

問題 3 電磁推進船と MHD 発電

次の文中の { } から正しいものを選び, に適切な数式または説明文を記入せよ。

(A) 導電性の流体が, 図 1 のような管 T 全体を満たした状態で, x 軸の正の向きに速さ v で流れている。管の断面は幅 w ・高さ h の矩形である。管は不導体で作られているが, 側面の一部に, 長さ ℓ ・高さ h の導体板 P と Q が, 流体に接するように取り付けられている。向かい合っている導体板 P と Q の間を流れる流体に, 鉛直上向き (z 軸の正の向き) に磁束密度 B の一様な磁場をかけると, 流体に含まれている陽イオンが磁場からローレンツ力を受けて, 導体板 (1) { P, Q } に集まってくる。陰イオンまたは自由電子は反対側の導体板に集まる。その結果, P Q 間に電場が生じ, その電場が流体中のイオンや自由電子におよぼす力が磁場によるローレンツ力を打ち消してしまう。このようにして正電荷と負電荷を分離し, 導体板間に電位差を生じさせる能力を表す物理量が誘導起電力である。その向き (流体中の P Q 間に電流を流そうとする向き) は (2) { P \rightarrow Q, Q \rightarrow P } で, その大きさは (3) である。

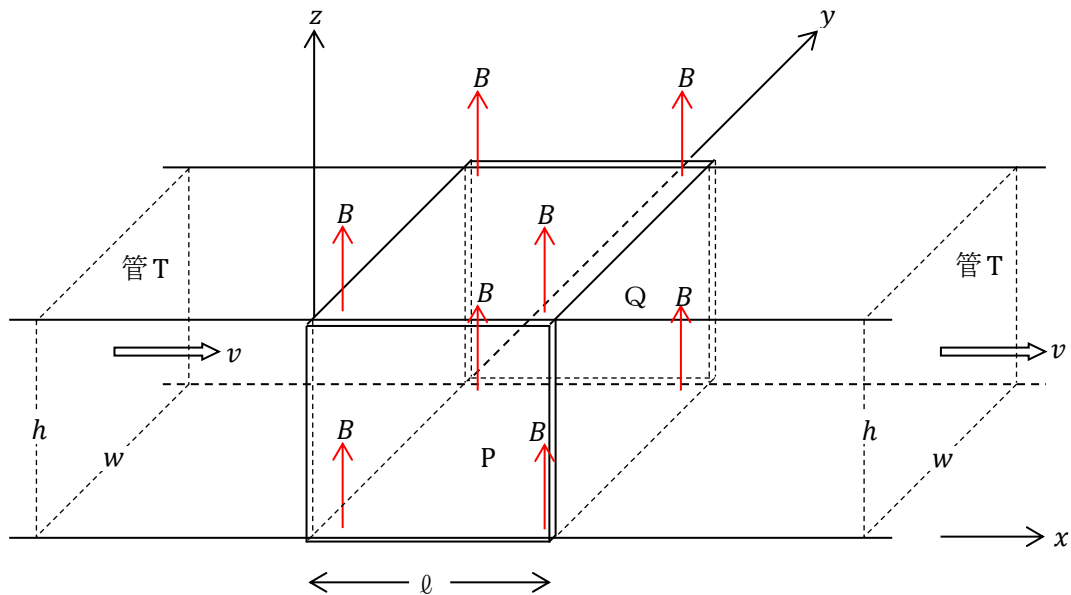


図 1

(B) 図2は電磁推進船の模式図で、海面下の船体には図1の管Tが貫いており、その中を海水が通り抜けるようになっている。海水には多くの陽イオンと陰イオンが含まれているので、海水に電圧をかけると電流が流れる。導体板PとQの間には、起電力 E ・内部抵抗 R_E の直流電源とスイッチSがつながれている。図のように管Tの上面と下面に固定された超電導磁石によって、PQ間の海水に z 軸の正の向きに磁束密度 B の一様な磁場をかけることができる。

電磁推進船が海上に静止しているとき、スイッチSを閉じるとPQ間に電流 I が流れ、PQ間の海水は磁場から大きさ (4) の電磁力を x 軸の正の向きに受ける。その結果、電磁推進船は x 軸の負の向きに動き出す。その理由は (5) である。

