

問題 30 宇宙エレベーター

次の文中の を適切な数式で埋めよ。数式は () 内の記号を用いて表せ。

地上から宇宙空間へものを運び上げる効率的な方法として、宇宙エレベーターが構想されている。ここではその構造と用途の一例を物理の立場から考える。万有引力定数を G とし、地球の質量、半径、自転角速度をそれぞれ、 M 、 R_0 、 ω とする。

(Ⅰ) 地上の風景に対して常に同じ方向に見える人工衛星を静止衛星という。この衛星は赤道を含む平面上にあって、地球の中心のまわりを角速度 ω で円運動をしている。その軌道半径 R_1 は、

$$R_1 = \text{ } (G, M, \omega) \quad \text{①}$$

と表される。

(Ⅱ) 静止衛星 B から、一様な密度 ρ と断面積 S のケーブルを鉛直下向きにゆっくり下ろしていく。それと同時に、反対方向にも同じケーブルを延ばす。ケーブルの下端 A が地表に達したとき、上端 C は地球の中心 O から距離 R_2 の点に達した。この間、静止衛星の軌道半径は変わらず、ケーブル全体は直線を保ったまま、角速度 ω で回転している。

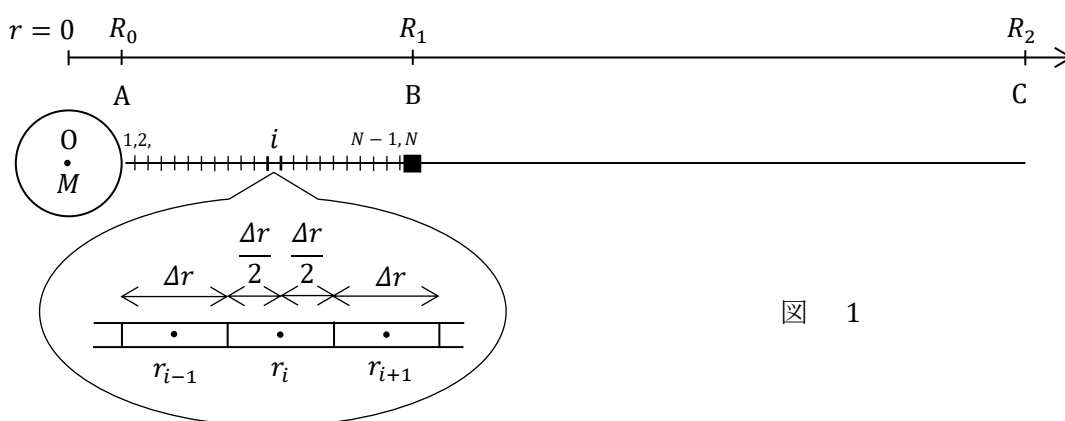


図 1

図 1 のように、O 点を原点としてケーブルに沿って座標 r を設定する。AB 間のケーブルの張力を $T_L(r)$ 、BC 間のケーブルの張力を $T_U(r)$ とする。

AB 間のケーブルを N 等分し、下端 A から数えて i 番目の微小部分の中心の位置座標を r_i 、微小部分の長さを Δr ($\Delta r \ll (R_1 - R_0)$) とする。O 点のまわりをケーブルと同じ角速度 ω で回転する座標系から見たとき、微小部分にはたらく遠心力と地球がおよぼす万有引力と両端にはたらくケーブルの張力はつりあいの式を満たす。この式より、張力の合力：

$$\Delta T_L(r_i) = T_L\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right) - T_L\left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right) \text{ を求めれば,}$$

$$\Delta T_L(r_i) = \text{ } (G, M, \omega, \rho, S, \Delta r, r_i) \quad \text{②}$$

となる。

ここで、A 端は地表に固定されていない自由端であること、すなわち $T_L(R_0) = 0$ であること、および、

$$\frac{\Delta r}{r_i^2} \doteq \frac{1}{r_i - \frac{\Delta r}{2}} - \frac{1}{r_i + \frac{\Delta r}{2}}$$

$$r_i \Delta r = \frac{1}{2} \left\{ \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right\}$$

