

問題 32 コンプトン効果と逆コンプトン効果

光速を c , プランク定数を h として, 次の文中の を適切な数式または数値で埋め, 問いに答えよ。

(A) 高エネルギー粒子の相対論的エネルギーを表す式を導入する。

質量 m の粒子が光速に近い速度で運動しているとき, 特殊相対論によれば, そのエネルギー E は, 運動量の大きさを p として,

$$E = \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2} \quad \text{①}$$

で与えられる。この式は低速度で運動しているときにも成り立つ。粒子の速度の大きさを v として, $v \ll c$ が成り立つとき, $mv \cong p \ll mc$ となるので, $|x| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 :

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{(a)}$$

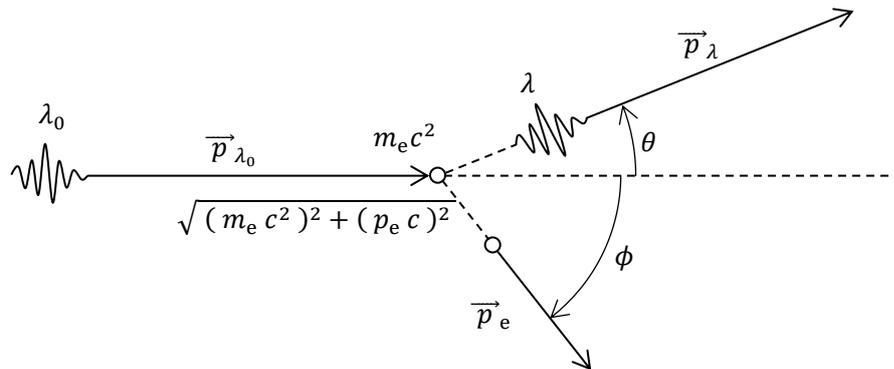
を用いて, 式 ① を書き換えれば,

$$E \cong m c^2 + \text{} \quad \text{(1)}$$

となる。右辺の第 1 項は静止エネルギー (または質量エネルギー) で, 第 2 項は運動エネルギーである。

(B) コンプトン効果を相対論的に取り扱ってみよう。静止している電子 (質量 m_e) に波長 λ_0 の X 線を照射すると, 図 1 のように, 電子は ϕ 方向に跳ね飛ばされ, X 線光子は θ 方向に散乱される。散乱される X 線の波長 λ は λ_0 より長くなる。この現象をコンプトン効果という。

図 1



跳ね飛ばされた電子の運動量ベクトルを \vec{p}_e , 散乱前後の X 線光子の運動量ベクトルを, それぞれ \vec{p}_{λ_0} , \vec{p}_λ とする。このとき運動量保存則より,

$$\vec{p}_{\lambda_0} = \vec{p}_\lambda + \vec{p}_e$$

が成り立ち, これら三つのベクトルは三角形をなす。それに余弦定理を適用すると, $p_e^2 = |\vec{p}_e|^2$ は, h , λ_0 , λ , θ を用いて,

$$p_e^2 = \text{} \quad \text{②}$$

と表される。

一方、跳ね飛ばされる前後の電子のエネルギーは、それぞれ $m_e c^2$, $\sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}$ と表される。これらと c , h , λ_0 , λ を用いれば、エネルギー保存則は、

$$m_e c^2 + \boxed{\text{(3a)}} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} + \boxed{\text{(3b)}} \quad \text{③}$$

と表される。式②と式③より p_e^2 を消去して、散乱によるX線の波長の伸び $\Delta\lambda$ を求めれば、

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \boxed{\text{(4)}} \quad \text{④}$$

となる。 $\theta = 90^\circ$ のときの $\Delta\lambda$ の値を電子のコンプトン波長と言い、 λ_e で表す。その数値を、

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}, \quad m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

を用いて求めれば、

$$\lambda_e = \boxed{\text{(5)}} \text{ m} \quad \text{⑤}$$

となる。

コンプトン (A. H. Compton, 1923) は、モリブデンを標的とするX線管から発せられた波長 $\lambda_0 = 7.1 \times 10^{-11} \text{ m}$ のX線をグラファイトに照射し、 θ 方向に散乱されるX線の波長 λ とその強度 I を測定した。図2はその結果をグラフで表したものである。