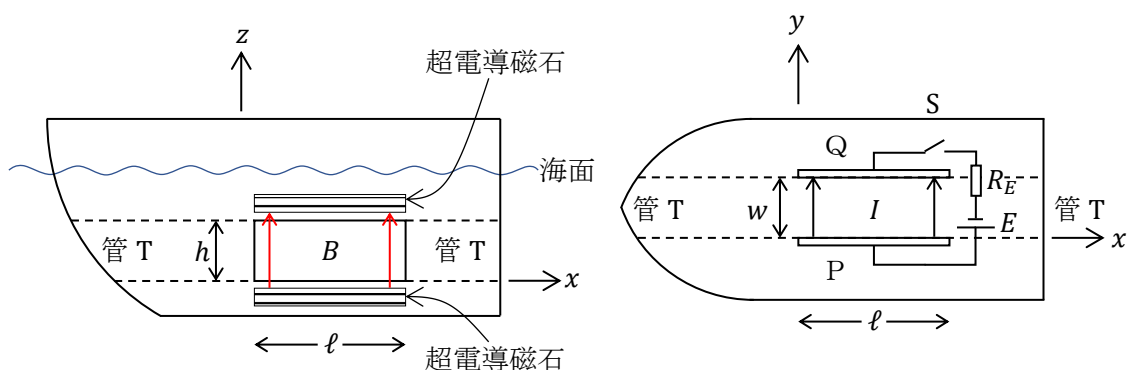


図 2

海水に対する電磁推進船の速さが v になったとき、船に乗って管T内の海水を見れば、 x 軸の正の向きに速さ v で流れる。海水中のイオンもその流れに乗って同じ速さで動くので、(A)で考察したように、PQ間に誘導起電力が発生する。これも考慮すれば、PQ間に流れる電流は、PQ間の海水の電気抵抗を R_{PQ} として、(6) と表される。

航行中の船は海水から抵抗力を受ける。その大きさは船の速さに比例する。その比例係数を K とすれば、電磁推進船は最終的に速さ (7) で航行するようになる。

(C) 図 3 は、導電性の流体に対する力学的仕事を、磁場の仲介によって、電気エネルギーに変換する装置の模式図である。このような発電を電磁流体力学発電、あるいはその英語名を略して MHD 発電という。

ここでは、(A) で考察した管 T に液体金属を満たし、外力を加えて、液体金属が x 軸の正の向きに速さ v で流れるようにする。導体板 P と Q の間には、抵抗 R とスイッチ S がつながれている。また、P Q 間に磁束密度 B の一様な磁場をかけるための超電導磁石が管 T の上面と下面に設置されている。

このとき (A) の (3) で求めた誘導起電力が P Q 間に発生するので、スイッチ S を閉じると抵抗 R に電流が流れ、ジュール熱としてエネルギーが消費される。一定電流が流れるようになった定常状態では、P Q 間を流れる液体金属の速さは v のままであるが、金属内の平均的な自由電子 (電気量 $-e$) の速度は変化する。その x 成分を u_x 、 y 成分を u_y とする。自由電子の全質量は液体金属の全質量に比べれば無視できる。

