

問題 33 重力レンズ

光速度を c , 万有引力定数を G として, 次の文中の に適切な数式または数値を書き入れよ。必要ならば, 次の近似式を用いよ。

$$|x| \ll 1 \text{ のとき, } (1+x)^n \approx 1+nx, \quad \tan x \approx \sin x \approx x$$

光線が重力 (万有引力) によって曲げられることは, 一般相対論から導き出される予測の一つであり, その予測値は天体観測によって検証されている。ここではまず, 一般相対論以前に得られた予測について論じる。次に, 一般相対論の予測値を用いて, 重力レンズによる像の一例を考察する。

(A) 光の粒子説による予測

図 1 のように, 自転していない星 S (質量 M , 半径 R) の表面すれすれに, 粒子 P (質量 m) が速さ v_0 で入射し, 星 S が及ぼす重力によって, その軌道が微小角 δ だけ曲げられる場合を考える。

δ のおおよその値を知るために, 次のような粗い近似計算をしよう。粒子 P は直線 L 上の区間 AB (長さ $2R$) を通過する間だけ, 星 S から L に垂直な方向に一定の大きさ mg の力を受けるものとする。ただし, g は星 S の表面近傍での重力加速度の大きさを,

$$g = \text{ } \quad (1) \quad \text{①}$$

と表される。入射の速さ v_0 が大きいときには, 粒子 P が AB 間を通過する間に, L に垂直な方向の速度成分が 0 からほんの少しだけ変化する。その微小変化量は (2) である。したがって, 星 S を通り過ぎた後, 粒子 P の速度の向きは, 微小角 δ だけ変化する。近似式を用いて δ を求め, 得られた式を, G, M, R, v_0 を用いて表せば,

$$\delta \approx \text{ } \quad (3) \quad \text{②}$$

となる。

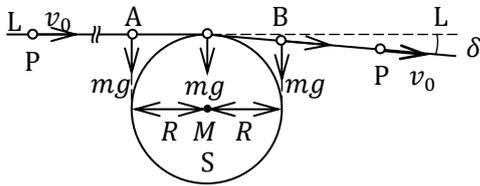


図 1

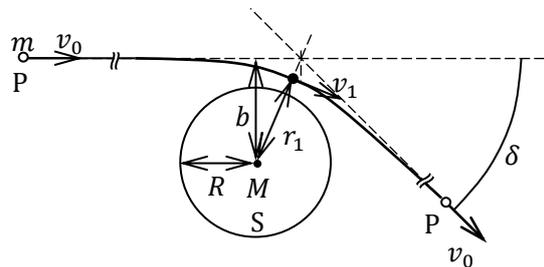


図 2

軌道の曲がり角 δ を厳密に計算するには、次のようにすればよい。粒子 P は、星 S が及ぼす重力によって、図 2 のような双曲線軌道を描く。S から十分遠く離れているときの P の速さを v_0 、S の中心から双曲線の漸近線に下した垂線の長さを b 、P が S に最も近づいたときの S の中心からの距離を r_1 、そのときの速さを v_1 とする。これらの物理量の間には、P に対する面積速度一定の法則より、 (4) が成り立ち、力学的エネルギー保存則より、 (5) が成り立つ。ただし、無限遠での位置エネルギーを 0 とする。これら 2 式より、 v_1 を消去し、 $r_1 > 0$ であることに注意して、 r_1 を求めれば、 $r_1 = (6)$ となる。 $\frac{GM}{bv_0^2}$ が 1 に比べて十分小さいときには、 $\frac{GM}{bv_0^2}$ の 2 次以上の微小量を見捨てて近似計算をすれば、

$$r_1 \doteq (7) \tag{3}$$

となる。一方、双曲線の性質から、 b 、 r_1 、 δ の間に、

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{b^2 - r_1^2}{2br_1} \tag{4}$$