が成り立つことを用いて、下側のケーブル AB が静止衛星 B におよぼす張力 $T_L(R_1)$ を求めれば、

$$T_L(R_1) = \boxed{(3)} \quad (G, M, \omega, \rho, S, R_0, R_1) \quad (3)$$

となる。

上側のケーブル BC に対しても同様の式を立て、ケーブルの上端 C が自由端であること、すなわち $T_U(R_2) = 0$ であることを用いて、上側のケーブル BC が静止衛星 B におよぼす張力 $T_U(R_1)$ を求めれば、

$$T_U(R_1) = \boxed{(4)} \quad (G, M, \omega, \rho, S, R_1, R_2) \quad (4)$$

となる。

このようにしてケーブルを両側に延ばしたあとも、人工衛星 B が静止衛星でありつづけるためには、 $T_L(R_1) = T_U(R_1)$ でなければならない。この条件式と式③、式④より、 R_2 が満たすべき方程式を導けば、

$$\frac{2GM}{\omega^2} = \boxed{(5)} \quad (R_0, R_2) \quad (5)$$

となる。さらに、式①と式⑤より GM/ω^2 を消去して R_2 を求めれば、

$$R_2 = \boxed{(6)} \quad (R_0, R_1) \quad (6)$$

となる。

もし実際にこのような構造物が作られたとすれば、ケーブルに沿って自走する車によって、地上から宇宙空間へ、あるいはその逆方向に、衛星などを運搬することができる。このような運搬車は宇宙エレベーターと呼ばれ、現在、その実現性について論じられている。

(Ⅲ) 前節で設定した角速度 ω の回転座標系 $O-r$ から見たときに、荷物を含めた質量 m の運搬車をケーブルに沿って $r = R_0$ から $r = R$ ($R_0 < R < R_2$) まで移動させるのに要する仕事を求めよう。ただし、 $r = R_0$ から出発するときと $r = R$ に達したとき、ケーブルに対する運搬車の速度は 0 とする。運搬車には、 r 方向に、遠心力と地球の万有引力と運搬車を走らせる駆動力がはたらいており、ケーブルとの間の動摩擦力と大気の影響と抵抗は無視できるとする。上記の 3 つの力がする仕事の和は運搬車の運動エネルギーの増加に等しく、いまの場合、その値は 0 である。よって、駆動力 F がした仕事 $W_F(R_0, R)$ と遠心力 f がした仕事 $W_f(R_0, R)$ の和は、万有引力がした仕事の符号を変えたもの、すなわち万有引力の位置エネルギーの増加に等しい。このことから、

$$W_F(R_0, R) = \boxed{\quad (7) \quad} (G, M, \omega, R_0, R, m) \quad (7)$$

を得る。万有引力の位置エネルギーは、地球を質量 M の質点として計算してよい。

たとえば、地上 ($r = R_0$) から静止衛星軌道 ($r = R_1$) まで運搬車を移動させるのに必要な仕事は、

$$W_F(R_0, R_1) = \boxed{\quad (8) \quad} (\omega^2, R_0, R_1, m) \quad (8)$$

となる。 $r = R_1$ に達した運搬車から質量 m_S の人工衛星を切り離せば、その人工衛星は静止衛星になる。このような方法で地上から静止衛星軌道まで人工衛星を運び上げるときに、駆動力が人工衛星にする仕事は、式⑧の m を m_S に置き換えたものになる。

(Ⅳ) 次に、宇宙エレベーターを用いずに、ロケットで質量 m_S の人工衛星を静止衛星軌道に打ち上げる場合を考える。地球の中心に固定した慣性系から見たとき、この打ち上げによって人工衛星の力学的エネルギーは $\boxed{\quad (9) \quad} (G, M, \omega, R_0, R_1, m_S)$ だけ増加する。この増加量は、宇宙エレベーターで静止衛星軌道まで人工衛星を運び上げるのに要した仕事より大きい。その差は $\boxed{\quad (10) \quad} (\omega, R_0, R_1, m_S)$ となる。

