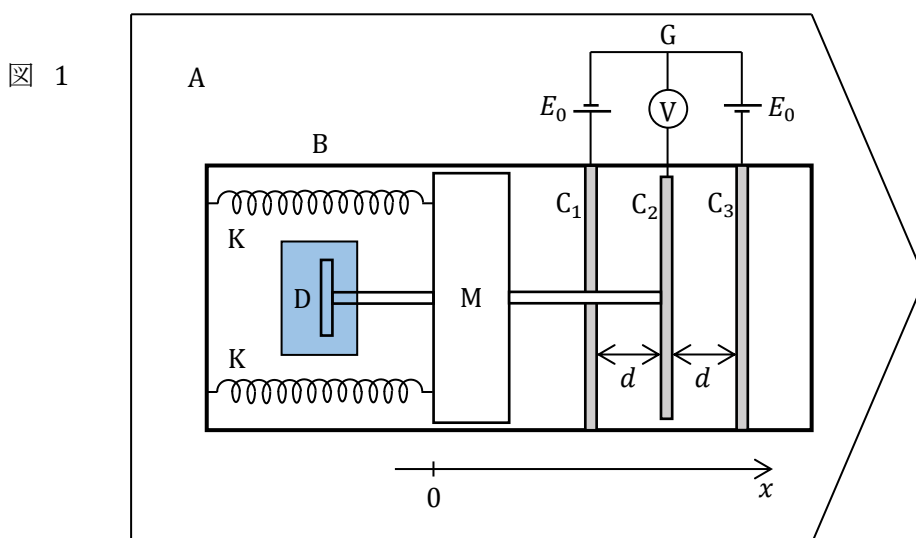


### 問題 34 加速度計とサニャック効果を用いた角速度計による慣性航法

慣性系に対する移動体の加速度と回転角速度を、外部からの情報を用いずに、移動体に搭載された機器で測定し、与えられた初期位置と初速度を基にして、任意の時刻における移動体の位置と速度を求める方法を慣性航法という。ロケット・飛行機・潜水艦などは慣性航法で航行している。慣性系で真空中を伝わる光速を  $c$  とする。次の文中の  を適切な数式で埋め、問に答えよ。

#### (I) 加速度計

図 1 は加速度計の原理を説明するための模式図である。



移動体 A に筒状の加速度計 B が固定されている。B 内のおもり M (質量  $m$ ) には、2 本のばね K と平行板コンデンサーの一つの極板  $C_2$  と減衰器内の板 D が連結されている。 $C_2$ 、D とそれらを連結する棒の質量は  $m$  に比べれば無視できる。2 本のばねの合成ばね定数は  $k$  である。おもり M が振動すると板 D が減衰器内の粘性流体から力を受け、振動は直ちに減衰して、M は B に対して静止する。コンデンサーの極板  $C_1$  と  $C_3$  は B の側面に固定されているが、極板  $C_2$  はおもり M とともに、B の側面に沿って滑らかに動くことができる。3 枚の極板以外の B の部品は不導体で作られている。3 枚の極板が互いに向かい合う面の表面積はいずれも  $S$  で、極板間の空気の誘電率は  $\epsilon$  である。おもり M が B に対して静止しているとき、ばね K の伸びは 0 で、 $C_1$  と  $C_2$  および  $C_2$  と  $C_3$  の間隔はいずれも  $d$  である。このときの M の位置を原点として、図の右向きを正とする  $x$  座標を設定する。3 枚の極板には、起電力  $V_0$  の 2 つの電池と電圧計  $\textcircled{V}$  が、導線で図のように接続されている。 $C_2$  につながれた導線が  $C_2$  に及ぼす力は無視できる。電圧計の内部抵抗は無限大と見なせ、極板  $C_2$  の全帯電量は常に 0 である。 $C_1$  と  $C_3$  が  $C_2$  に及ぼす静電気力は無視できるものとする。

さて、移動体 A が慣性系に対して、 $x$  軸方向に加速度  $a_x$  で動き出せば、移動体 A に乗っている観測者から見れば、おもり M に慣性力  $f_x$  が働く。 $x$  軸の正の向きの力を正とすれば、 $f_x = \boxed{(1)}$  と表される。この力によって M は B に対して動き出すが、D に働く粘性力によって直ちに釣合の位置  $x_s$

