

問題 31 系外惑星の発見

太陽以外の恒星の周りを回っている惑星を系外惑星という。系外惑星を探索する観測は二十世紀後半に始まり、1995 年にマイヨール (M. Mayor) とケロズ (D. Queloz) によって始めて発見された。その業績によって、彼らにノーベル賞が授与された。ここでは系外惑星の探索方法について考える。

万有引力定数を G 、光速度を c として、次の文中の に適切な数式を書き入れ、問に答えよ。数式は () 内の物理量を用いて表せ。

(I) 図 1 のように、質量 M の恒星 S と質量 m の惑星 P が、たがいに万有引力を及ぼし合いながら、両者の共通重心 C の周りに円軌道を描いている。回転方向は反時計回りである。惑星 P の軌道半径を a とすれば、恒星 S の軌道半径は (1) (M, m, a) である。重心 C に対する惑星 P の回転速度の大きさ v は、運動方程式から求まり、 (2) (G, M, m, a) となる。同様に、恒星 S の回転速度の大きさ V は (3) (G, M, m, a) となる。惑星 P と恒星 S がそれぞれの円軌道を一周する時間 T は (4) (G, M, m, a) である。

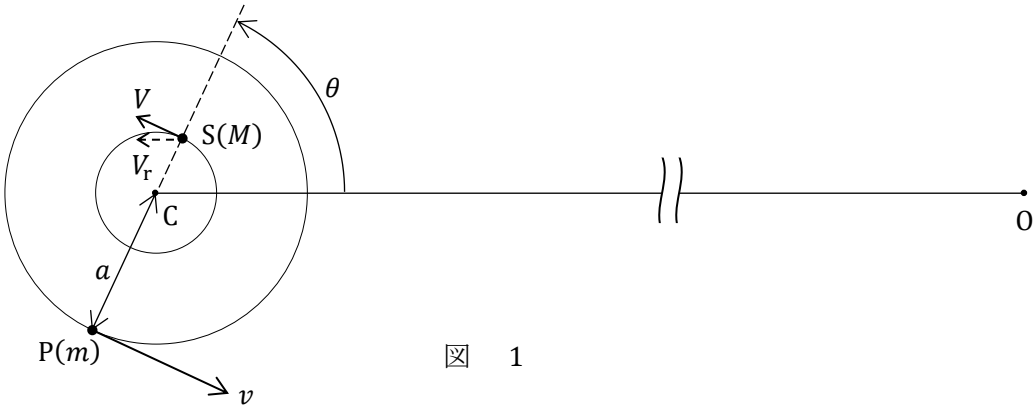
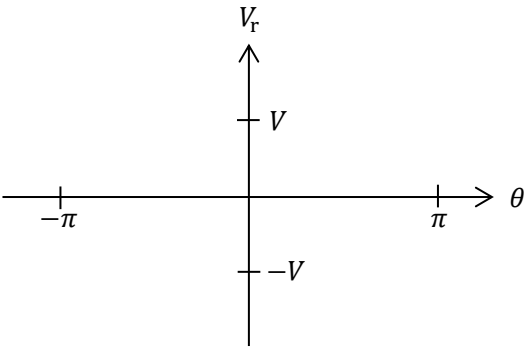


図 1

惑星 P と恒星 S の軌道面上で、重心 C から十分遠く離れた点 O において、恒星 S を観測する。重心 C は観測点 O に対して静止しているとする。線分 CO を基準にして測った恒星の回転角を θ とする。

問 1 恒星 S の回転速度の CO 方向の成分 (視線速度) V_r と θ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) の関係を表すグラフを図 2 に描け。ただし、観測点 O から遠ざかる視線速度を正とする。

図 2



(II) 系外惑星を望遠鏡によって直接的に観測することは困難であるが、見えない惑星の万有引力によって、恒星がふらつくのを検出できれば、惑星の存在を間接的に証明したことになる。そのふらつきを光のドップラー効果によって測定する。

恒星間の相対速度は光速より十分小さいので、光のドップラー効果は音波のドップラー効果と同じように扱ってよい。

図 1 において、視線速度 V_r の恒星 S から放射された波長 λ_0 の光を、 O 点で観測すれば、その波長 λ は (5) (λ_0, c, V_r) となる。このとき、波長のずれの割合 $\delta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$ は時間的に変化し、その最大値 $\delta_{\max}$ は (6) (c, V) となる。