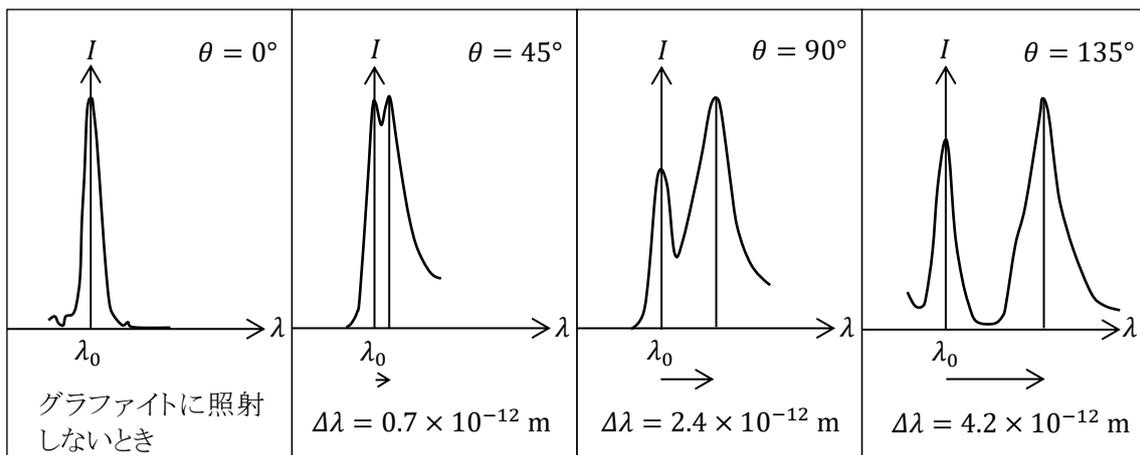


図 2

散乱X線の波長の伸び $\Delta\lambda$ は、式④の理論値と一致している。これによって、電磁波であるX線が粒子の性質をもつことが明らかになった。この業績によって、コンプトンはノーベル賞を受賞した。

問1 グラファイトに含まれる電子は炭素原子とその結晶の表面に束縛されている。それにも拘らず、自由電子を仮定して得られた式④の理論値が測定値と一致する。その理由を述べよ。

ヒント：グラファイトの仕事関数は 5 eV ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$) 程度である。

ウー (Y. H. Woo, 1926) は、銀を標的とするX線管から発せられた波長 $\lambda_0 = 5.6 \times 10^{-11} \text{ m}$ のX線を様々な元素に照射し、 $\theta = 120^\circ$ の方向に散乱されるX線の波長 λ とその強度 I を測定した。図3はその実験結果をグラフで表したものである。これらのグラフが示すように、元素の原子番号が大きくなるにつれて、波長変化を伴わない散乱X線の強さに対する波長変化を伴う散乱X線の

強さの比が減少する。また, Li の場合, 波長変化を伴わない散乱 X 線はない。

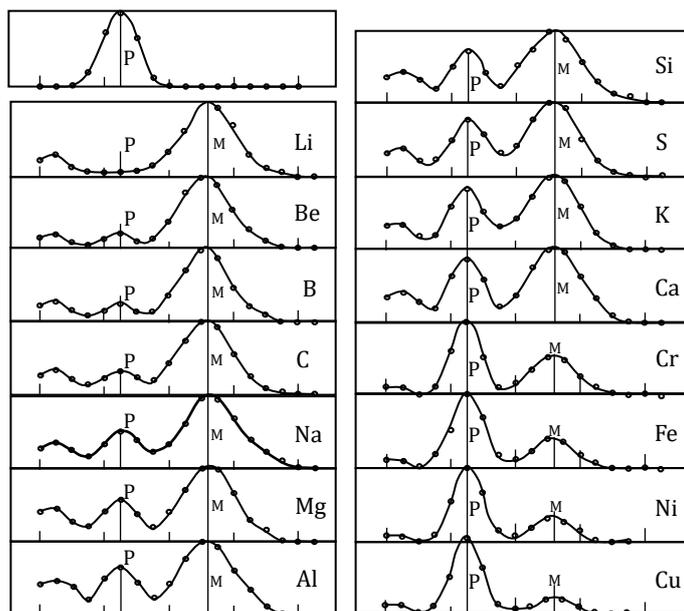
問 2 これらの結果をもとにして, 波長変化を伴わない散乱 X 線が何によって散乱されるのかを述べよ。

ヒント: 式④は, 電子に限らず, 質量 m の荷電粒子に対しても成り立つ。そのときには式④の m_e を m に置き換えればよい。

図 3

様々な元素の試料に, 波長が $5.6 \times 10^{-11} \text{ m}$ の X 線を照射したときに, $\theta = 120^\circ$ の方向に散乱される X 線のスペクトル。