に静止する。このとき、 $a_x$  は  $x_S$  を用いて、

$$a_x = \boxed{(2)} \quad (a)$$

と表される。

一方、コンデンサーに着目すると、 $C_2$  が最初静止していた位置から  $x_S$  だけ変位すれば、 $C_1 C_2$  間の容量が  $\boxed{(3)}$ 、 $C_2 C_3$  間の容量が  $\boxed{(4)}$  となる。このとき、分岐点  $G$  に対する  $C_2$  の電位差を  $V$  とすれば、 $x_S$  は  $V, V_0, d$  を用いて、

$$x_S = \boxed{(5)} \quad (b)$$

と表される。式 (a) と式 (b) より、 $x_S$  を消去すれば、

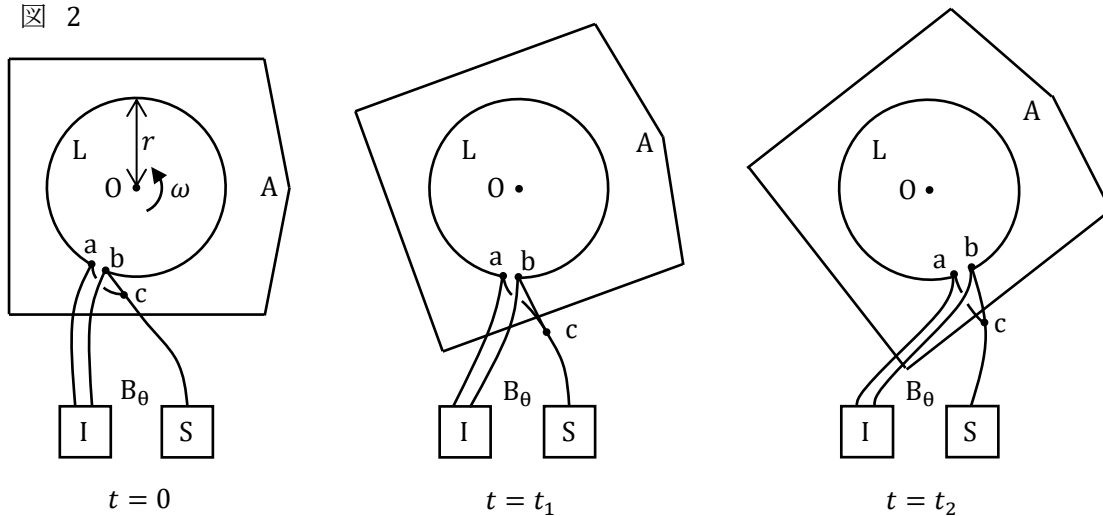
$$a_x = \boxed{(6)} \times V \quad (c)$$

となり、移動体  $A$  に乗っている人は、電圧計が示す値を読み取ることによって、 $A$  が慣性系に対して  $x$  軸方向にどのような加速度で移動しているかを知ることができる。

## (II) サニャック効果を用いた角速度計

図 2 は、移動体  $A$  の回転角速度を測定する計測器  $B_\theta$  の原理を説明するための模式図である。

図 2



半径  $r$  の円筒に屈折率  $n$  の光ファイバーを  $N$  回巻き付けた光の環状伝達路  $L$  が、移動体  $A$  に固定されている。光源  $S$  から送り出された振動数  $\nu$  の光は、光ファイバーの分岐点  $c$  で同じ強さの 2 つの光に分かれ、環状路  $L$  の両端  $a$  と  $b$  から  $L$  に入射する。 $a$  端と  $b$  端の間隔は円周  $2\pi r$  に比べれば無視できるほど小さい。2 つの光は  $L$  の中を逆向きに伝播し、 $b$  端と  $a$  端から出ていく。そのあと、2 つの光は同じ長さの光ファイバーによって干渉計  $I$  に導かれ、そこで重なって干渉を起こす。あとで述べるように、移動体  $A$  が回転しているときには、これら 2 つの光の位相がずれるので、干渉計  $I$  で生じる干渉縞は、回転していないときの干渉縞と比べると、縞模様がずれる。そのずれから移動体  $A$  の回転角速度がわかる。

いま、慣性系に対して、移動体  $A$  が環状路  $L$  の中心  $O$  のまわりに、一定の角速度  $\omega$  で反時計まわりに回転しているとする。簡単のために、光ファイバーの巻き数  $N$  を 1 とする。