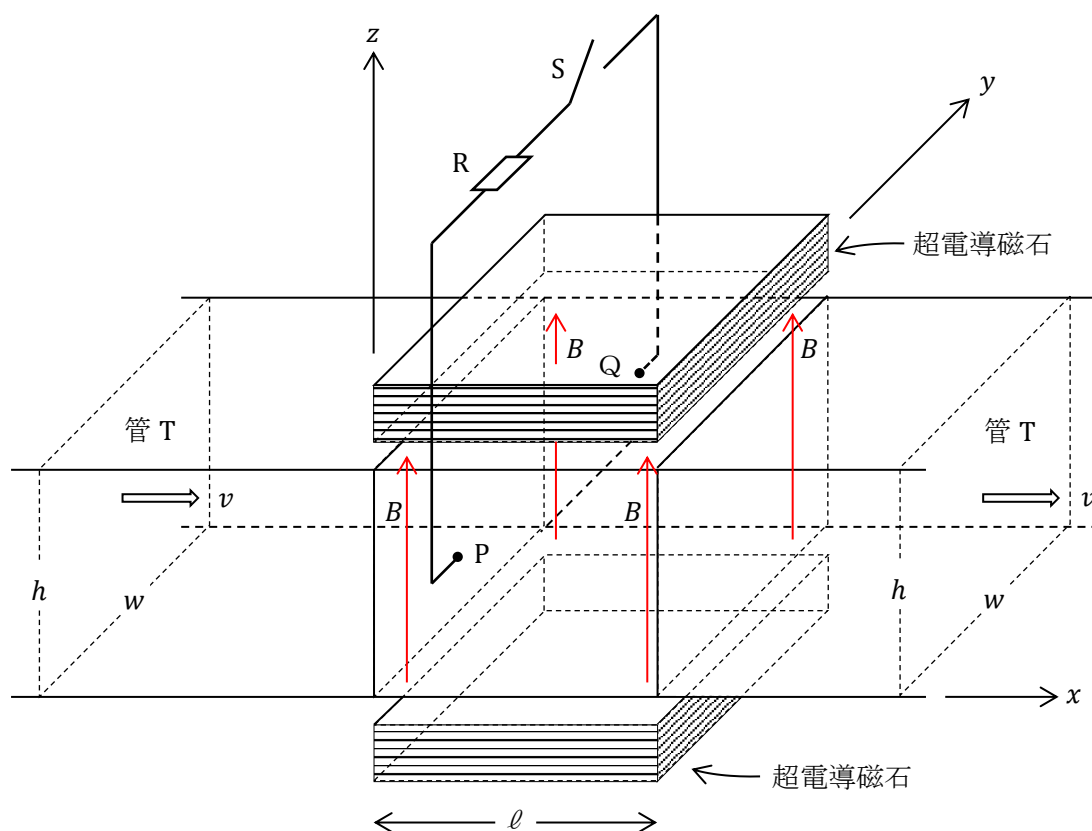


図 3

平均的な自由電子は、液体金属に対して相対速度をもつようになるので、液体金属から相対速度に比例する抵抗力を受ける。その比例係数の大きさを k とする。また、P Q 間の電場も電流が流れると変化する。その y 成分を E_y とする。 x 成分は 0 としてよい。このとき平均的な自由電子にはたらく力に対して次のつりあいの式：

$$x \text{ 成分} : 0 = \boxed{\quad} \quad (8)$$

$$y \text{ 成分} : 0 = \boxed{\quad} \quad (9)$$

が成り立つ。これらを u_x と u_y について解くと、

$$u_y = \boxed{\quad} \quad (10)$$

を得る。自由電子の個数密度を n とすると、導体板 P, Q を通過する電流 I は、

$$I = \boxed{\quad} \quad (11)$$

と表される。ただし、電流に対する陽イオンの寄与は無視できるものとする。この電流を P Q 間の誘導起電力 V_{emf} [(A) の (3) で求めたもの] と P Q 間の電位差 V ($V > 0$) を用いて書き換えると、

$$I = \boxed{\quad} \quad (12)$$

となる。この電流のために液体金属は磁場から電磁力を受ける。液体金属を等速度 v で流すためには、この電磁力を打ち消すように外力をおよぼさなければならない。その外力の仕事率 P_{ex} を V_{emf} と V を用いて表せば、

$$P_{\text{ex}} = \boxed{\quad} \quad (13)$$

となる。この仕事率の一部が抵抗 R での消費電力 (ジュール熱) J_R になる。

ここで、液体金属の速さ v を変えないで抵抗 R の抵抗値を変化させると、 I と V が変化し、 J_R も変化する。その変化に際して J_R が最大となるのは、