の関係があるので、 $\frac{GM}{bv_0^2}$ が 1 に比べて十分小さいときには、 δ も小さくなる。式 ③ と式 ④ より、近似式を用いて δ を求めれば、

$$\delta \doteq (8) \tag{5}$$

となる。さらに $\frac{GM}{bv_0^2} \ll 1$ のときには、式 ③ より、 $r_1 \doteq b$ となり、粒子 P が星 S の表面すれすれに通過する条件は、 $b \doteq r_1 \doteq R$ となる。これを式 ⑤ に代入すれば、

$$\delta \doteq (9) \equiv \delta_p \tag{6}$$

となり、式 ② と一致する。

1801 年にゾルトナー (J.G. von Soldner) は、光線が微粒子の流れであると仮定し、太陽近傍を通過して地球に達する光線の曲がり角 δ_p を式 ⑥ から求めた。

$$v_0 = c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$$

として、 δ_p の値を求めれば、

$$\delta_p \doteq (10) \text{ rad}$$

となる。

ところが、同じ 1801 年にヤング (T. Young) は、二重スリットの干渉実験によって、光が干渉を起こすことを実証した。これによって光は波動であることが確定し、ゾルトナーが得た結果は忘れ去られてしまった。

(B) 等価原理による予測

一様な重力場に静止座標系 $K - xyz$ を設定し, 図 3a のような箱 B を設置する。重力の向きは z 軸の負の向きで, 重力加速度の大きさは g である。箱 B の左側面にある穴 H から, 質量 m の粒子 P を x 軸の正の向きに速さ v_0 で投げ入れれば, 粒子 P は放物軌道を描き, 右側面の

$$z_c = \boxed{\text{(11)}} \tag{7}$$

の位置に衝突する。衝突するときの速度の向きが x 軸の正の向きとなす角度を $\delta (> 0)$ とする。

v_0 が大きいときには, δ は微小角となり,

$$\delta \doteq \boxed{\text{(12)}} \tag{8}$$

と表される。

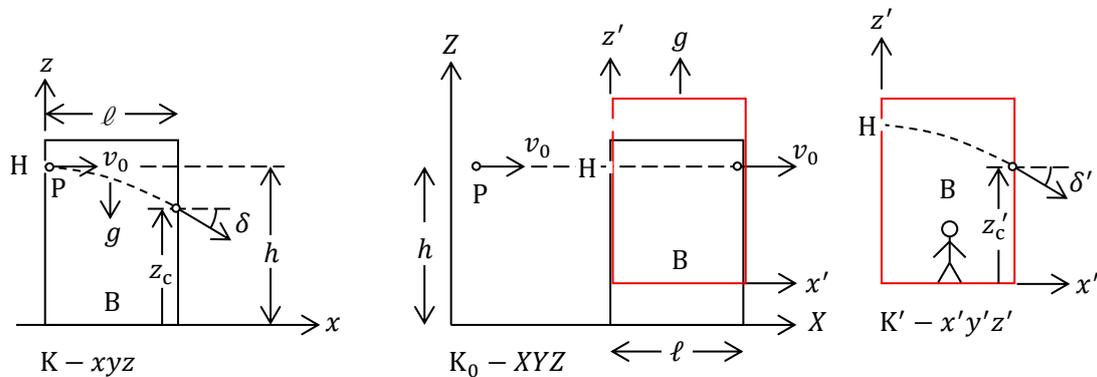


図 3a

図 3b

次に, 宇宙空間に慣性系 $K_0 - XYZ$ を設定し, 図 3b のように箱 B を設置する。星々は遠くにあるので, 粒子 P にはたらく重力は無視できる。粒子 P を X 軸の正の向きに速さ v_0 で打ち出すと, 粒子 P は慣性系 K_0 に対して等速度で運動する。粒子 P が箱 B の穴 H を通過する瞬間から, 箱 B に一定の力を及ぼして, Z 軸の正の向きに等加速度 g で上昇させる。箱 B に固定された座標系を $K' - x'y'z'$ とする。このとき, 箱 B に乗って粒子 P の運動を見れば, その加速度と穴 H を通過するときの速度の x' 成分と z' 成分は, それぞれ,

$$(a_{x'}, a_{z'}) = (\boxed{\text{(13a)}}, \boxed{\text{(13b)}}), \quad (v_{x'0}, v_{z'0}) = (\boxed{\text{(14a)}}, \boxed{\text{(14b)}})$$