一般的に、恒星の回転速度の大きさ V は光速 c に比べて十分小さい。よって、 $\delta_{\max}$ は 1 に比べて非常に小さく、 δ を分光観測によって検出するのは困難であるが、現在の測定技術では、 $\delta_{\max} \geq 10^{-7}$ であれば、検出可能である。

問 2 仮に、宇宙の彼方にいる観測者が、この技術によって太陽系を観測したとき、太陽系の最大惑星である木星の存在を検出できるかどうかを、次の数値を用いて判定せよ。ただし、観測者は太陽と木星の軌道面上にあり、両者の共通重心に対して静止しているとする。

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad \text{太陽の質量} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{木星の質量} = 1.9 \times 10^{27} \text{ kg}, \quad \text{木星の軌道半径} = 7.8 \times 10^{11} \text{ m}$$

(III) 図 1 の O 点において、恒星 S の可視光の明るさ (単位時間あたりに望遠鏡に入射する可視光のエネルギー) を測定する。図 3a のように、惑星 P が恒星 S の前を右向きに通過するとき、恒星 S の明るさが図 3b のように変化する。時刻 t が t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 のときに、恒星 S に対して惑星 P が見える位置を●で表している。

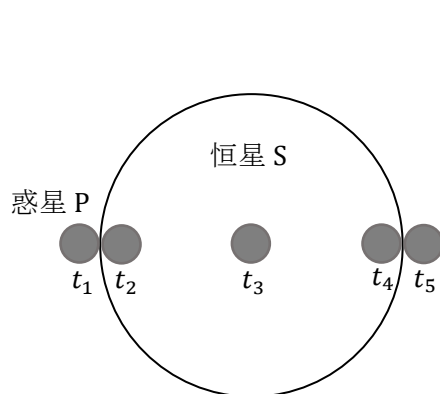


図 3a

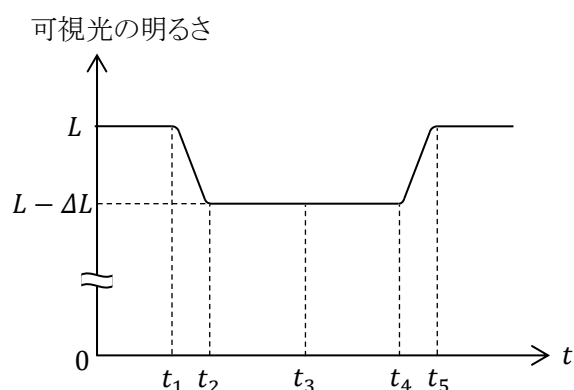


図 3b

惑星 P は恒星 S からの可視光を反射または吸収するだけで、自らは可視光を放射しないので、恒星 S と惑星 P の半径をそれぞれ R, r とすれば、 $\frac{r}{R} =$ (7) ($L, \Delta L$) が成り立つ。ただし、円形にみえる恒星面内の明るさは一様で、中心付近でも周縁部でも同じとする。

以下では、 $r \ll R$ 、 $m \ll M$ 、したがって $V \ll v$ の場合を考える。この場合には、 $M + m \doteq M$ 、 $V + v \doteq v$ としてよい。

図 3b の時刻 t_1 と t_2 の差 $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$ の値が測定できれば、惑星 P の回転速度の大きさ v は、

$$v \doteq \boxed{(8)} (r, \Delta t_{12})$$

となる。さらに、(II) で論じた δ の時間変化が分光観測によって測定できたとすると、周期 T がわかるので、惑星 P の円軌道の半径 a は、次の式から求められる。

$$a \doteq \boxed{(9)} (v, T)$$

次に、 $\delta_{\max}$ の測定値から、

$$\frac{m}{M} \doteq \boxed{(10)} (c, v, \delta_{\max})$$

を得る。よって、惑星 P の平均密度 $\rho_P = m \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)^{-1}$ と恒星 S の平均密度 $\rho_S = M \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-1}$ の比は、次のようになる。

$$\frac{\rho_P}{\rho_S} = \boxed{(11)} (c, v, \delta_{\max}, L, \Delta L)$$

以上の関係式を基にして、次のような仮想的な測定値から、系外惑星 P に関する物理量を求めてみよう。

問 3 恒星 S が太陽と同じスペクトルタイプの星で、その質量と半径が太陽と同じであるとする。
すなわち、

$$M = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$$

とする。また、分光観測の結果から、

$$T = 1.5 \times 10^7 \text{ s}, \quad \delta_{\max} = 1.0 \times 10^{-7}$$

が得られたとし、測光観測の結果から、

$$\frac{\Delta L}{L} = 1.0 \times 10^{-2}, \quad \Delta t_{12} = 3.5 \times 10^3 \text{ s}$$