特殊相対論によると、 $r\omega \ll c$  の場合、光ファイバーの中を伝播する光の速さは、反時計まわりのときは  $\frac{c}{n} + \alpha r\omega$  で、時計まわりのときは  $\frac{c}{n} - \alpha r\omega$  である。ただし、 $\alpha$  はフレネルの随伴係数と呼ばれる定数で、 $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$  で与えられる。光源 S を出た光の先端が a 端と b 端を同位相で通過する時刻を  $t = 0$  とする。a 端から時計まわりに伝播する光が b 端に達する時刻を  $t_1$  とすると、その間に A の回転によって b 端が円周に沿って動く距離  $\ell_1$  は、 $\ell_1 = \boxed{(7)}$  となる。a b 間の距離は 0 と見なし、よいことに注意すれば、 $t_1$  は  $c, n, \alpha, r, \omega, \ell_1$  を用いて、 $t_1 = \boxed{(8)}$  と表される。これら 2 式より  $\ell_1$  を消去すれば、 $t_1 = \boxed{(9)}$  となる。

一方、b 端から L に入射した光は、L の中を反時計まわりに伝播し、時刻  $t_2$  のときに a 端から出てくる。その間に a 端が円周に沿って動く距離  $\ell_2$  は、 $\ell_2 = \boxed{(10)}$  となる。上と同様にして、 $t_2$  を、 $c, n, \alpha, r, \omega$  を用いて表せば、 $t_2 = \boxed{(11)}$  となる。よって、2 つの光の先端が干渉計に入射する時刻に、 $\Delta t = t_2 - t_1 = \boxed{(12)}$  の差が生じる。通常の移動体では  $r\omega \ll c$  と見なせるので、 $(r\omega \ll c)^2 = 0$  として、 $\Delta t$  の近似式を求め、その式を、 $c, \omega, A$  を用いて表せば、 $\Delta t \approx \boxed{(13)}$  となる。ただし、 $A$  は光ファイバーで囲まれる円の面積  $\pi r^2$  である。

時刻差  $\Delta t$  に対応する位相差  $\phi$  を、 $c, \nu, A, \omega$  を用いて表せば、

$$\phi = \boxed{(14)} \times \omega \quad (d)$$

となる。よって、位相差  $\phi$  を測定することによって、移動体 A の回転角速度  $\omega$  を知ることができる。

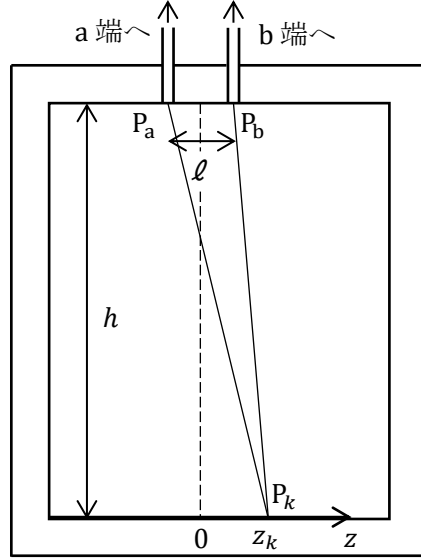
このように、回転する環状路を逆向きに伝わる 2 つの光に位相差が生じる現象をサニャック効果 (Sagnac effect) という。

図 2 は慣性系から見たときに移動体 A が回転する様子を表しているが、光源 S と干渉計 I を A に搭載し、A に乗っている人が  $\phi$  を測定しても、式 (d) が成り立つことが実験からわかっている。

### (III) 干渉計による位相差の測定

干渉計 I は, 図 3 のような高さ  $h$  の不透明な直方体で, 内部は真空である。

図 3



上面に開けられた間隔  $l$  のピンホール  $P_a$  と  $P_b$  に, 環状路  $L$  の  $a$  端と  $b$  端から延ばした同じ長さの光ファイバーが差し込まれている。その端面から放射される 2 つの球面素元波は下面にあるスクリーン上で重なり, 規則的に並んだ明点の斑模様を生じさせる。

$P_a$  と  $P_b$  の中点からスクリーンに下した垂線の足を原点とし,  $\overline{P_a P_b}$  に平行な  $z$  座標を設定する。この干渉計では,  $l \ll h$  であるので,  $z$  軸上の原点近傍に明点が等間隔に並ぶ。原点から  $z$  軸の正の向きに数えた  $k$  番目の明点  $P_k$  の座標を  $z_k$  とすると,  $P_k$  で重なる 2 つの光の経路差  $\Delta L$  は,

$$\Delta L = \overline{P_a P_k} - \overline{P_b P_k} = \boxed{\phantom{0}} \times z_k \quad (15)$$

と表される。ただし,  $|z_k| \ll h$  とし,  $|\delta| \ll 1$  のときに成り立つ近似式  $\sqrt{1+\delta} \cong 1 + \frac{1}{2}\delta$  を用いて近似計算をせよ。