$$\frac{V}{V_{\text{emf}}} = \boxed{\quad} \quad (14)$$

のときで、その最大値は、

$$J_{R,\text{max}} = \boxed{\quad} \quad (15)$$

である。このとき外力の仕事率 P_{ex} から抵抗 R での消費電力 $J_{R,\text{max}}$ への変換効率は、

$$\frac{J_{R,\text{max}}}{P_{\text{ex}}} = \boxed{\quad} \quad (16)$$

となる。

問題 3 の解答と解説

電動機 (motor) は電磁気のエネルギーを力学的な仕事に変換する装置であり、発電機 (generator, dynamo) は力学的な仕事を電磁気のエネルギーに変換する装置である。どちらも電磁気のエネルギーと力学的な仕事の変換の際に磁場を利用する。現在用いられている電動機と発電機の大部分は回転運動を伴っている。回転運動を伴わない電動機と発電機の一例が、この問題に取り上げられている電磁推進船と MHD 発電 (Magneto-Hydro-Dynamic power generation) である。両者の原理は大昔から知られていたのであるが、技術的困難のためにいまだに実験段階にあり、実用化には至っていない。

(A) (1) 陽イオン (電気量 q) が流体とともに x 軸の正の向きに動けば、磁場から y 軸の負の向きにローレンツ力を受け、導体板 **P** に集まってくる。同様に、陰イオン (電気量 $-q$) は導体板 **Q** に集まる。

(2) (3) このように、ローレンツ力は正電荷を **Q** から **P** へ、負電荷を **P** から **Q** へ移動させようとする。電流の向きは正電荷が流れる向き、あるいは負電荷が流れる向きの逆と定義されているので、ローレンツ力は流体中に (2) **Q** → **P** の向きに電流を流そうとする。これが誘導起電力の向きである。その大きさ V_{emf} は、単位正電荷あたりにはたらくローレンツ力を **Q** から **P** まで積分したもので定義する。すなわち、

$$V_{\text{emf}} = \int_{y_Q}^{y_P} \frac{-q v B}{q} dy = \quad (3) \quad \boxed{v B w} \quad (y_Q - y_P = w)$$

である。

誘導起電力のはたらきの結果、**P** **Q** 間には **P** から **Q** の向きに大きさ E の一様な電場が生じる。このときイオンには図 **i** のような力がはたらき、そのつりあいより、

$$q E = q v B \leftrightarrow E = v B$$

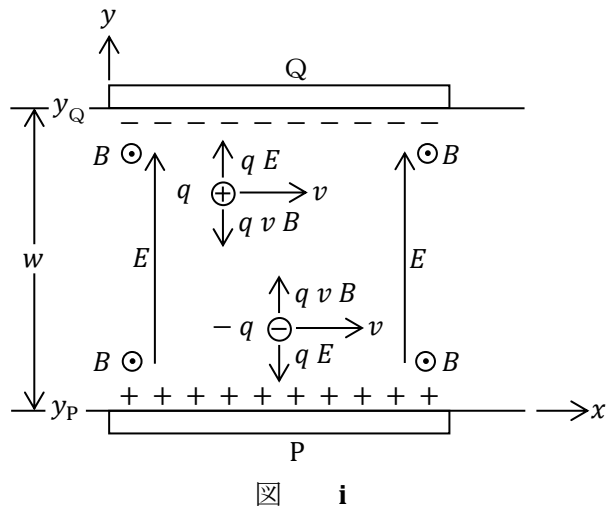
を得る。これより、**Q** に対する **P** の電位差 V は、

$$V = E w = v B w$$

となる。したがって、**P** **Q** 間に電流が流れていない場合には、関係式：

$$V_{\text{emf}} = V$$

が成り立つ。



P Q 間に電流が流れている場合には、陽イオンが流体の流れ（流速 v ）に乗りながら、Q から P まで移動するとして、それにはたらくローレンツ力の y 成分 $-q v B$ が陽イオンにする単位正電荷あたりの仕事：

$$(-q v B)(-w) \frac{1}{q} = v B w$$

が、Q から P の向きの誘導起電力となる。これは陰イオンや自由電子で計算しても同じである。

(B) (4) P Q 間の海水を断面積 ℓh ・長さ w の導線と考えればよい。その中を y 軸の正の向きに流れる電流 I が z 軸の正の向きの磁場から受ける電磁力は、 x 軸の正の向きに大きさが $I B w$ である。実際に電磁力がはたらくのは海水中の陽イオンと陰イオンであるが、電磁力を受けて動き出したイオンは周囲の水分子と衝突し、その水分子がまた別の水分子と衝突することによって、力積をおよぼし合いながら、力を海水全体に伝える。その結果、P Q 間の海水は x 軸の正の向きに動き始める。