となる。よって, 加速系 K' から見た粒子 P の軌道は, 静止座標系 K から見た放物軌道と同じになる。

右側面での衝突の位置 z'_c と軌道の曲がり角 δ' についても式 ⑦ と式 ⑧ が成り立つ。加速系 K' でもニュートンの運動方程式が成り立っているとすれば, 加速系 K' から見た粒子 P には, z' 方向に

$$\boxed{\text{(15)}} \text{の力がはたらいていると考えなければならない。この力を慣性力という。}$$

このように, 加速系 K' と静止座標系 K から見た粒子 P の運動は見分けがつかず, 同等であると言える。この同等性は他の力学現象に対しても成り立つ。

1911年にアインシュタイン(A. Einstein)は、力学現象に限らず、物理学のすべての現象に対してこの同等性が成り立つとした。これを等価原理と言う。これを認めると次のようなことが言える。

まず、古典論的で素朴な見方に基づいて、思考実験を行なう。電波は電磁波であるが、光子の集団の流れと見ることもできる。図 3b において、粒子 P の代わりに光のパルスを用いれば、 v_0 が c となるだけで、加速系 K' から見れば、平均的な光子は放物軌道を描き、右側面に蛍光塗料を塗っておけば、式 ⑦ で表わされる点の近傍を光らせる。そして、式 ⑧ で与えられる角度だけ平均的な光子の軌道が曲げられる。このとき等価原理が成り立てば、重力場のなかの静止座標系 K から見て、平均的な光子は放物軌道を描き、光線は重力の向きに曲げられることになる。

アインシュタインは光子を持ち出さず、光波の進行方向をホイヘンスの原理から求めた。その準備として、アインシュタインは等価原理を用いて、重力場のなかの光速度が、遠くの定点から見て、

$$c(W) = c_0 \left(1 + \frac{W}{c^2} \right) \quad \text{⑨}$$

で与えられることを導き出した。ここに、 c は慣性系での光速で、伝播方向には依らない定義定数である。 W は重力ポテンシャル(単位質量あたりの重力の位置エネルギー)、 $c(W)$ は重力ポテンシャルが W である位置での光速で、 c_0 は W の基準点($W = 0$)での光速である。

ここでは計算を簡単にするために、図 4a のように、 $x = 0$ と $x = \ell$ の間の空間にのみ、 z 軸方向の一様な重力場があるとし、その重力加速度を $-g$ とする。重力場が存在する空間内で、 $z = 0$ の面を重力ポテンシャルの基準面とし、 $z = z_1$ と $z = z_2$ の面での重力ポテンシャルをそれぞれ W_1 、 W_2 とすると、

$$W_1 = \boxed{\quad (16a) \quad}, \quad W_2 = \boxed{\quad (16b) \quad} \quad \text{⑩}$$

