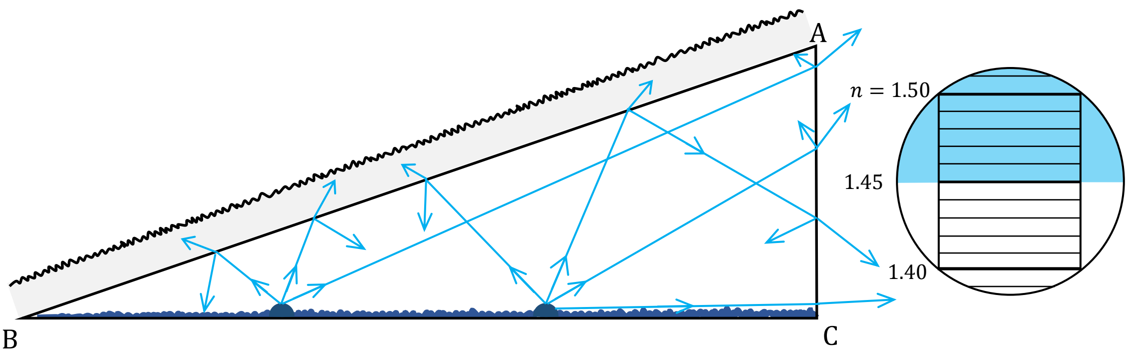
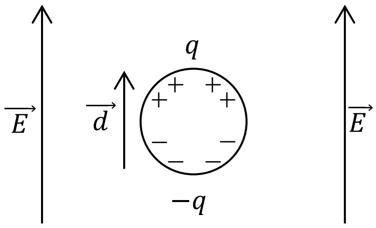


図　5　　B C　面で乱反射された青色光の行方

（参考） Brix 糖度について



一般的に，分子に電場 $\overrightarrow{E}$ をかけると，右図のように分極し，双極子モーメント $\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{d}$ が生じる。強電場でなければ，$\overrightarrow{p}$ は $\overrightarrow{E}$ に比例し，

$$\overrightarrow{p} = \varepsilon_0\,\alpha\,\overrightarrow{E}$$

と表される。ε_0 は真空の誘電率で，α を分子分極という。電場をかけなくても双極子モーメントを持つ分子もあるが，ここでは扱わない。α は分子に固有な量で，SI での単位は m^3 である。

誘電率 ε の誘電体を構成する分子が一種類で，その個数密度と分子分極がそれぞれ N , α であるとき，その誘電体の比誘電率 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ は，次の関係式を満たす。

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\,\alpha}{3\,\varepsilon_0}$$

これをクラウジウス・モソッティの関係式という。厳密には，一つの分子のまわりに他の分子が自由に出入りできる気体や液体に対して成り立つ。異種分子 i を混合した誘電体の場合には，

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \sum_i \frac{N_i\,\alpha_i}{3\,\varepsilon_0} \tag{a}$$

と表される。その証明は大学レベルの電磁気学の初等的な教科書に載っている。

磁性体でない物質の透磁率 μ は，近似的に真空の透磁率 μ_0 に等しい。また，誘電体中の光速度を c ，誘電体の屈折率を n とし，真空中の光速度を c_0 とすれば，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}\ , \qquad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\ , \qquad n = \frac{c_0}{c}$$

が成り立つので，式 (a) は次のように書き換えられる。これをローレンツ・ローレンスの式という。

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_i \frac{N_i\,\alpha_i}{3\,\varepsilon_0} \tag{b}$$

体温を測るのに ℃ という単位を使うように，糖度を測るのに °Bx (度ブリックス) という単位を使う。1 °Bx は，1 g の蔗糖を 99 g の水に溶かしたときの糖度である。理論的には，水と蔗糖の分子分極 α_i がわかっておれば，蔗糖水溶液の屈折率 n を測定することによって，式 (b) より糖度がわかるのだが，計算が大変である。実用のために，20 ℃ の蔗糖水溶液にナトリウムの D 線 ($\lambda =$ 589.3 nm) を照射して得られた屈折率 n_{D} と Brix 糖度 x° Bx の関係式が，有効数字 6 桁で n_{D} の 5 次の多項式として与えられている。屈折率は温度によって敏感に変化するので，測定値を20 ℃ での値に変換する必要がある。

実際の果汁は蔗糖以外にブドウ糖・果糖などを含んでいるので，その Brix 糖度は，仮に溶質をすべて蔗糖に置き換えたときの換算値と言える。溶質の量が増えると Brix 糖度が高くなるので，果汁に食塩を混ぜても Brix 糖度が高くなる。すなわち，Brix 糖度は必ずしも「甘さ」の度合を表すわけではないので，注意を要する。と言っても，たとえば，日常的にスイカの糖度を測っている人が，切ったスイカをわざわざ塩水にひたしてから測ることなどないのであるが … 。

他の演習問題へ