(Ⅴ) 運搬車によって運び上げられた人工衛星を $r = R_1$ より高い位置で切り離せば、人工衛星は宇宙エレベーターから遠ざかり、地球のまわりに楕円軌道を描くか、地球の引力圏を脱して無限遠へ去っていく。無限遠へ去るのは、人工衛星を切り離す位置 R が $\boxed{\quad (11) \quad} (R_1)$ より大きい場合である。ただし、太陽による万有引力の影響は考えないものとする。

太陽による万有引力を考慮すれば、この人工衛星は太陽のまわりを回るようになる。宇宙エレベーターから切り離すときの位置と時刻を調整すれば、この人工衛星を木星や金星に接近させることができる。

問題 30 の解答と解説

宇宙エレベーターが実現すれば、われわれに様々な恩恵をもたらすであろうが、解決しなければならない問題は山ほどある。それでも原理的に可能で有用であれば、それはいつか必ず実現される。

宇宙エレベーターはいくつかの大学入試問題で扱われているが、この問題の(Ⅱ)は大阪府立大学の 2008 年度入試問題を参考にして作成した。

(Ⅰ)

(1) 静止衛星の運動方程式の向心成分は、その質量を m_S として、

$$m_S (R_1 \omega^2) = \frac{GM m_S}{R_1^2}$$

と表される。これより R_1 を求めれば、次のようになる。

$$R_1 = \left[\left(\frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad \text{①}$$

(Ⅱ)

(2) i 番目の微小部分にはたらく力のつりあいの式は、

$$0 = (\rho S \Delta r) r_i \omega^2 - \frac{GM (\rho S \Delta r)}{r_i^2} + T_L \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) - T_L \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right)$$

と表される。これより張力の合力を求めれば、次のようになる。

$$\Delta T_L(r_i) = T_L \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) - T_L \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) = \left[\rho S \left(GM \frac{\Delta r}{r_i^2} - \omega^2 r_i \Delta r \right) \right] \quad \text{②}$$

(3) 式②の左辺を i について 1 から N まで加えれば、

$$\sum_{i=1}^N \Delta T_L(r_i) = T_L \left(r_N + \frac{\Delta r}{2} \right) - T_L \left(r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right) = T_L(R_1) - T_L(R_0)$$

となり、右辺を i について 1 から N まで加え、問題文に与えられている数式を用いれば、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \rho S \left(GM \frac{\Delta r}{r_i^2} - \omega^2 r_i \Delta r \right) \\ &= \rho S \left[GM \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{r_i - \frac{\Delta r}{2}} - \frac{1}{r_i + \frac{\Delta r}{2}} \right) - \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right\} \right] \\ &= \rho S \left[GM \left(\frac{1}{r_1 - \frac{\Delta r}{2}} - \frac{1}{r_N + \frac{\Delta r}{2}} \right) - \frac{\omega^2}{2} \left\{ \left(r_N + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right\} \right] \\ &= \rho S \left\{ GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{\omega^2}{2} (R_1^2 - R_0^2) \right\} \end{aligned}$$

となる。これら 2 式と A 端が自由端である条件 $T_L(R_0) = 0$ より、次式を得る。

$$T_L(R_1) = \boxed{\rho S \left\{ GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{\omega^2}{2} (R_1^2 - R_0^2) \right\}} \quad (3)$$

(4) $T_L(r)$ を $T_U(r)$ に置き換え、C 端が自由端である条件 $T_U(R_2) = 0$ に注意して、(3) と同様の計算をすれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} T_U(R_2) - T_U(R_1) &= \rho S \left\{ GM \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\omega^2}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right\} \\ \rightarrow T_U(R_1) &= \boxed{-\rho S \left\{ GM \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\omega^2}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right\}} \quad (4) \end{aligned}$$

(5) 式 ③ と式 ④ の右辺が等しいことから次式を得る。

$$\begin{aligned} GM \left\{ \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\} &= \frac{\omega^2}{2} \{ (R_2^2 - R_1^2) + (R_1^2 - R_0^2) \} \\ \rightarrow \frac{2GM}{\omega^2} &= \frac{R_2^2 - R_0^2}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2}} = \boxed{R_0 R_2 (R_2 + R_0)} \quad (5) \end{aligned}$$