が得られたとすれば、この惑星 P の軌道半径 a と質量 m と平均密度 ρ_P はいくらになるか。ただし、惑星 P の軌道は円とし、観測点 O は恒星 S と惑星 P の軌道面上にあり、両者の共通重心は観測点 O に対して静止しているとする。

問題 31 の解答と解説

系外惑星の研究は天文学の中でも急速に発展しつつある分野である。系外惑星の発見数は増加し続け、地球型の惑星や水が存在し得る惑星の発見も相次いでいる。近い将来、系外惑星に生物が存在する確たる証拠が見つかるかもしれない。そうなれば、生物学のみならず、我々の自然観や思想・宗教にまで影響を及ぼすことになる。

系外惑星の検出方法については、東京大学(2006年)、奈良県立医科大学(2014年)などの入試問題で扱われている。

(I) (1) 恒星 S の軌道半径を A とすると、重心の定義より、次式を得る。

$$\frac{MA + m(-a)}{M + m} = 0 \quad \rightarrow \quad A = \boxed{\frac{m}{M} a} \quad (1)$$

(2) 惑星 P の運動方程式より、

$$m \frac{v^2}{a} = G \frac{Mm}{(a + A)^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{a}{a + A} \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

を得る。これに式 (1) を代入すれば、次のようになる。

$$v = \boxed{\frac{M}{M + m} \sqrt{\frac{GM}{a}}} \quad (2)$$

(3) 同様に、恒星 S の運動方程式より、

$$M \frac{V^2}{A} = G \frac{Mm}{(a + A)^2} \quad \rightarrow \quad V = \frac{A}{a + A} \sqrt{\frac{Gm}{A}} = \boxed{\frac{m}{M + m} \sqrt{\frac{GM}{a}}} \quad (3)$$

を得る。あるいは、重心 C に固定した慣性系から見ているので、重心の速度 $\frac{MV + m(-v)}{M + m}$ が 0

であること、すなわち、 $V = \frac{m}{M} v$ であることから求めてもよい。

(4) 円軌道を一周する時間(周期) T は、つぎのようになる。

$$T = \frac{2\pi a}{v} = \boxed{2\pi \frac{M + m}{M} \sqrt{\frac{a^3}{GM}}} \quad (4)$$

問 1 観測点 O から見て、恒星 S が後退する向きの視線速度は、

$$V_r = V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V \sin \theta$$

であるから、そのグラフは右図のようになる。 θ を回転運動の位相という。

実際の観測では、ばらばらな時刻 t_i ($i = 1, 2, \dots$) での視線速度 V_{ri} が観測される。多くのデータが集まると、周期 T の値がフーリエ解析によってわかる。この T を用いて、

$$\theta_i = 2\pi \frac{t_i - n_i T}{T} \quad (n_i \text{ は整数})$$

を求め、図 2 を得る。

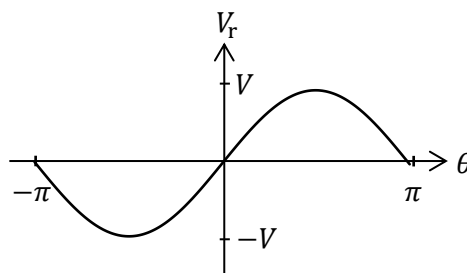


図 2

(Ⅱ)(5) 恒星 S から放射される光の振動数と O 点で観測される光の振動数は、それぞれ c/λ_0 , c/λ であるから、ドップラー効果の公式より、

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \frac{c}{c + V_r}$$

が成り立つ。これより λ を求めれば、次のようになる。

$$\lambda = \boxed{\lambda_0 \frac{c + V_r}{c}} \quad (5)$$

(6) δ の定義式と式 (5) より、

$$\delta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{V_r}{c}$$

を得る。図 2 より、 V_r の最大値は V であるから、 $\delta_{\max}$ は次のようになる (参考 1)。

$$\delta_{\max} = \boxed{\frac{V}{c}} \quad (6)$$

問 2 式 (6) と式 (3) より、太陽・木星系に対する $\delta_{\max}$ は、

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= \frac{m}{M + m} \sqrt{\frac{GM}{a}} \frac{1}{c} \doteq \frac{m}{M} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{GM}{a}} \\ &= \frac{1.9 \times 10^{27} \text{ kg}}{2.0 \times 10^{30} \text{ kg}} \frac{1}{3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} \sqrt{\frac{6.7 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \times 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}}{7.8 \times 10^{11} \text{ m}}} \\ &= 4.2 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