と表される。

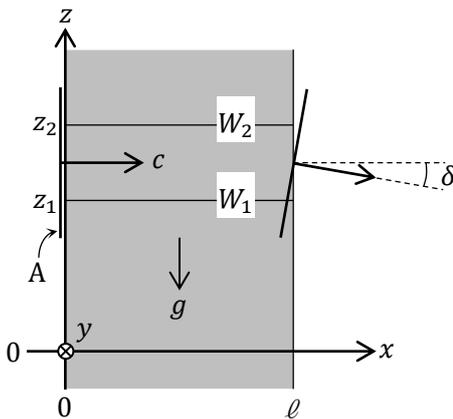


図 4a

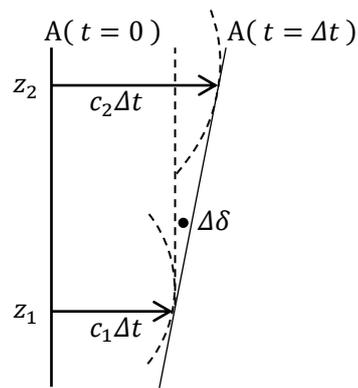


図 4b

いま、 $x < 0$ の領域を x 軸の正の向きに伝播する平面波 A が、 $x = 0$ を通過する時刻を $t = 0$ とする。これから微小時間 Δt だけ経ったときの波面は、ホイヘンスの原理から次のようにして求めることができる。以下では紙面 ($y = 0$) 内を伝播する光波を考える。 $t = 0$ のときに A の波面上の位置 z_i ($i = 1, 2$) から x 軸方向に広がった素元波の $t = \Delta t$ における半径は $c_i \Delta t$ である。ただし、

$c_i = c(W_i)$ である。このとき A の波面は図 4b に示されているように、これら 2 つの素元波に接する面であり、 z 軸に対して微小角 $\Delta\delta$ だけ傾いている。光波の伝播する向きは波面に垂直な向きであるから、微小時間 Δt の間に光波の伝播方向は $\Delta\delta$ だけ変化する。これを、 $c_1, c_2, W_1, W_2, \Delta t$ を用いて表せば、

$$\Delta\delta = \boxed{\quad (17) \quad} \tag{11}$$

となる。さらに、式 ⑨ と式 ⑩ を用いてこれを書き換え、 $c, c_0, g, \Delta t$ を用いて表せば、

$$\Delta\delta = \boxed{\quad (18) \quad} \tag{12}$$

となる。

ブラックホールの近傍のような強い重力場を除けば、一般的に、 $c_0 \equiv c_1 \equiv c_2 \equiv c$ である。また、 $\Delta\delta$ は微小角であるので、図 4a の幅の ℓ を通過する間の曲がり角 δ は、微小時間 Δt の間の曲がり角 $\Delta\delta$ の和としてよい。このとき、 c, g, ℓ を用いて δ を表せば、次のようになる。

$$\delta \equiv \sum \Delta\delta = \boxed{\quad (19) \quad} \tag{13}$$

われわれの目標は、星 S の表面すれすれに通過した光波の曲がり角 δ を求めることである。(A) の粒子説で採用した図 3a のような重力場で粗い近似計算をしたときの結果はすでに求められている。式 ⑬ の g に式 ① を代入し、 ℓ の代わりに $2R$ を代入すると、

$$\delta \equiv \boxed{\quad (20) \quad} \equiv \delta_w \tag{14}$$

となり、粒子説の式 ② で、 $v_0 = c$ とした式と一致する。

実際の光波の場合には、図 5 のように、光波は重力ポテンシャルが一定の面に沿って伝播しない。よって、 δ を求めるには積分計算をしなければならない。実際に計算を実行すると、 δ は式 ⑭ と同じになる。この一致は、(A) の粒子説で、図 3a の近似計算による結果と図 3b の厳密な計算による結果が一致するのと同じ関係になっている。

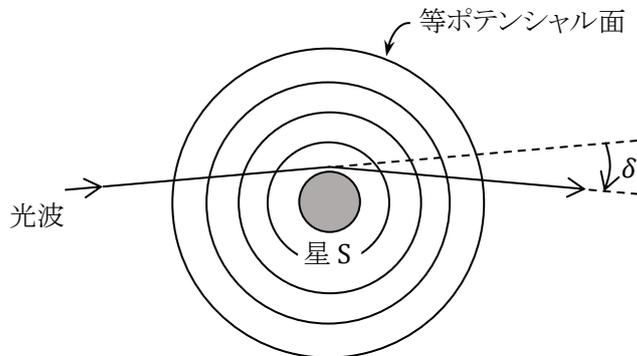


図 5

(C) 重力レンズ

1916年にアインシュタインは一般相対性理論 (General theory of Relativity) を完成させ、それを用いて星 S による光線の曲がり角 δ を求めた。その結果は、

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 R} \equiv \delta_{GR} \quad (15)$$