いま, ある時刻にピンホール  $P_a$  を出る光の位相が,  $P_b$  を出る光の位相より  $\phi$  だけ遅れているとすると,  $P_k$  で重なる 2 つの光の位相差  $\psi(z_k, \phi)$  は,

$$\psi(z_k, \phi) = \boxed{\phantom{0}} \quad (16)$$

となり,  $k$  番目の明点  $P_k$  の位置  $z_k(\phi)$  は,

$$z_k(\phi) = \boxed{\phantom{0}} \quad (17)$$

と表される。これと  $\phi = 0$  のときの  $k$  番目の明点の位置  $z_k(0)$  との差  $\Delta z$  は,

$$\Delta z = z_k(\phi) - z_k(0) = \boxed{\phantom{0}} \times \phi \quad (18)$$

と表され,  $k$  には依存しない。よって, 2 つの光の位相がずれることによって生じる  $z$  軸上の明点模様のずれ  $\Delta z$  を測定すれば, 2 つの光の位相差  $\phi$  を知ることができる。

#### (IV) 慣性航法の一例

図 4a は、慣性系において水平面上を動き回る移動体 A の鉛直断面図である。角速度計  $B_\theta$  と加速度計  $B_x$ 、 $B_y$  が 3 層の水平板上に固定されている。 $B_\theta$  は図 2 の計測器と同じで、光源 S と干渉計 I は板上に設置されている。これによって移動体 A の回転角速度  $\omega$  を測る。 $B_x$  と  $B_y$  は図 1 の B と同じ構造の加速度計で、 $B_x$  によって  $x$  軸方向の加速度  $a_x$  を測定し、 $B_y$  によって、図 4b の上面図が示すように、 $y$  軸方向の加速度  $a_y$  を測定する。

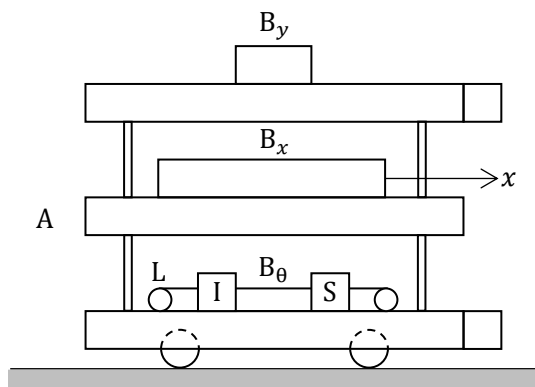


図 4a

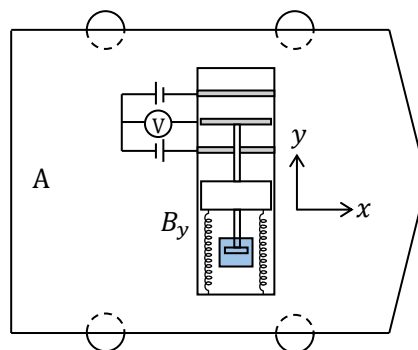


図 4b

図 5 のように、水平面上に設定された直交座標  $(X, Y)$  の原点に、移動体 A が静止している。このとき、移動体 A に固定された  $(x, y)$  座標軸は、 $(X, Y)$  座標軸と平行になっている。時刻  $t = 0$  のときに A は動き出し、そのあと各計測器で測定された A の角速度  $\omega$  と加速度  $(a_x, a_y)$  は時間的に図 6 のように変化した。

問 1  $0s \leq t \leq 10s$  と  $10s \leq t \leq 20s$  の間で、移動体 A はどのような運動をするか。理由を付して述べよ。