(5) この力は海水中の磁場がイオンを介して海水におよぼしているのであるから、作用・反作用の法則より、海水は磁場に対して向きが逆（ x 軸の負の向き）で、大きさが $I B w$ の力をおよぼす。磁力線は図 ii のように超電導磁石の電流に巻き付いており、電流から離れることができない。また、磁力線は輪ゴムのように閉じており、磁場の方向に伸びようとする収縮し、磁場と垂直な方向に磁力線同士が接近しようとする反発力をおよぼし合う。そのために、磁場への反作用は超電導磁石を介して最終的には船全体にはたらく。これらのことから解答例は次のようになる。

海水が磁場から電磁力を受けると、作用・反作用の法則より、海水は磁場を介して、船に固定された超電導磁石に x 軸の負の向きに力をおよぼすから

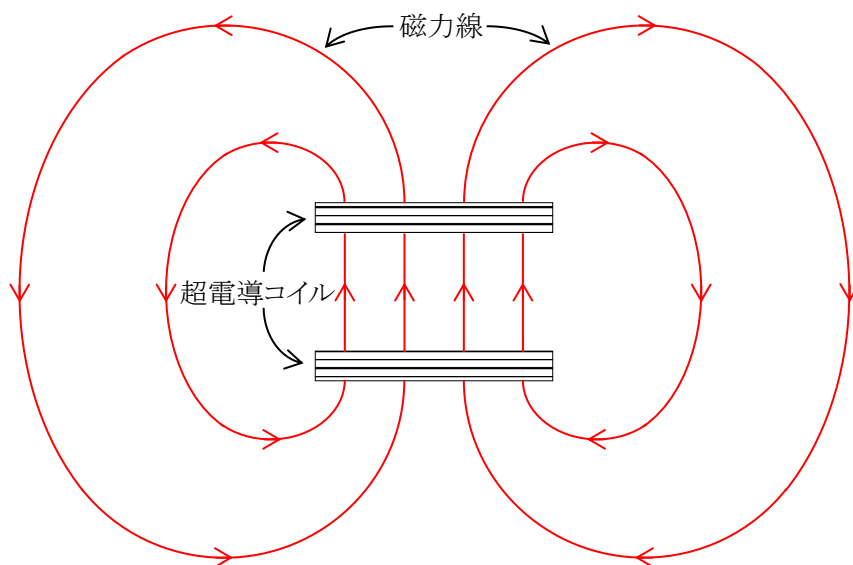


図 ii

(6) 管 T の中を海水が x 軸の正の向きに速さ v で流れるとき、(A) の (3) で求めた大きさ $V_{\text{emf}} = v B w$ の誘導起電力が Q から P の向きに生じる。P Q 間を P から Q へ流れる電流を I とすれば、キルヒホッフの第 2 法則より、

$$E - V_{\text{emf}} = (R_E + R_{PQ}) I$$

が成り立ち、

$$I = \frac{E - v B w}{R_E + R_{PQ}}$$

を得る。

(7) 船が動き出したあと、最終的にその速さが等速の v_f に達したとすれば、船の運動方程式は、船の質量を M として、

$$M \cdot 0 = I B w - K v_f$$

$$= \frac{E B w - v_f (B w)^2 - K (R_E + R_{PQ}) v_f}{R_E + R_{PQ}}$$

となる。これより、

$$v_f = \frac{E B w}{(B w)^2 + K (R_E + R_{PQ})}$$

を得る。

(C) (8) (9) P Q 間を速度 $\vec{u} = (u_x, u_y)$ で移動する平均的な自由電子にはたらく力の x 成分と y 成分は図 iii のようになる。平均的な自由電子は等速度で移動するので、これらの力は次のつりあいの式を満たす。