(6) 式 ① と式 ⑤ より GM/ω^2 を消去して、 R_2 に対する方程式を導けば、

$$R_0 R_2^2 + R_0^2 R_2 - 2R_1^3 = 0$$

となる。これを R_2 について解き、 $R_2 < 0$ の解を棄却すれば、次式を得る。

$$R_2 = \boxed{\frac{R_0}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^3} - 1 \right)} \quad (6)$$

(補足 1)

具体的な数値を求めると、次のようになる。

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}, \quad M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad \omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

を式 ① に代入すれば、

$$R_1 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$$

となる。また、 $R_0 = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ であるから、 $R_1 / R_0 = 6.61$ である。これらを式 ⑥ に代入すれば、

$$R_2 = 1.50 \times 10^8 \text{ m} = 23.5 R_0$$

となる。この距離は地球から月までの距離の約 40 % である。ケーブルの長さをもっと短くする方法を(補足 3)で解説する。

(III)

(7) 運搬車にはたらく遠心力 f は $m \omega^2 r$ と表され, r に比例するので, $r = R_0$ から $r = R$ まで移動する間に運搬車にする仕事 $W_f(R_0, R)$ は, 図 2 の陰影をつけた台形の面積に等しい。よって,

$$W_f(R_0, R) = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 R_0^2$$

と表される。

運搬車が $r = R_0$ から $r = R$ まで移動する間に万有引力の位置エネルギー U は,

$$\Delta U(R_0, R) = -\frac{GMm}{R} - \left(-\frac{GMm}{R_0} \right)$$

だけ増加する。よって,

$$\begin{aligned} W_F(R_0, R) &= \Delta U(R_0, R) - W_f(R_0, R) \\ &= \boxed{m \left\{ GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 (R^2 - R_0^2) \right\}} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

(8) 式①の GM を式⑦に代入して, 運搬車を地上から静止衛星軌道まで移動させるのに要する仕事を求めれば,

$$\begin{aligned} W_F(R_0, R_1) &= m \left\{ \omega^2 R_1^3 \frac{R_1 - R_0}{R_0 R_1} - \frac{1}{2} \omega^2 (R_1^2 - R_0^2) \right\} \\ &= \boxed{\frac{m \omega^2}{2} \frac{(R_1 - R_0)^2 (2R_1 + R_0)}{R_0}} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

(IV)

(9) 地球の中心 O に固定された慣性系から見れば, 地上から打ち上げるときの人工衛星の力学的エネルギー $E_S(R_0)$ は,

$$E_S(R_0) = \frac{1}{2} m_S (R_0 \omega)^2 - \frac{GMm_S}{R_0}$$

である。 $R_0 \omega$ は中心 O から見たときの人工衛星の速さである。静止衛星軌道に達したときの力学的エネルギー $E_S(R_1)$ は,

$$E_S(R_1) = \frac{1}{2} m_S (R_1 \omega)^2 - \frac{GMm_S}{R_1}$$

である。よって, 力学的エネルギーの増加量 $\Delta E_S(R_0, R_1) = E_S(R_1) - E_S(R_0)$ は,

$$\Delta E_S(R_0, R_1) = \boxed{m_S \left\{ GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (R_1^2 - R_0^2) \right\}} \quad (9)$$

となる。

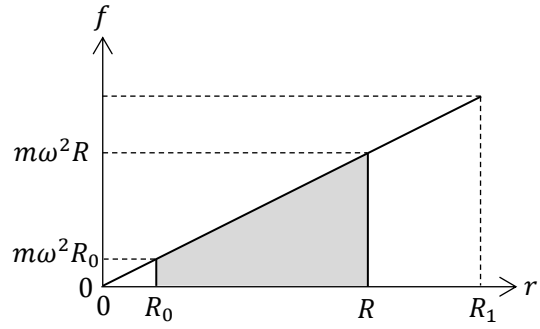


図 2

(10) 宇宙エレベーターを用いて、人工衛星を静止衛星軌道まで運搬するとき、駆動力が人工衛星にする仕事 $W_S(R_0, R_1)$ は、式⑦の m を m_S に、 R を R_1 に置き換えたものに等しく、

$$W_S(R_0, R_1) = m_S \left\{ GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 (R_1^2 - R_0^2) \right\}$$