問 2  $0s \leq t \leq 50s$  の間に移動体 A がたどる経路を図 5 に示せ。

図 5

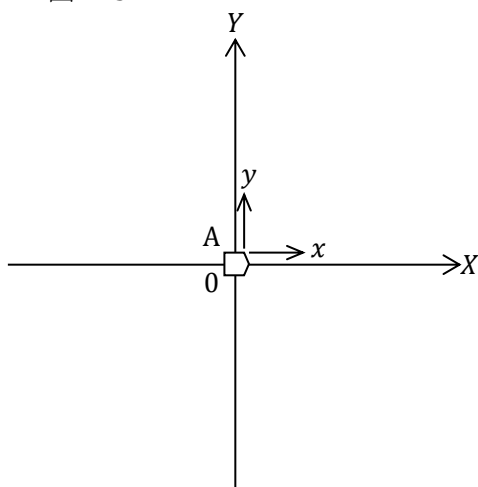
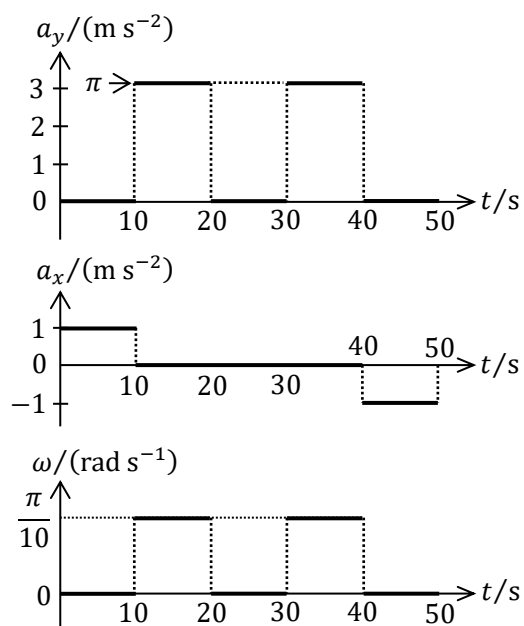


図 6



### 問題 34 の解答と解説

#### (I)

(1) 慣性系に対して加速度  $\vec{a}$  で移動する加速系から見れば、質量  $m$  の物体に働く慣性力  $\vec{f}$  は、 $m(-\vec{a})$  と表される。この式は、加速系には重力加速度( $-\vec{a}$ )の重力場があると見なしてもよいことを表している。いまの場合、おもり  $M$  に働く  $x$  方向の慣性力は、 $f_x = \boxed{-m a_x}$  である。

(2) 移動体  $A$  に対しておもり  $M$  が静止しているとき、 $M$  には慣性力  $f_x$  とばねの弾性力  $-kx_S$  が働く。これらの力に対するつりあいの式  $0 = f_x + (-kx_S)$  と  $f_x = -m a_x$  より、

$$a_x = \boxed{-\frac{k}{m} x_S} \quad (a)$$

を得る。このような回りくどいことをしなくても、慣性系から見て  $M$  の運動方程式  $m a_x = -kx_S$  を立てれば、直ちに式 (a) を得るのだが、移動体  $A$  に乗っている人が、移動体内の物理変化にのみ着目して加速度  $a_x$  を測定するのが目的なので、慣性力を導入して  $a_x$  を求めた。

(3) (4) 極板  $C_2$  が  $x_S$  だけ変位すると、 $C_1$  と  $C_2$  および  $C_2$  と  $C_3$  の極板間距離がそれぞれ  $d + x_S$ 、 $d - x_S$  となるので、これらの平行極板から成るコンデンサーの容量  $C_{12}$  と  $C_{23}$  は、次のように表される。

$$C_{12} = \frac{\varepsilon S}{d + x_S}, \quad C_{23} = \frac{\varepsilon S}{d - x_S}$$

(5)  $C_1 C_2$  間および  $C_2 C_3$  間にかかる電圧は、それぞれ  $V_0 - V$ 、 $V_0 + V$  であり、2 つのコンデンサーには同じ電気量  $Q$  が蓄えられるので、

$$Q = C_{12} (V_0 - V) = C_{23} (V_0 + V)$$

が成り立つ。これより  $x_S$  を求めれば次のようになる。

$$\frac{V_0 - V}{V_0 + V} = \frac{C_{23}}{C_{12}} = \frac{d + x_S}{d - x_S} \quad \rightarrow \quad x_S = \boxed{-d \frac{V}{V_0}} \quad (b)$$

(6) 式 (a) と式 (b) より、 $x_S$  を消去すれば、 $a_x$  と  $V$  の関係式は次のようになる。

$$a_x = \boxed{\frac{k d}{m V_0}} \times V \quad (c)$$

#### (補注 1)

最近の加速度計では、図 1 のような液体の粘性力を利用した減衰器ではなく、電磁力によっておもりの振動を減衰させ、ばねの伸びが  $0$  の位置に静止させる。おもりに固定された磁石にコイルで発生させた磁場を作用させて、おもりの運動を制御するのである。おもりの位置は電圧計の読みからわかる。原点に静止したおもりに働く慣性力を電磁力が打ち消す。その電磁力はコイルを流れる電流の向きと大きさからわかる。よって、その電流を測定すれば、おもりに働く慣性力の向きと大きさが分かり、それより移動体の加速度の向きと大きさがわかる。