左上の図は, 照射 X 線のスペクトル。いずれも強度の最大値が同じになるように規格化されている。左側のスペクトル線の頂点の波長を P で表し, P から $\Delta\lambda = \lambda_e(1 - \cos 120^\circ) = 3.64 \times 10^{-12} \text{ m}$ だけ長い波長を M としている。M は右側のスペクトル線の頂点の波長と一致している。



(C) コンプトン効果では, X 線光子が電子を跳ね飛ばすことによって, 光子のエネルギーの一部が失われ, その減少分が電子のエネルギーの増加分になる。これとは逆に, 高エネルギーの電子が低エネルギーの光子を跳ね飛ばすことによって, エネルギーが電子から光子へ移送される現象を考えてみよう。このような現象を逆コンプトン効果という。

簡単のために, 図 4 のように, 直線上で電子と光子が正面衝突する場合を考える。



図 4

衝突前後の電子の運動量の大きさを, それぞれ p_{e0} , p_e とし, 衝突前後の光子の波長を, それ

ぞれ λ_0, λ とする。電子のエネルギーは、衝突前が $E_0 = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_{e0} c)^2}$, 衝突後が $E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}$ と表される。衝突のときに成り立つ運動量保存則とエネルギー保存則より、次の式が成り立つ。

$$p_{e0} - \boxed{(6a)} = p_e + \boxed{(6b)} \quad (6)$$

$$\sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_{e0} c)^2} + \boxed{(7a)} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} + \boxed{(7b)} \quad (7)$$

これら 2 式より、 p_e を消去して、 λ を求めれば、

$$\lambda = \lambda_0 \times \boxed{(8)} \quad (8)$$

となる。

いま、入射する電子の速度が光速に近く、 $p_{e0} c \gg m_e c^2$ を満たしているとし、入射光子のエネルギーは電子の静止エネルギー $m_e c^2$ に比べれば無視できるとする。このとき、近似式 (a) を用い、

$\gamma = \frac{p_{e0}}{m_e c}$ として、式 (8) の近似式を λ_0 と γ だけで表せば、

$$\lambda = \lambda_0 \times \boxed{(9)} \quad (9)$$

となる。

以下では、式⑨が関与する現象の一例を考える。

宇宙空間は宇宙背景放射と名付けられたマイクロ波で満たされている。これは、高温・高密度の火の玉であった初期の宇宙が、断熱膨張によって温度を下げ、現在その残り火として放射する電磁波である。そのスペクトルは 2.7 K の黒体から放射されるものとほぼ同じで、平均的な波長は、 $\lambda_0 = 2 \times 10^{-3}$ m である。

一方、宇宙には $10^2 \sim 10^4$ 個ほどの明るい銀河から成る銀河団があり、そのなかに 10^6 K ~ 10^7 K の電離ガスが閉じ込められている。電離ガスの成分である自由電子のなかには、光速に近い速度で飛び回っているものがある。

たとえば、このような高エネルギーの電子が、上記の平均的な波長 λ_0 の宇宙背景放射光子に、つづけて 3 回正面衝突をした結果、光子の波長が段階的に短くなって、最終的に X 線光子になったとする。ただし、衝突する 3 つの電子はすべて同じ $\gamma = 10$ の値を持っているとする。このとき生じる X 線光子の波長は $\boxed{(10)}$ m である。

銀河団から放射される X 線は、このような逆コンプトン効果によって生じるという仮説がある。

問題 32 の解答と解説

相対論的エネルギーを表す式①は高校物理の範囲外であるが、1985年に三重大学の入試問題に登場したことがある。非相対論的エネルギーを表す式を用いて式④を導出するには、近似計算をしなければならず、その近似の仕方が足かせとなって、問題作成者を悩ませる。式①を用いれば、近似計算をすることなく、簡単に式④を導出できるのである。しかも、式④が非相対論的な場合にのみ近似的に成り立つのではなく、相対論的な場合も含めて厳密に成り立つことが示される。ここでは、逆コンプトン効果を取り扱うために、敢えて相対論の式①を導入した。

(A) (1) 近似式(a)を用いて式①を書き換えれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2} &= (m c^2) \sqrt{1 + \left(\frac{p c}{m c^2}\right)^2} \\ &\doteq (m c^2) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p c}{m c^2}\right)^2 \right\} = m c^2 + \boxed{\frac{p^2}{2 m}} \doteq m c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m v^2} \end{aligned}$$

(参考 1)