となる。よって、

$$\Delta E_S(R_0, R_1) - W_S(R_0, R_1) = \boxed{m_S \omega^2 (R_1^2 - R_0^2)} \quad (10)$$

となる。すなわち、静止衛星をロケットで打ち上げる場合には、宇宙エレベーターで運び上げる場合より、式⑩で与えられるエネルギーだけ余計に仕事しなければならないのである。この仕事を仕事の定義に基づいて計算をするにはコリオリ力の知識が必要となるので、(補足2)で解説する。

(V)

(11) 地球の中心に固定した慣性系から見て、質量 m_S の人工衛星の力学的エネルギーが正または0であれば、人工衛星は地球の引力圏を脱する。ただし、無限遠を万有引力の位置エネルギーの基準点としている。よって、求める条件は、

$$E_S(R) = \frac{1}{2} m_S (R \omega)^2 - \frac{GMm_S}{R} \geq 0 \rightarrow R \geq \left(\frac{2GM}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} R_1} \quad (11)$$

となる。

(補足2：式⑩の大学生向けの解説)

図3aのように、角速度 ω の回転座標系 $O-r$ から運搬車を見れば、 r 方向の速度が $u = \frac{dr}{dt}$ であるとき、ケーブルに垂直で、ケーブルの回転方向と逆の向きに大きさ $2m\omega u$ のコリオリ力がはたらく。このとき、運搬車がケーブルから離れないように、コリオリ力を打ち消す向きに、ケーブルが垂直抗力 $f_{\perp}$ をおよぼす。回転座標系 $O-r$ から見れば、垂直抗力は運搬車に仕事をしない。

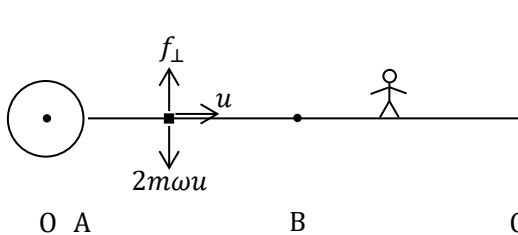


図 3a

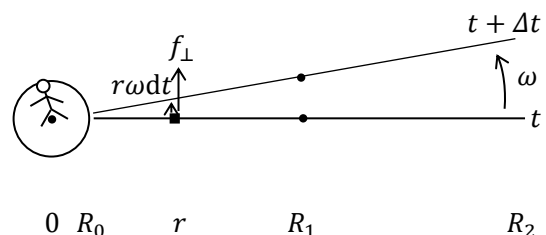


図 3b

ところが、図3bのように、地球の中心 O に固定した慣性系から見れば、垂直抗力は仕事をする。いま、微小時間 dt の間にケーブルが微小角 ωdt だけ回転すれば、 $f_{\perp}$ がする仕事は $f_{\perp} r \omega dt$ と表される。よって、運搬車が時刻 $t = t_0$ で $r = R_0$ から移動し始め、時刻 $t = t_1$ で $r = R_1$ に達したとすると、その間に垂直抗力がする仕事 $W_{\perp}(R_0, R_1)$ は、

$$\begin{aligned}
W_{\perp}(R_0, R_1) &= \int_{t_0}^{t_1} f_{\perp} r \omega dt = \int_{t_0}^{t_1} 2m\omega \frac{dr}{dt} r \omega dt \\
&= m\omega^2 \int_{R_0}^{R_1} 2r dr = m\omega^2 (R_1^2 - R_0^2)
\end{aligned}$$