$$x \text{ 成分} : 0 = -e u_y B - k (u_x - v) \quad \text{①}$$

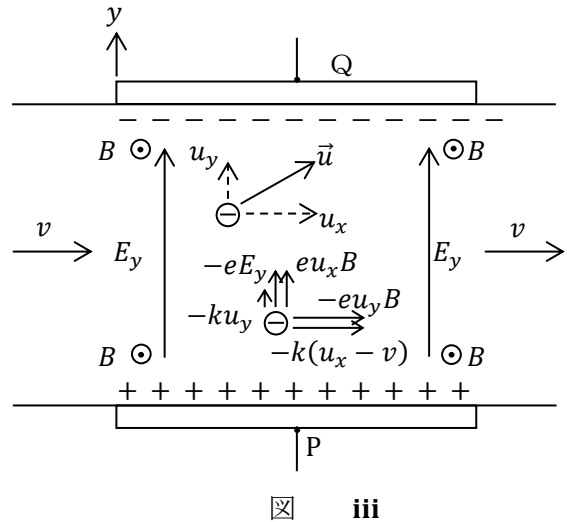
$$y \text{ 成分} : 0 = e u_x B - e E_y - k v_y \quad \text{②}$$

(10) 式①と式②を u_x と u_y について解けば、

$$u_x = \frac{e^2 B E_y + k^2 v}{(e B)^2 + k^2} \quad \text{③}$$

$$u_y = \frac{e k (v B - E_y)}{(e B)^2 + k^2} \quad \text{④}$$

となる。



(11) 微小時間 Δt の間に導体板 Q に到達する自由電子の個数は $n(\ell h)u_y \Delta t$ であるから、導体板 Q を y 軸の正の向きに通過する単位時間あたりの電気量は $\frac{(-e)(n \ell h u_y \Delta t)}{\Delta t}$ となる。したがって、導体板 Q を通過する電流は、 y 軸の負の向きに大きさが

$$I = \boxed{e n \ell h u_y}$$

である。これに式④を代入すれば、次のようになる。

$$I = \boxed{\frac{e^2 n \ell h k (v B - E_y)}{(e B)^2 + k^2}} \quad \text{⑤}$$

(12) P Q 間の電場は一樣であるから、Q に対する P の電位差は、

$$V = E_y w \quad \text{⑥}$$

である。(A) の (3) の $V_{\text{emf}} = v B w$ と式⑥を用いて、式⑤を書き換えれば、

$$I = \boxed{\frac{e^2 n \ell h k}{\{(e B)^2 + k^2\} w} (V_{\text{emf}} - V)} \quad \text{⑦}$$

となる。

(13) 液体金属の中を Q から P の向きに流れる電流 I が磁場から受ける力は、 x 軸の負の向きに大きさが $I B w$ である。この力は自由電子にはたらくのであるが、(4) の解答で述べたように、この力は最終的には P Q 間の液体金属全体にはたらく。液体金属が x 軸の正の向きに一定の速さ v で流れるようにするためには、この電磁力を打ち消すように、 x 軸の正の向きに大きさ $F_{\text{ex}} = I B w$ の外力を液体金属におよぼさなければならない。よって、この外力による仕事率は、

$$\begin{aligned} P_{\text{ex}} &= F_{\text{ex}} v = (I B w) v \\ &= \boxed{\frac{e^2 n \ell h k v B}{(e B)^2 + k^2} (V_{\text{emf}} - V)} \quad \text{⑧} \end{aligned}$$

となる。

(14) (15) 式⑦を、

$$I = \frac{1}{r} (V_{\text{emf}} - V), \quad r \equiv \frac{\{(e B)^2 + k^2\} w}{e^2 n \ell h k} \quad \text{⑨}$$

と書き換えれば、 r は P Q 間の液体金属の電気抵抗であることがわかる。抵抗 R の抵抗値を R とすれば、 $V = R I$ であるから、抵抗 R での消費電力 (ジュール熱) は、

$$\begin{aligned} J_R &= R I^2 = V I = \frac{1}{r} V (V_{\text{emf}} - V) \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{V_{\text{emf}}}{2} \right)^2 - \left(V - \frac{V_{\text{emf}}}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