で、式 (14) の 2 倍である。

1919年にエディントン (A.S.Eddington) は、皆既日食のときに太陽の近傍に見える星の位置を 2 地点で測定し、その光の曲がり角 δ が 1.98 秒角と 1.61 秒角になるという結果を得た。これらは式 (15) から計算される値に近い。現在では精確な測定によって、式 (15) が 1% 以下の誤差で成り立つことがわかっている。

式 (15) の応用として、次のような現象を考える。

図 6 のように、点状の明るい天体 C と大質量の球状天体 D (質量 M , 半径 R) と地球 E が一直線上に並んでいるとする。CD 間と DE 間の距離はそれぞれ R_1, R_2 で、 $R_1 \gg R, R_2 \gg R$ が成り立っている。いま、C を発した光が D の表面すれすれに通過して E に達したとする。図の角度 θ_1 と θ_2 は微小角であるから、 $\theta_1 \cong \frac{R}{R_1}, \theta_2 \cong \frac{R}{R_2}$ としてよい。これらと式 (15) から、 R は c, G, M, R_1, R_2 を用いて、

$$R = \boxed{\quad} \quad (21) \quad (16)$$

と表される。図 6 の光線には直線 CDE のまわりの回転対称性があるから、地球から見れば、天体 C は光の輪に見える。 $\overline{CE} = R_C$ と $\overline{DE} = R_D$ を用いて、その角半径を表せば、

$$\theta_2 = \boxed{\quad} \quad (22)$$

となる。これをアインシュタインリングという。実際、宇宙望遠鏡によって、アインシュタインリングと考えられる天体がいくつか発見されている。

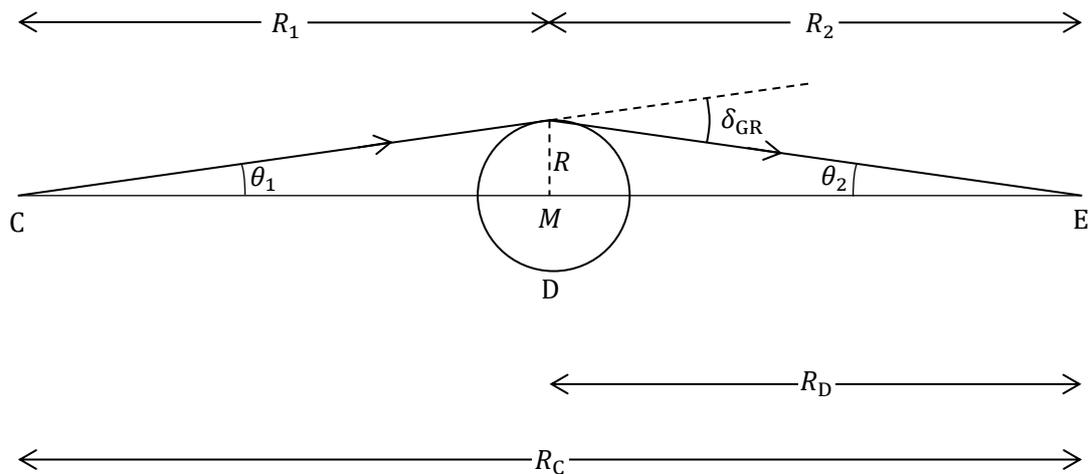


図 6

問題 33 の解答と解説

(A)

(1) 星 S の表面近傍において、重力加速度 g で落下する質量 m の粒子にはたらく力は、星 S の全質量 M がその中心に集まったと考えたときに及ぼす万有引力に等しいから、粒子の運動方程式より、

$$m \cdot g = G \frac{M m}{R^2} \quad \rightarrow \quad g = \boxed{\frac{G M}{R^2}} \quad \text{①}$$

を得る。

(2) 直線 L の方向の速度成分は v_0 のまま変化しないから、A B 間を通過する時間 t_{AB} は $\frac{2R}{v_0}$ である。この間に、L に垂直な方向の速度成分は、0 から、

$$\Delta v = g t_{AB} = \boxed{g \frac{2R}{v_0}} = \boxed{\frac{2GM}{R v_0}}$$

だけ変化する。

(3) この速度変化が v_0 に比べて十分小さいときには、速度ベクトルの向きの変化 δ も小さいから、近似式を用いれば、

$$\delta \approx \tan \delta = \frac{\Delta v}{v_0} = \boxed{\frac{2GM}{R v_0^2}} \quad \text{②}$$