#### (II)

(7)  $b$  端が回転するときの接線速度は  $r\omega$  であるから、 $\ell_1 = \boxed{r \omega t_1}$

(8) 光が  $a$  端から入射して、環状路  $L$  を時計まわりに伝わって  $b$  端に達するまでの時間が  $t_1$  で、

その間の伝播距離が  $2\pi r - \ell_1$  であるから,

$$t_1 = \frac{2\pi r - \ell_1}{\frac{c}{n} - \alpha r \omega}$$

(9) 上の 2 式から,  $\ell_1$  を消去して  $t_1$  を求めれば,

$$t_1 = \frac{2\pi r}{\frac{c}{n} + (1 - \alpha) r \omega}$$

(10) (7) と同様に,  $\ell_2 = r \omega t_2$

(11) b 端から入射して, 環状路を反時計まわりに伝わって a 端に達するまでの伝播距離は

$2\pi r + \ell_2$  であるから,  $t_2 = \frac{2\pi r + \ell_2}{\frac{c}{n} + \alpha r \omega}$  となる。これに (10) の  $\ell_2$  を代入して  $t_2$  を求めれば,

$$t_2 = \frac{2\pi r}{\frac{c}{n} - (1 - \alpha) r \omega}$$

(12)  $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{4\pi r^2 \omega (1 - \alpha)}{\left(\frac{c}{n}\right)^2 - (1 - \alpha)^2 (r \omega)^2}$

(13) ここで,  $(r \omega)^2$  が  $c^2$  に比べれば無視できること, および  $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$  を用いれば,

$$\Delta t \doteq \frac{4\pi r^2 \omega}{c^2} n^2 (1 - \alpha) = \frac{4A\omega}{c^2}$$

(14) 光波が 1 回振動すると位相が  $2\pi$  だけ変化するから, 時間差  $\Delta t$  に対応する位相差は,

$$\phi = 2\pi \nu \Delta t = \frac{8\pi \nu A}{c^2} \times \omega \quad (\text{d})$$

となる。この関係式は実験によって検証されている。

#### (補注 2)

環状路 L が  $N$  巻の場合には, 上式の  $2\pi r$  が  $2\pi r N$  となり,  $N$  巻の光ファイバーで囲まれる面積  $A$  が  $\pi r^2 N$  となるので, 式 (d) は変わらない。

式 (d) が示すように, 位相差  $\phi$  は光ファイバーの屈折率  $n$  に依らない。その他にも, 実験によれば, 式 (d) は,

- (ア) 環状路の形に依らない。(円形ではなく, 多角形でもよい。)
- (イ) 環状路の回転中心の位置に依らない。(円の中心  $O$  でない点のまわりに回転していてもよい。)
- (ウ) 測定位置に依らない。(慣性系ではなく, 移動体上で測定してもよい。)

これらを説明するには特殊相対論が必要となるので, [大学生向きの解説](#)として別稿で説明する。

(III)

(15) 問題文にある近似式を用いて近似計算をすれば,

$$\begin{aligned}\Delta L &= \overline{P_a P_k} - \overline{P_b P_k} = \sqrt{h^2 + \left(z_k + \frac{\ell}{2}\right)^2} - \sqrt{h^2 + \left(z_k - \frac{\ell}{2}\right)^2} \\&= h \left\{ 1 + \left(\frac{z_k + \frac{\ell}{2}}{h}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - h \left\{ 1 + \left(\frac{z_k - \frac{\ell}{2}}{h}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\&\doteq h \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z_k + \frac{\ell}{2}}{h}\right)^2 \right\} - h \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z_k - \frac{\ell}{2}}{h}\right)^2 \right\} = \boxed{\frac{\ell}{h}} \times z_k\end{aligned}$$

(16)  $P_b$  を通る光に対する  $P_a$  を通る光の位相の遅れは, ピンホールを通るときに  $\phi$  だけあり, さらに  $P_k$  で重なるまでに, 経路差による位相の遅れが  $2\pi \frac{\Delta L}{\lambda}$  だけあるので,

$$\psi(z_k, \phi) = \boxed{\phi + 2\pi \frac{\ell}{\lambda h} z_k}$$

(17)  $P_k$  が明点になる条件  $\psi(z_k, \phi) = 2\pi k$  より,  $z_k(\phi)$  を求めれば,

$$z_k(\phi) = \boxed{\frac{\lambda h}{2\pi \ell} (2\pi k - \phi)}$$

(18) 位相のずれ  $\phi$  に起因する縞模様のずれ  $\Delta z$  は,

$$\Delta z = z_k(\phi) - z_k(0) = \boxed{-\frac{\lambda h}{2\pi \ell}} \times \phi$$