と表される。よって、 $V = \overset{(14)}{\boxed{\frac{1}{2}}} V_{\text{emf}}$ のときに、 J_R は次の最大値をとる。

$$J_{R,\max} = \frac{V_{\text{emf}}^2}{4r} = \frac{1}{4} \frac{e^2 n \ell h k}{\{(eB)^2 + k^2\} w} (vBw)^2$$

$$\stackrel{(15)}{=} \boxed{\frac{e^2 n \ell h k v^2 B^2 w}{4 \{(eB)^2 + k^2\}}}$$

(16) そのときのエネルギー変換効率 η は,

$$\eta = \frac{J_{R,\max}}{P_{\text{ex}}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

となる。

[補足]

定常状態にあるとき、液体金属を押している外力 F_{ex} がする単位時間あたりの仕事 $F_{\text{ex}} v$ が、最終的に外部抵抗 R と液体金属の内部抵抗 r でのジュール熱になるまでの間、エネルギーの流れは次のようになる。以下では、式③より、

$$u_x - v = -\frac{e^2 B (vB - E_y)}{(eB)^2 + k^2} < 0$$

が成り立つことに留意せよ。また、PQ間に存在する自由電子の総数 $n(\ell h w)$ を N_e とする。

まず、外力による仕事は液体金属の運動エネルギーの増加とはならず、PQ間に存在する自由電子が液体金属におよぼす抵抗力 $k(u_x - v)N_e$ による負の仕事 $k(u_x - v)N_e v$ によってすべて抜き取られる。抜き取られたエネルギーは自由電子の運動エネルギーとはならず、次のように分解されて別のエネルギーに変換される。

$$F_{\text{ex}} v = k(v - u_x) N_e v$$

$$= k(v - u_x)^2 N_e + k(v - u_x) N_e u_x \quad (v = (v - u_x) + u_x)$$

第1項は、液体金属に対して自由電子が x 方向にすべることによって生じる摩擦熱で、これは後で示すようにジュール熱の一部となる。第2項は次のように変形される。

$$k(v - u_x) N_e u_x = e u_y B N_e u_x \quad (\text{式①を適用}) \quad \textcircled{10}$$

$$= e u_x B N_e u_y \quad (u_x \text{ と } u_y \text{ の置き換え}) \quad \textcircled{11}$$

$$= (k u_y + e E_y) (n \ell h w) u_y \quad (\text{式②を適用}) \quad \textcircled{12}$$

$$= k u_y^2 N_e + I V \quad (I = e n \ell h u_y, V = E_y w) \quad \textcircled{13}$$

$$= k u_y^2 N_e + R I^2 \quad (R = V / I) \quad \textcircled{14}$$

式⑩の左辺は大きさ $k(v - u_x)N_e$ の抵抗力が自由電子にする正の仕事であるが、これは自由電子の運動エネルギーの増加とはならず、右辺の式が示すように、ローレンツ力の x 成分 $(-e u_y B)N_e$ による負の仕事 $(-e u_y B)N_e u_x$ によって抜き取られる。抜き取られたエネルギーは、式⑪が示すように、ローレンツ力の y 成分 $e u_x B N_e$ によって、自由電子を y 軸の正の向きに引き上げるのに要する仕事に使われる。この過程は、ローレンツ力の x 成分と y 成分は仕事をすするが、ローレンツ力ベクトルそのものは仕事をしないことに起因する。一つの成分が負の仕事をする

れば、もう一つの成分は同じ大きさの正の仕事をするのである。このあと、式⑫, ⑬, ⑭が示すように、引き上げるときに自由電子にされた仕事の一部分は、液体金属に対して自由電子が y 方向にすべることによって生じる摩擦熱 $k u_y^2 N_e$ となる。残りの仕事は、電場 E_y によるクーロン力に抗して自由電子を P から Q へ引き上げるために使われ、電気的な位置エネルギーの増加になる。その位置エネルギーの増加分は、外部抵抗 R を流れる電流によって発生するジュール熱 $R I^2$ に変換される。