となる。問題文にあるように、 $\delta_{\max} < 10^{-7}$ の場合、現在の技術では 検出できない。

(Ⅲ)(7) 恒星面を見たとき、恒星 S 全体の明るさは、惑星 P によって掩蔽された部分の明るさだけ減少する。明るさの面密度はどこでも同じとしているので、時刻 t_2 と t_4 の間の明るさは、

$$\frac{L - \Delta L}{L} = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}$$

を満たす。これより次の式を得る。

$$\frac{r}{R} = \boxed{\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

(注) 時刻 t_1, t_2, t_4, t_5 の値が測定されれば、次のようにして $\frac{r}{R}$ の値を求めることもできる。

$$\frac{r}{R} = \frac{(V + v)(t_2 - t_1)/2}{(V + v)(t_4 - t_1)/2} = \frac{t_2 - t_1}{t_4 - t_1} \quad \text{または} \quad \frac{t_5 - t_4}{t_5 - t_2}$$

ただし、これが正しいのは、惑星 P が恒星 S の中心を通過するときである。

(8) 時刻 t_1 と t_2 の間に、惑星 P は恒星 S に対して、速さ $V + v$ で $2r$ だけ移動する。よって、次の式を得る。

$$2r = (V + v)(t_2 - t_1) \doteq v \Delta t_{12} \quad \rightarrow \quad v \doteq \boxed{\frac{2r}{\Delta t_{12}}} \quad (8)$$

(9) 分光観測で求めた周期 T は、惑星 P が円軌道を一周する時間に等しい。これより次の式を得る。

$$T = \frac{2\pi a}{v} \quad \rightarrow \quad a = \boxed{\frac{vT}{2\pi}} \quad (9)$$

(注) ここでは論じないが、測光観測を長時間に亘って行うことによっても、周期 T を求めることができる。

(10) 式⑥と $V = \frac{m}{M} v$ より、次の式を得る (参考2)。

$$\delta_{\max} = \frac{V}{c} = \frac{1}{c} \frac{m}{M} v \quad \rightarrow \quad \frac{m}{M} = \boxed{\frac{c}{v} \delta_{\max}} \quad (10)$$

(11) 式⑦と式⑩を用いれば、次のようになる。

$$\frac{\rho_P}{\rho_S} = \frac{m / \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{M / \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)} = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^3 = \boxed{\frac{c}{v} \delta_{\max} \left(\frac{L}{\Delta L} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

問3 式⑦と与えられた数値より、

$$\frac{r}{R} = (1.0 \times 10^{-2})^{\frac{1}{2}} = 0.10$$

となり、 $r = 0.10 \times R = \boxed{7.0 \times 10^7 \text{ m}}$ を得る。この r と式⑧より、

$$v \doteq \frac{2 \times 7.0 \times 10^7 \text{ m}}{3.5 \times 10^3 \text{ s}} = \boxed{4.0 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}$$

となる。さらに、この v と式⑨より、

$$a \doteq \frac{4.0 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} \times 1.5 \times 10^7 \text{ s}}{2 \times 3.14} = \boxed{9.6 \times 10^{10} \text{ m}}$$

を得る。次に、式⑩と与えられた数値より、

$$m = M \times \frac{c}{v} \delta_{\max} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg} \times \frac{3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4.0 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}} \times 1.0 \times 10^{-7} = \boxed{1.5 \times 10^{27} \text{ kg}}$$

を得る。最後に、惑星 P の平均密度は、

$$\rho_P = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{1.5 \times 10^{27} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \times 3.14 \times (7.0 \times 10^7 \text{ m})^3} = \boxed{1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}$$

となる。因みに、惑星 P と恒星 S の密度比は、式⑪より、次のようになる。

$$\frac{\rho_P}{\rho_S} = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^3 = 7.5 \times 10^{-4} \times (10)^3 = 0.75$$

(余談)