となる。すなわち、宇宙エレベーターを用いれば、ケーブルが運搬車を振り回すときに垂直抗力がする仕事の分だけで、必要なエネルギーが少なくて済むのである。

垂直抗力が運搬車に乗せられた人工衛星にする仕事は、上式の m を m_s に置き替えたものになる。

宇宙エレベーターを用いて静止衛星を運び上げるときには、運搬車も運び上げなければならぬので、必要なエネルギーは増えるが、上昇中や下降中に作動させる回生ブレーキによって、力学的エネルギーを電磁エネルギーに変換すれば、エネルギーを大幅に節約することができる。

ロケットで静止衛星を打ち上げるときには、積み込まれた燃料の化学的エネルギーの多くが、ロケットと燃焼ガスの力学的エネルギーと熱に変換され、捨てられてしまうので、宇宙エレベーターを用いる方法に比べれば、エネルギー効率が大幅に悪くなってしまう。

(補足3) 先細ケーブル (tapered cable) と釣合おもり (counter-balance)

位置 r におけるケーブルの張力 $T(r)$ は、微積分を使えば簡単に求めることができる。式②の両辺を Δr で割って、 $\Delta r \rightarrow 0$ の極限を取り、 r_i を r に、 $T_L(r_i)$ を $T(r)$ に、 ω^2 を GM/R_1^3 に置き換えれば、

$$\frac{dT}{dr} = GM\rho S \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_1^3} \right) \quad (i)$$

を得る。さらに、赤道上での重力加速度 $g = \frac{GM}{R_0^2}$ を導入して、式 (i) を変形すれば、

$$\frac{dT}{dr} = \rho S g R_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_1^3} \right) \quad (ii)$$

となる(注)。式 (ii) を r で積分し、積分定数を C とすれば、

$$T(r) = \rho S g R_0^2 \left(-\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2R_1^3} + C \right)$$

を得る。 $r = R_0$ での境界条件 $T(R_0) = 0$ より、

$$C = \frac{1}{R_0} + \frac{R_0^2}{2R_1^3}$$

となり、張力 $T(r)$ は無次元化された次の式：

$$\frac{T(r)}{\rho S g R_0} = 1 - \frac{R_0}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^3 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right\} \quad (iii)$$

で与えられる。グラフで表せば図4のようになる。

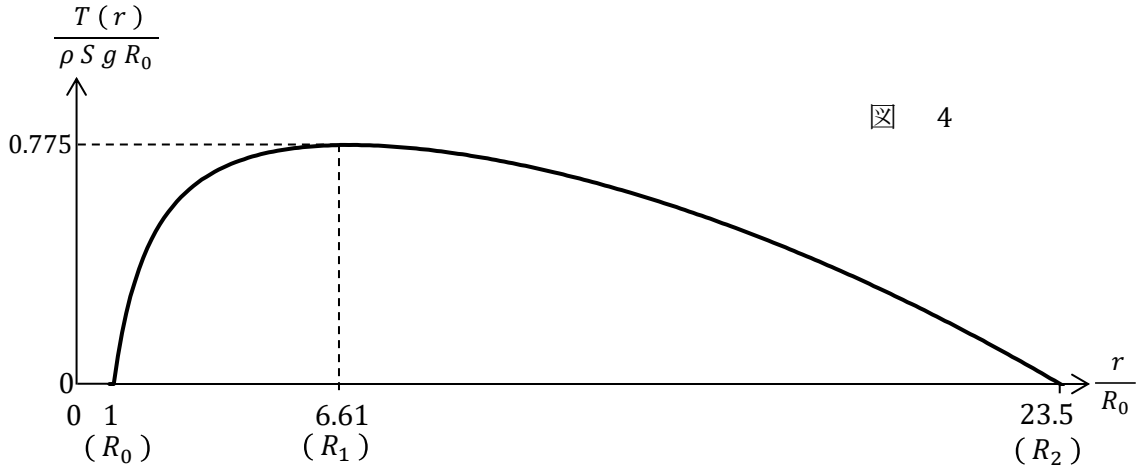


図 4

単位断面積あたりの張力 (引っ張りの応力) $\tau \equiv T / S$ を導入すれば, 式 (iii) は,

$$\frac{\tau}{\rho g} = R_0 \left[1 - \frac{R_0}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^3 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right\} \right] \quad (\text{iv})$$