となる。

(4) 面積速度は、星 S の中心から見たときの粒子の位置ベクトルと速度ベクトルを二辺とする三角形の面積に等しいから、面積速度一定の法則より、

$$\boxed{\frac{1}{2} b v_0 = \frac{1}{2} r_1 v_1}$$

が成り立つ。

(5) また、力学的エネルギー保存則より、

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1}}$$

が成り立つ。

(6) これら 2 式より v_1 を消去して、 r_1 に対する方程式を導けば、

$$v_0^2 r_1^2 + 2GM r_1 - b^2 v_0^2 = 0$$

となる。 $r_1 > 0$ に注意してこれを解けば、

$$\begin{aligned} r_1 &= \boxed{\sqrt{b^2 + \left(\frac{GM}{v_0^2}\right)^2} - \frac{GM}{v_0^2}} \\ &= b \left[\left\{ 1 + \left(\frac{GM}{b v_0^2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{GM}{b v_0^2} \right] \end{aligned}$$

を得る。

(7) $\frac{GM}{bv_0^2} \ll 1$ のときには、近似計算によって $\frac{GM}{bv_0^2}$ の 1 次の微小量だけを残せば、次のようになる。

$$r_1 \doteq b \left[\left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{GM}{bv_0^2} \right)^2 \right\} - \frac{GM}{bv_0^2} \right] \doteq \boxed{b \left(1 - \frac{GM}{bv_0^2} \right)} \quad (3)$$

(8) 問題文に与えられた式④に式③を代入し、近似計算をすれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \tan \frac{\delta}{2} &\doteq \left\{ b^2 - b^2 \left(1 - \frac{GM}{bv_0^2} \right)^2 \right\} \left\{ 2b^2 \left(1 - \frac{GM}{bv_0^2} \right) \right\}^{-1} \\ &\doteq \left\{ 1 - \left(1 - 2 \frac{GM}{bv_0^2} \right) \right\} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{GM}{bv_0^2} \right) \\ &\doteq \frac{GM}{bv_0^2} \end{aligned}$$

右辺が 1 と比べて十分小さいときには、 δ は微小角となる。よって、近似式を使えば、

$$\delta \doteq 2 \tan \frac{\delta}{2} \doteq \boxed{\frac{2GM}{bv_0^2}} \quad (5)$$

を得る。

(9) 粒子 P が星 S の表面すれすれに通過する条件は、 $b \doteq R$ であるから、そのときの δ は、

$$\delta = \boxed{\frac{2GM}{Rv_0^2}} \doteq \delta_P \quad (6)$$

となり、式②と一致する。添字の P は Particle (粒子) の頭文字である。

粗い近似計算で δ を求めるとき、区間 AB ではたらく重力だけを考慮し、その他の区間では重力を無視しているので、 δ を過小評価することになる。一方、区間 AB ではたらく重力をその区間の最大値 mg で置き換えているので、 δ を過大評価することになる。この過小評価と過大評価が打ち消し合うために、粗い近似計算で求めた式②が、厳密な計算で求めた式⑥と一致するのである。

(10) 式⑥に与えられた数値を代入すれば、次のようになる。

$$\delta_P \doteq \frac{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}}{7.0 \times 10^8 \text{ m} \times (3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2} = \boxed{4.3 \times 10^{-6}} \text{ rad}$$

となる。この角度を秒角単位で表せば、 $\delta_P \doteq 8.8$ 秒角となる。

(B)

(11) 右側面に衝突するまでの時間は、 $t_c = \ell / v_0$ であるから、

$$z_c = h - \frac{1}{2} g t_c^2 = \boxed{h - \frac{g \ell^2}{2 v_0^2}} \quad (7)$$