この仮想的な惑星 P を太陽系の惑星と比べると、その質量と密度は木星や土星と同程度であるが、軌道半径は金星の軌道半径より小さい。実際の観測でもこのような木星型の惑星が多数見つかり、なぜ巨大な惑星が恒星の近傍に存在するのか、惑星系の形成理論や惑星間の重力相互作用による軌道変化と絡めて、熱い議論が戦わされている。なお、木星と土星の太陽に対する密度比はそれぞれ、0.94, 0.49 である。

(参考 1)

図 4 に示すように、一般的には、恒星 S の軌道面の法線方向 $\vec{n}$ と視線方向 $C \rightarrow O$ のなす角度 i ($0 \leq i \leq \pi$) は直角ではない。よって、ドップラー効果によって測定される視線速度 V_r の最大値 $(V_r)_{\max, \text{obs}}$ は、 V ではなく、 $V \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = V \sin i$ である。また、 $\delta_{\max}$ の測定値も同様に $\delta_{\max, \text{obs}} = \frac{V}{c} \sin i$ となる。

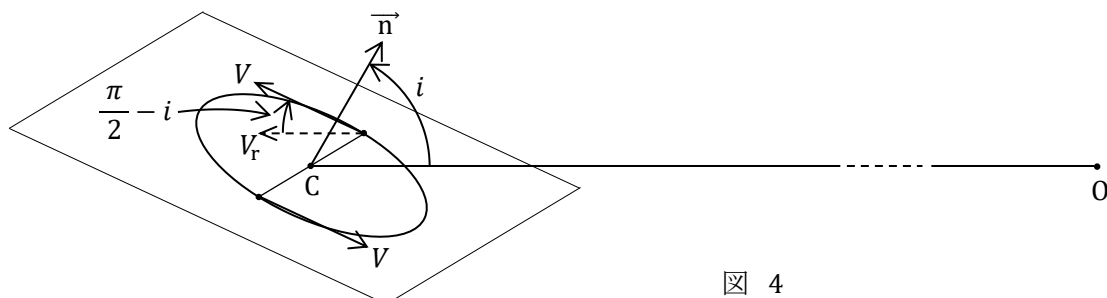


図 4

(参考 2)

実際に観測される $\delta_{\max}$ の値を $\delta_{\max, \text{obs}}$ と表し、これを用いて式 ⑩ から求まる m を m_{obs} と表せば、

$$m_{\text{obs}} = M \frac{c}{v} \delta_{\max, \text{obs}} = M \frac{c}{v} \frac{V}{c} \sin i = m \sin i$$

となる。 i の値は不確定で、 $0 < i < \pi$ であるから、真の質量 $m = \frac{m_{\text{obs}}}{\sin i}$ は、

$$m_{\text{obs}} \leq m < \infty$$

の範囲内にある。すなわち、 i が不確定であれば、惑星の質量はその下限値しかわからない。

(参考 3)

ここでは恒星面の明るさは一様と仮定したが、実際には恒星面の周縁に近づくにつれて、明るさの面密度は減少する。この周縁減光は恒星のスペクトルタイプによって異なる。これも考慮して、惑星 P が恒星面の直径上を通過するときの光度変化を表すグラフ (光度曲線) を理論的に求めることができる。それは、恒星面上での惑星と恒星の中心間距離 d および惑星と恒星の半径比 $p (= r/R)$ をパラメータとする複雑な関数である。

さらに、一般的には i は $\frac{\pi}{2}$ ではないので、惑星は恒星面上を図 5 のように横切る。よって、惑星の半径 r と速さ v は、式 ⑦ と式 ⑧ のような単純な式では求められない。さらに加えて、惑星と恒星の軌道は円軌道ではなく、楕円軌道である可能性もある。実際、楕円軌道の系外惑星が多数発見されている。その楕円軌道のある方向から観測したときの理論光度曲線と観測光度曲線を比較しなければならない。たいへんな作業だが、系外惑星について得られる情報の精度は増す。

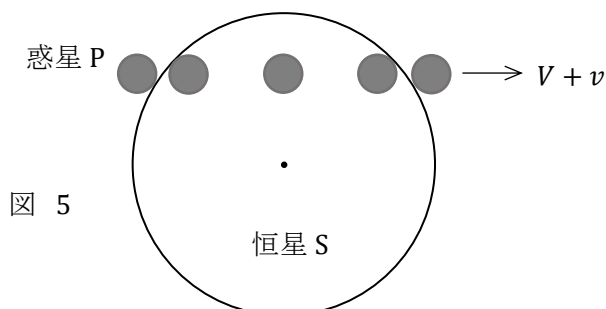


図 5

[他の演習問題へ](#)