となり,  $k$  に依存しない。 $\Delta z > 0$ , すなわち縞模様が  $z$  軸の正の向きにずれるときには,  $\phi < 0$  で,  $P_a$  を通る光は  $P_b$  を通る光より位相が  $-\phi$  だけ進む。このとき式 (d) より  $\omega < 0$  で, 移動体 A は図 2 において時計まわりに回転していることになる。

(IV)

問 1 移動体 A の運動を 10s ごとに分けて論じる。以下では,  $\Delta t = 10\text{s}$  とする。

(i)  $0\text{s} \leq t \leq 10\text{s}$  のとき

$\omega = 0 \text{ rad/s}$  であるから, 移動体 A に固定された  $x$  軸の向き (A の姿勢) は変わらない。

$a_x = 1 \text{ m/s}^2$ ,  $a_y = 0 \text{ m/s}^2$  であるから, A は  $X$  軸上を等加速度運動する。その結果,  $t = 10 \text{ s}$  のときに, A は位置  $X = \frac{1}{2} a_x t^2 = 50 \text{ m}$  に達し, 速度が  $V_x = a_x t = 10 \text{ m/s}$  となる。

以下では,  $X_0 = 50 \text{ m}$ ,  $V_0 = 10 \text{ m/s}$  とする。

(ii)  $10\text{s} \leq t \leq 20\text{s}$  のとき

$\omega = \frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$  であるから,  $\Delta t$  の間に A に固定された  $x$  軸の向きが,  $XY$  面上で反時計まわりに, 角度  $\theta = \omega \Delta t = \pi \text{ rad}$  だけ回転する。すなわち  $x$  軸の向きが半回転する。その間,  $a_x = 0$  であるから, A の  $x$  軸方向の速さ  $|v_x|$  は  $t = 10 \text{ s}$  のときの速さ  $V_0 = 10 \text{ m/s}$  のまま変化しない。A の運動



を半径  $R$  の円運動とすれば,  $R = \frac{V_0}{\omega} = \frac{100}{\pi} \text{ m}$  で, 速度  $v_x$  に垂直な向心加速度の大きさは  $R \omega^2 = \pi \text{ m/s}^2$  となり,  $a_y$  の測定値と一致する。よって, A は  $(X, Y) = (X_0, R)$  を回転中心とする半径  $R$  の等速円運動をし,  $t = 20\text{s}$  のときに半回転して,  $(X, Y) = (X_0, 2R) = \left(50 \text{ m}, \frac{200}{\pi} \text{ m}\right)$  に達する。そのときの速度は,  $V_X = -V_0 = -10 \text{ m/s}$ ,  $V_Y = 0 \text{ m/s}$  となる。

問 2

(iii)  $20\text{s} \leq t \leq 30\text{s}$  のとき

$\omega = 0 \text{ rad/s}$ ,  $a_x = a_y = 0 \text{ m/s}^2$  であるから, A は  $x$  軸の向きを  $X$  軸の負の向きに向けたまま,  $V_X = -V_0$  の速度で等速直線運動をし,  $t = 30 \text{ s}$  のときに,

$$(X, Y) = (X_0 - V_0 \Delta t, 2R) = \left(-50 \text{ m}, \frac{200}{\pi} \text{ m}\right) \text{ の位置に達する。}$$

(iv)  $30\text{s} \leq t \leq 40\text{s}$  のとき

(ii) と同様に, A は速さ  $V_0$  で等速円運動をして, 半径  $R$  の円軌道を半回転する。そして  $t = 40\text{s}$  のときに,  $(X, Y) = (-50 \text{ m}, 0 \text{ m})$  に達し, 速度は  $(V_X, V_Y) = (10 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s})$  になる。

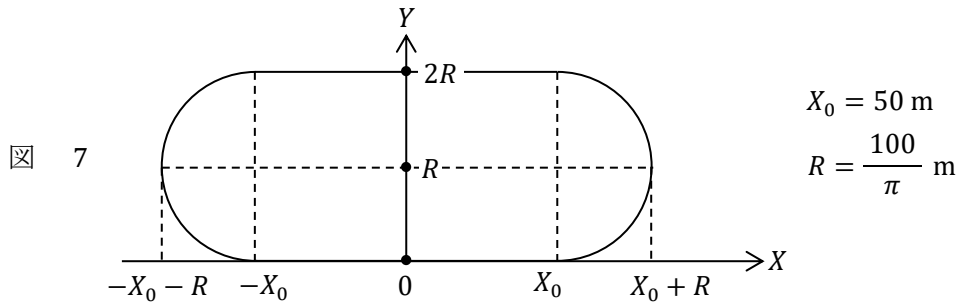
(v)  $40\text{s} \leq t \leq 50\text{s}$  のとき