となる。

(12) 衝突直前の速度の z 成分は、 $v_z = -g t_c = -g \ell / v_0$ であるから、

$$\delta \doteq \tan \delta = \frac{|v_z|}{v_0} = \boxed{\frac{g \ell}{v_0^2}} \quad (8)$$

となる。

(13) (14) 慣性系 K_0 に対する粒子 P と加速系 K' の加速度成分は、それぞれ、

$$(a_{PX}, a_{PZ}) = (0, 0), \quad (a_{K'X}, a_{K'Z}) = (0, g)$$

であるから、加速系 K' に対する粒子 P の相対加速度成分は、

$$(a_{x'}, a_{z'}) = (a_{PX} - a_{K'X}, a_{PZ} - a_{K'Z}) = \left(\boxed{0}, \boxed{-g} \right)$$

同様に、穴 H を通過するときの加速系 K' に対する粒子 P の相対速度成分は、

$$(v_{x'0}, v_{z'0}) = (v_0 - 0, 0 - 0) = \left(\boxed{v_0}, \boxed{0} \right)$$

となり、静止座標系 K に対する粒子 P の加速度成分、初速度成分と同じになる。

(15) 加速系 K' から見たときに粒子 P にはたらく力の z' 成分を $f_{z'}$ とすれば、運動方程式より、

$$f_{z'} = m a_{z'} = \boxed{-mg}$$

を得る。これは重力 (万有引力) ではなく、慣性力 (見かけの力) である。

(16) 位置 z_i における質量 m の粒子の重力による位置エネルギーは、 $U_i = m g z_i$ であるから、

$$W_1 = \frac{U_1}{m} = \boxed{g z_1}, \quad W_2 = \frac{U_2}{m} = \boxed{g z_2} \quad (10)$$

となる。

(17) (18) 図 4b より、

$$\Delta\delta \doteq \tan \Delta\delta = \frac{c_2 \Delta t - c_1 \Delta t}{z_2 - z_1} = \boxed{\frac{c_2 - c_1}{z_2 - z_1} \Delta t} \quad (11)$$

を得る。式 ⑩ と問題文にある式 ⑨ を用いて、これを書き換えれば、次のようになる。

$$\Delta\delta \doteq \frac{c_0 \frac{W_2 - W_1}{c^2}}{z_2 - z_1} \Delta t = \boxed{\frac{c_0 g}{c^2} \Delta t} \quad (12)$$

(19) 重力場を通過する間、光波はほぼ x 軸方向に伝わると考えてよいので、 δ を求めるには、式 ⑫ の Δt を通過時間 t_ℓ で書き換えればよい。題意より、

$$t_\ell \doteq \frac{\ell}{c_2} \doteq \frac{\ell}{c_1} \doteq \frac{\ell}{c_0}$$

としてよいので、

$$\delta \doteq \frac{c_0 g}{c^2} \frac{\ell}{c_0} = \boxed{\frac{g \ell}{c^2}} \quad (13)$$

となる。

(20) 式 ⑬ に、 $g = G M / R^2$ と $\ell = 2 R$ を代入すると、

$$\delta \doteq \boxed{\frac{2 G M}{c^2 R}} \equiv \delta_W \quad (14)$$

となる。添字の W は Wave (波動) の頭文字である。

図 5 のような一般的な状況 (ただし $\delta \doteq 0$) でも式 ⑭ が成り立つことの証明は (参考) にある。

(C)

(21) 図 6 より,

$$\delta_{GR} = \theta_2 + \theta_1 = R \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

を得る。これと問題文にある式 ⑮ より R を求めれば、次のようになる。

$$R = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{⑯}$$

(22) $R_1 = R_C - R_D$ と $R_2 = R_D$ を用いて式 ⑯ を書き換え、アインシュタインリングの角半径 θ_2 を求めれば,

$$\theta_2 = \frac{R}{R_2} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{R_C - R_D}{R_C R_D}}$$