相対論では、質量 m 、速度 \vec{v} (速さ v) の粒子のエネルギー E と運動量 \vec{p} は次のように表される。

$$E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

ただし、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

である。 γ をローレンツ因子という。 E と $p = |\vec{p}|$ から β を消去すれば、

$$E = \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2} \tag{1}$$

を得る。また、 $\beta \doteq 1$ で $\gamma \gg 1$ のときには、

$$\frac{p}{m c} = \frac{\gamma m v}{m c} = \gamma \beta \doteq \gamma$$

となる。この近似式は (C) の最後に出てくる。

(B) (2) 図 5 の三角形を構成する光子の運動量ベクトルの大きさは、

$$|\vec{p}_{\lambda_0}| = \frac{h}{\lambda_0}, \quad |\vec{p}_{\lambda}| = \frac{h}{\lambda}$$

であるから、余弦定理より次の式を得る。

$$p_e^2 = \boxed{\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2 \left(\frac{h}{\lambda_0}\right) \left(\frac{h}{\lambda}\right) \cos \theta}$$

.....②

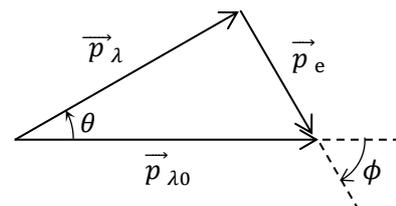


図 5

(3a)(3b) 散乱前後の光子のエネルギーは、それぞれ $\frac{hc}{\lambda_0}$, $\frac{hc}{\lambda}$ であるから、エネルギー保存則より次の式が成り立つ。

$$m_e c^2 + \boxed{\frac{hc}{\lambda_0}} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} + \boxed{\frac{hc}{\lambda}} \quad (3)$$

(4) 式③を変形すれば、

$$\begin{aligned} (m_e c^2)^2 + (p_e c)^2 &= \left\{ m_e c^2 + \left(\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} \right) \right\}^2 \\ &= (m_e c^2)^2 + 2(m_e c^2) hc \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda} + c^2 \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow p_e^2 = 2 m_e hc \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda} + \left(\frac{h}{\lambda_0} \right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 - 2 \left(\frac{h}{\lambda_0} \right) \left(\frac{h}{\lambda} \right)$$

となる。これと式②より次の式を得る。

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \boxed{\frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)} \quad (4)$$

(5) 式④に $\theta = 90^\circ$ を代入すれば、コンプトン波長は次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \frac{h}{m_e c} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}} = \boxed{2.43 \times 10^{-12}} \text{ m} \end{aligned} \quad (5)$$

(参考2)

式④が示すように、コンプトン効果による波長の伸び $\Delta\lambda$ は入射 X 線の波長 λ_0 に依存しない。したがって、コンプトン効果は X 線以外の電磁波でも生じる。コンプトン波長 λ_e は X 線と γ 線の波長の境界域にある。よって、 γ 線はコンプトン効果によってその波長を大きく変えるが、紫外線より波長の長い電磁波 ($\lambda_0 > 10^{-9} \text{ m}$) では波長変化の割合 ($\Delta\lambda / \lambda_0$) が小さく、検出が困難になる。

(参考3)

電子が跳ね飛ばされる方向 ϕ と X 線光子が散乱される方向 θ の関係を求める。運動量保存則を、X 線光子の入射方向とそれに垂直な方向に成分分解して表せば、次のようになる。

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda} \cos \theta + p_e \cos \phi$$

$$0 = \frac{h}{\lambda} \sin \theta - p_e \sin \phi$$

これらと式④を用いれば、次のような関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \phi} &= \frac{p_e \cos \phi}{p_e \sin \phi} = \frac{\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \cos \theta}{\frac{h}{\lambda} \sin \theta} = \frac{\lambda - \lambda_0 \cos \theta}{\lambda_0 \sin \theta} \\ &= \frac{\lambda_0 + \lambda_e (1 - \cos \theta) - \lambda_0 \cos \theta}{\lambda_0 \sin \theta} = \left(1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_0} \right) \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \left(1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_0} \right) \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\theta = 0 \rightarrow 90^\circ \rightarrow 180^\circ \text{ のとき, } \phi = 90^\circ \rightarrow \text{Arctan} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_e}{\lambda_0}} \rightarrow 0$$