と書き換えられ, $\frac{\tau}{\rho g}$ は $r = R_1$ で次の最大値をとる。

$$\frac{\tau_1}{\rho g} = \frac{R_0}{2} \left(1 - \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \left(2 + \frac{R_0}{R_1} \right) \sim 5000 \text{ km}$$

ケーブルを引っ張ったとき, 切れる直前の $\frac{\tau}{\rho g}$ の値を $\frac{\tau_{\max}}{\rho g}$ とする。これは長さの次元を持っており, ケーブルに固有な量である。簡単に言えば, g が一定と見なせる地上でケーブルをぶら下げたとき, 上端で引きちぎられない最大の長さである。したがって, $\frac{\tau_1}{\rho g} < \frac{\tau_{\max}}{\rho g}$ であれば, そのケーブルを宇宙エレベーターに使用することができる。現時点でこの不等式を満たす可能性があるのはカーボンナノチューブだけである。

この問題ではケーブルの断面積を一定としたので, 式 (iv) が示すように τ が r の関数となり, $r = R_1$ で最大値 τ_1 を取る。逆に, τ が一定値 τ_c になるように, S を位置 r の関数とすれば, $\tau_c < \tau_1$ とすることができ, τ に対する条件を緩和することができる。 $T(r) = \tau_c S(r)$ を式 (i) に代入すれば, $S(r)$ に対する微分方程式:

$$\tau_c \frac{dS}{dr} = GM\rho S \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_1^3} \right) \quad (\text{v})$$

を得る。さらに, $GM = gR_0^2$ を代入して整理すれば,

$$\frac{dS}{S} = \frac{\rho g R_0^2}{\tau_c} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_1^3} \right) dr \quad (\text{vi})$$

となる。両辺を積分して, $r = R_0$ で $S = S_0$ とすれば,

$$\begin{aligned} \log \frac{S(r)}{S_0} &= \frac{\rho g R_0^2}{\tau_c} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} - \frac{r^2 - R_0^2}{2R_1^3} \right) \\ \rightarrow S(r) &= S_0 \exp \left[\frac{\rho g R_0^2}{\tau_c} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} - \frac{r^2 - R_0^2}{2R_1^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

を得る。よって、静止衛星の位置 ($r = R_1$) におけるケーブルの断面積を S_1 とおけば、

$$\frac{S_1}{S_0} = \exp \left[\frac{\rho g R_0}{2\tau_c} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{R_0}{R_1} \right) + \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^3 \right\} \right]$$

となる。たとえば、カーボンナノチューブのケーブルで、 $\frac{\tau_c}{\rho g} = 3000 \text{ km}$ とすれば、 $\frac{S_1}{S_0} = 5.2$ となる。

ケーブルの全長を短くするために、 $r = R_D$ ($R_1 < R_D < R_2$) でケーブルを質量 m_D の釣合おもり D に固定する。このとき、釣合おもり D が地球の中心 O のまわりを角速度 ω で回転するためには、運動方程式：

$$m_D (R_D \omega^2) = \frac{GMm_D}{R_D^2} + \tau_c S(R_D) \quad (\text{viii})$$

を満たさなければならない。 $S(R_D)$ を式 (vii) で求めて式 (viii) に代入し、釣合おもりの質量を求めれば、次のようになる。

$$m_D = \frac{\tau_c S_0 \exp \left[\frac{\rho g R_0^2}{\tau_c} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_D} - \frac{R_D^2 - R_0^2}{2R_1^3} \right) \right]}{R_D \omega^2 - \frac{g R_0^2}{R_D^2}} \quad (\text{ix})$$

(注) 赤道上で実際の重力加速度は、

$$g = \frac{GM}{R_0^2} - R_0 \omega^2 = \frac{GM}{R_0^2} \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^3 \right\} = \frac{GM}{R_0^2} (1 - 0.00346)$$

に近いが、第 2 項は微少量であるので、ここでは無視した。

[他の演習問題へ](#)