となる。もし、天体観測によって R_C , R_D , θ_2 が測定されれば、天体 D の質量 M がわかる。たとえば、C が銀河で D が銀河団であれば、銀河団の質量がわかる。銀河団の質量の大部分を占めるのは、目には見えない正体不明の暗黒物質であると考えられているので、もしこのような測定ができれば、それは重要な情報となる。しかし、一般的には、C, D, E が一直線上に並ぶ確率は小さい上に、暗黒物質の分布も一様ではないので、重力レンズで得られる多くの銀河の歪んだ画像から暗黒物質の空間分布を求めるのは容易でない。

なお、重力によって光線が曲がり、そのために天体の歪んだ像が見える現象を重力レンズによる像と呼んでいるが、たとえば図 6 において、天体 D の近傍を通るすべての光線が、光学レンズによる結像のように、地球 E の一点に集まってくるわけではないので、注意を要する。

(参考)

星 S の重力による光波の曲がり角 δ は微小であるから、第 0 近似では、図 7 の x 軸に沿って光波が進むとしてよい。波面 A が位置 x から dx だけ微小変位したとき、星 S の重力ポテンシャル $\Phi(r)$ が $d\Phi$ だけ微小変化したとする。同じ微小変化 $d\Phi$ は、図 7 に示されているように、 z 方向と r 方向に、それぞれ dz , dr だけ微小変位したときにも生じる。

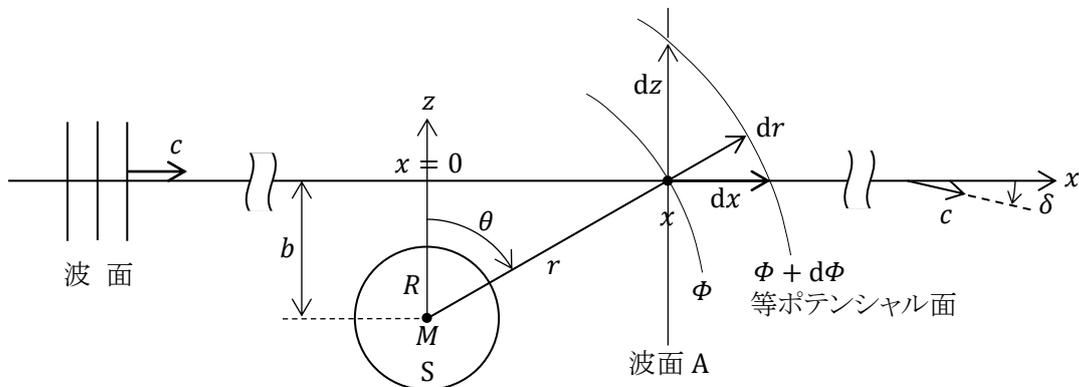


図 7

波面 A が dx だけ進む間に、光波の進行方向が $d\delta$ だけ変化したとする。図 4a において、 θ を dx に、 $z_2 - z_1$ を dz に、 $W_2 - W_1$ を $d\Phi$ に、 δ を $d\delta$ に書き換えれば、式 ⑩ と問題文に与えられた式 ⑨ より、

$$d\delta = \frac{c_0}{c^2} \frac{d\Phi}{dz} \frac{dx}{c} \doteq \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dz} dx$$

を得る。一方、

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad r = \frac{b}{\cos\theta}, \quad x = b \tan\theta, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}$$

であるから、

$$d\delta = \frac{\cos\theta}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial r} dx = \frac{\cos\theta}{c^2} \frac{GM}{r^2} dx = \frac{GM}{c^2 b} \cos\theta d\theta$$

となる。よって、光波が星 S を通り過ぎる間 $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ の曲がり角は、

$$\delta = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} d\delta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{GM}{c^2 b} \cos\theta d\theta = \frac{2GM}{c^2 b}$$

となる。星 S の表面すれすれに通過する ($b \doteq R$ の) ときには、この δ は式 ⑭ の δ_W となる。

$\delta_{GR} = 2\delta_W$ となることは、一般相対論を持ち出さなくても、等価原理と特殊相対論を用いて導出できることを Schiff (L.I.Schiff) が示した。それについては次の解説記事を見られたい。

<https://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/hikarinowankyoku.pdf>

他の演習問題へ