と変化する。Arctan x は $\tan x$ の逆関数である。

次に、電子のエネルギーの増加分 ΔE は、式③と式④を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} - m_e c^2 = \frac{h c}{\lambda_0} - \frac{h c}{\lambda} \\ &= \frac{h c}{\lambda_0 \lambda} (\lambda - \lambda_0) = \frac{h c}{\lambda_0 \lambda} \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{\left(\frac{h c}{\lambda_0}\right)^2}{m_e c^2} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}} \end{aligned}$$

と表される。 $\Delta \lambda \ll \lambda_0$ の場合には、

$$\Delta E \cong \frac{\left(\frac{h c}{\lambda_0}\right)^2}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \leq 2 \frac{\left(\frac{h c}{\lambda_0}\right)^2}{m_e c^2}$$

となる。たとえば、 $\lambda_0 = 10^{-10} \text{ m}$ の X 線の場合であれば、

$$\frac{(\Delta E)_{\max}}{\left(\frac{h c}{\lambda_0}\right)} = 2 \frac{\frac{h c}{\lambda_0}}{m_e c^2} = 0.0485$$

となり、入射 X 線光子から電子へ移送されるエネルギーは、入射エネルギーの 5 % 以下である。

問 1 波長 $\lambda_0 = 7.1 \times 10^{-11} \text{ m}$ の入射 X 線光子のエネルギーは、

$$\frac{h c}{\lambda_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{7.1 \times 10^{-11} \text{ m}} = 2.80 \times 10^{-15} \text{ J} = 1.75 \times 10^4 \text{ eV}$$

で、これに比べれば、5 eV というグラファイトの仕事関数（結晶表面にある電子を外部へ取り出すのに必要な最小の仕事）は無視できるほど小さい。よって、この電子を跳ね飛ばすのに使われるエネルギーは、自由電子の場合と同じ、と見なせるからである。

問 2 $\theta = 120^\circ$ の方向に散乱される X 線光子のうち、元素が変わっても同じ波長変化を伴うものは、自由電子と見なしてもよい最外殻電子（結晶ならその表面に弱く束縛された電子）によって散乱されたものである。原子番号が大きくなると、最外殻電子以外の束縛電子が増え、しかもそれらはより強く原子核に束縛されるようになる。これらの電子に X 線光子が衝突すると、原子から剥ぎ取るのにより大きなエネルギーが必要となるので、電子を殻外へ跳ね飛ばすことができない場合が出てくる。このような原子核と強く結びついた電子、言い換えれば、原子核ほどの質量をもつ仮想的な電子によって X 線が散乱されても、そのコンプトン波長は 0 に近くなり、波長の伸びは θ に関係なくほぼ 0 となる。原子番号が大きくなると、このような束縛電子が増えるので、図 3 に見られるように、波長の変化を伴わない X 線光子の散乱が増え、波長の変化を伴う X 線光子の散乱の数は相対的に減少する。

よって、波長変化を伴わない散乱 X 線は、強く原子核と結びついた束縛電子 との衝突によると考えられる。それが原子核による散乱でないことは、Li に波長変化を伴わない散乱 X 線がないことからわかる。Li の原子核に結びついた束縛電子はすべて跳ね飛ばされると考えられる。

(C) (6)(7) 図4において、右向き運動量を正とすると、運動量保存則より、

$$p_{e0} - \frac{h}{\lambda_0} = p_e + \frac{h}{\lambda} \quad (6)$$

が成り立ち、エネルギー保存則より、

$$\sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_{e0} c)^2} + \frac{h c}{\lambda_0} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} + \frac{h c}{\lambda} \quad (7)$$

が成り立つ。

(8) 式⑥より、 p_e^2 を求めれば、

$$p_e^2 = p_{e0}^2 - 2 p_{e0} \left(\frac{h}{\lambda_0} + \frac{h}{\lambda} \right) + \left(\frac{h}{\lambda_0} + \frac{h}{\lambda} \right)^2$$

となる。式⑦より、 p_e^2 を求めれば、

$$p_e^2 = p_{e0}^2 + 2 \sqrt{(m_e c)^2 + p_{e0}^2} \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \right) + \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \right)^2$$

となる。これら二式より、 p_e^2 を消去して λ を求めれば、次のようになる。

$$\lambda = \lambda_0 \times \frac{\sqrt{(m_e c)^2 + p_{e0}^2} - p_{e0} + 2 h / \lambda_0}{\sqrt{(m_e c)^2 + p_{e0}^2} + p_{e0}} \quad (8)$$