$\omega = 0 \text{ rad/s}$ ,  $a_x = -1 \text{ m/s}^2$ ,  $a_y = 0 \text{ m/s}^2$  であるから, A は  $x$  軸の向きを  $X$  軸の正の向きに向けたまま, 等加速度直線運動をし,  $t = 50 \text{ s}$  のときの位置と速度は,

$$(X, Y) = \left(-X_0 + V_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2, 0 \text{ m}\right) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$$

$$(V_X, V_Y) = (V_0 + a_x \Delta t, 0 \text{ m/s}) = (0 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s})$$

となり, 原点で静止する。これらを図示すれば, 図 7 のようになる。



(補注 3)

$10\text{s} \leq t \leq 20\text{s}$  の運動を解析的に追跡すれば, 次のようになる。 $T = t - 10\text{s}$  として, 時刻  $T$  での移動体の加速度の  $(X, Y)$  成分を  $(A_X, A_Y)$  とする。時刻  $T$  のとき,  $x$  軸の回転角は  $\omega T$  であるから,  $(A_X, A_Y)$  と  $(a_x, a_y)$  の間には, 図 8 に示されているように,

$$A_X = a_x \cos \omega T - a_y \sin \omega T, \quad A_Y = a_x \sin \omega T + a_y \cos \omega T$$

が成り立つ。この間の加速度計の測定値は,

$$a_x = 0 \text{ m/s}^2, \quad a_y = \pi \text{ m/s}^2 \equiv a$$

であるから,

$$A_X = -a \sin \omega T, \quad A_Y = a \cos \omega T$$

となる。これらを  $T$  で積分し、初期条件:  $T = 0$  s のとき,  $V_X = V_0 = 10$  m/s ,  $V_Y = 0$  m/s を用いれば,

$$V_X = V_0 - \frac{a}{\omega} (1 - \cos \omega T), \quad V_Y = \frac{a}{\omega} \sin \omega T$$

を得る。この間、角速度計の測定値は、 $\omega = \frac{\pi}{10}$  rad/s であるから、 $V_0 - \frac{a}{\omega} = 0$  m/s を満たす。よって、

$$V_X = \frac{a}{\omega} \cos \omega T$$

となる。これらを  $T$  で積分し、初期条件:  $T = 0$  のとき,  $X = X_0 = 50$  m ,  $Y = 0$  m を用いれば、

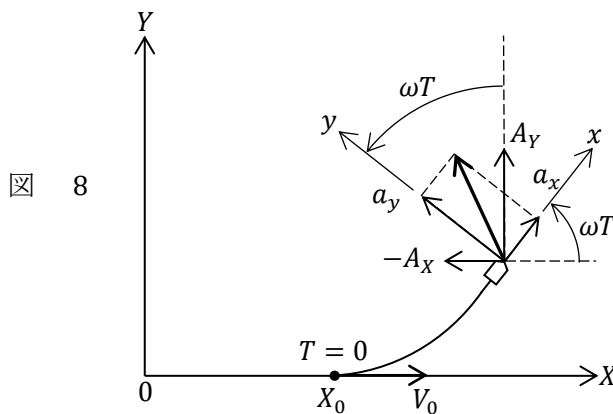
$$X = X_0 + \frac{a}{\omega^2} \sin \omega T, \quad Y = \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega T)$$

となる。これら 2 式より  $\omega T$  を消去し、 $\frac{a}{\omega^2} = \frac{100}{\pi}$  m を  $R$  とおけば、

$$(X - X_0)^2 + (Y - R)^2 = R^2$$

となり、軌道は、 $X = X_0 = 50$  m ,  $Y = R = \frac{100}{\pi}$  m を中心とする半径  $R = \frac{100}{\pi}$  m の円となる。

$T = 10$  s のとき、 $\omega T = \pi$  rad となるので、A は半円を描く。



3次元空間での実際の慣性航法では、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の加速度とそれらの軸のまわりの角速度を時々刻々計測し、それらを地球の中心に固定した座標軸、あるいは実際の航行にとって便利な座標軸から見た値に変換する。そして、それらを時間で2回数値積分して、速度と位置を求める。それには高速のコンピュータが必要となるが、計算誤差の累積は避けられず、そのままでは正しい航路から大きくずれてしまう。そのため、時々 GPS などの外部情報を基にして補正をしなければならない。

他の演習問題へ