(9) 問題文に与えられた条件： $p_{e0} c \gg m_e c^2 \gg h c / \lambda_0$ を考慮して、式⑧の近似式を求めれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_0} &= \frac{p_{e0} \sqrt{1 + \left(\frac{m_e c}{p_{e0}} \right)^2} - p_{e0} + \frac{2 h}{\lambda_0}}{p_{e0} \sqrt{1 + \left(\frac{m_e c}{p_{e0}} \right)^2} + p_{e0}} \\ &\doteq \frac{\left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_e c}{p_{e0}} \right)^2 \right\} - 1 + \frac{2 h}{\lambda_0} \frac{1}{p_{e0}}}{\left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_e c}{p_{e0}} \right)^2 \right\} + 1} \\ &\doteq \frac{1}{4} \left(\frac{m_e c}{p_{e0}} \right)^2 = \frac{1}{4 \gamma^2} \quad (9) \end{aligned}$$

(10) 式⑨を用いれば、3回の正面衝突によって、光子の波長は段階的に次のように変化することがわかる。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\lambda_0}{4 \gamma^2} = 5 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{4 \gamma^2} = 1.25 \times 10^{-8} \text{ m}, \\ \lambda_3 &= \frac{\lambda_2}{4 \gamma^2} = 3.125 \times 10^{-11} \text{ m} \doteq \boxed{3 \times 10^{-11}} \text{ m} \end{aligned}$$

因みに、 $\gamma = 10$ の電子の速さ v は、光速度 c の99.5%である。

(参考)

このような発生機構で実際の銀河団から放射されるX線のスペクトルを求めるには、宇宙背景放射のスペクトルと銀河団内の高エネルギー電子のエネルギー分布および3次元空間での逆コンプトン散乱の断面積(衝突確率)をもとにして計算しなければならない。その結果は観測値をよく

説明すると思われていたのであるが、その後、この仮説と矛盾する観測結果が出て来て、現在では別の仮説(制動放射仮説)が支持されているようである。

銀河のなかには、中心核から莫大な量のエネルギーを放出している活動銀河がある。中心核には大質量のブラックホールとそれを取り囲む降着円盤があり、放出エネルギーにはX線放射も含まれている。ある種の活動銀河では、X線の発生機構が逆コンプトン効果であると考えられている。ただし、種となる光子は宇宙背景放射ではなく、高温の降着円盤から放射される光子が、それを取りまく高温プラズマのなかの光速に近い電子によって散乱されているらしい。

逆コンプトン効果が原因となって生じる現象で、最近とくに注目されているのがスニャーエフ・ゼルドビッチ効果である。宇宙背景放射が銀河団を通過して地球に達すると、銀河団内の高温プラズマの電子による逆コンプトン散乱のために、そのスペクトルが、図7のように、わずかに変化する現象である。ここで想定している電子は光速に近いものだけではなく、温度が $10^6\text{ K} \sim 10^7\text{ K}$ の熱電子全体である。スペクトルの変化を求める計算はWEB上で見ることができ、大学3年生程度の知識が必要である。

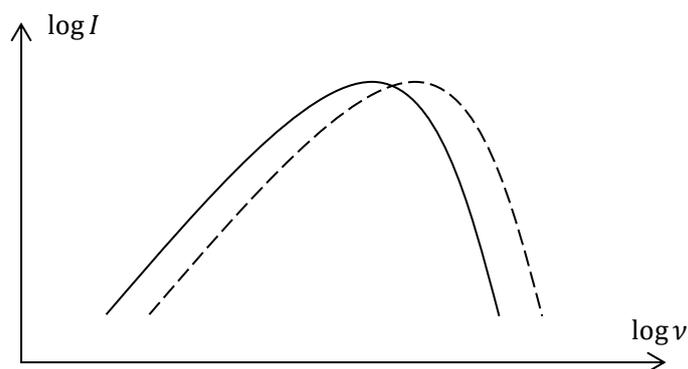


図7 宇宙背景放射のスペクトル

両対数グラフで表してあり、 ν は振動数($= c/\lambda$)、 I は強度である。実線は銀河団を通過しないときのスペクトルで、破線は銀河団を通過したときのスペクトルである。スペクトルのずれは誇張して描いてある。

スペクトルのずれは地球から銀河団までの距離には依らない。このことから、あまりにも遠くにあるために、可視光などでその存在を同定できないような銀河団であっても、その方向からやってくる宇宙背景放射にスニャーエフ・ゼルドビッチ効果が認められれば、その方向の彼方に銀河団があることがわかる。このようなデータが集まると、宇宙の構造や進化に関する情報が得られる。

[他の演習問題へ](#)