抵抗による摩擦熱の和は、

$$\begin{aligned}
 & k \{ (v - u_x)^2 + u_y^2 \} N_e \\
 = & k \frac{ \{ e^2 B (v B - E_y) \}^2 + \{ e k (v B - E_y) \}^2 }{ \{ (e B)^2 + k^2 \}^2 } N_e & (\text{式③と式④を代入}) \\
 = & k \frac{ e^2 (V_{\text{emf}} - V)^2 }{ \{ (e B)^2 + k^2 \} w^2 } (n \ell h w) & (V_{\text{emf}} = v B w, V = E_y w) \\
 = & \frac{ (V_{\text{emf}} - V)^2 }{ r } & \left(r = \frac{ \{ (e B)^2 + k^2 \} w }{ e^2 n k (\ell h) } \right) \\
 = & r I^2 & (V_{\text{emf}} - V = r I)
 \end{aligned}$$

となる。これは P Q 間の液体金属で発生するジュール熱である。まとめれば、

$$P_{\text{ex}} v = R I^2 + r I^2$$

という当然の結果が得られる。

この問題では、電流に対する陽イオンの寄与は無視できること、すなわち、中性の金属原子に対して陽イオンがすべらないことを仮定したが、実際の MHD 発電では陽イオンのすべり (ion slip) を考慮しなければならない。

また、ここでは液体金属内の電場の x 成分 E_x を 0 とした。その理由は、導体板 P と Q の電気抵抗は、通常の導線と同様に、暗黙のうちに 0 としているため、導体板の左端と右端が等電位になっているからである。このように x 軸方向には電場はないが、液体金属に対する自由電子の相対速度の x 成分 $u_x - v$ は 0 ではないので、液体金属の内部では x 軸の正の向きに電流が流れる(注)。その電流は右端 ($x = \ell$) に達すると、図 **iva** のように導体板に乗り移り、板の中を x 軸の負の向きに流れたあと、左端 ($x = 0$) から再び液体金属に乗り移って環状電流を形成する。この電流によって発生するジュール熱 $k (v - u_x)^2 N_e$ が大きくなると、エネルギーの変換効率 η が悪くなるので、この電流が流れないようにしなければならない。そのような改良を施した MHD 発電をホール発電といい、環状電流が流れるものをファラデー発電という。現在のところ、実用化を目指す実験用発電機としては、導電性の流体として高温の電離ガス (プラズマ) を用いたホール発電が主流となっている。ホール発電については大学生向けの解説で説明する。

(注) 電流密度 \vec{j} はベクトルであるが、電流は電気流量であってベクトルではない。したがって厳密には、 \vec{j} の x 成分 j_x だけがあると仮定したときの電流と言う方がよいのかもしれない。

図 iva
液体金属と
導体板の中を
 x 方向に流れ
る環状電流

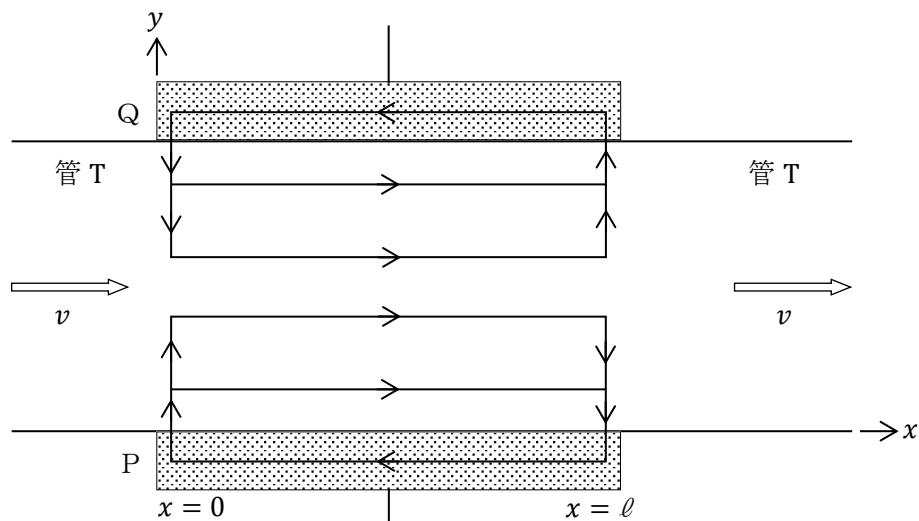


図 ivb
外部抵抗 R
と液体金属の
中を y 方向に
流れる電流 I

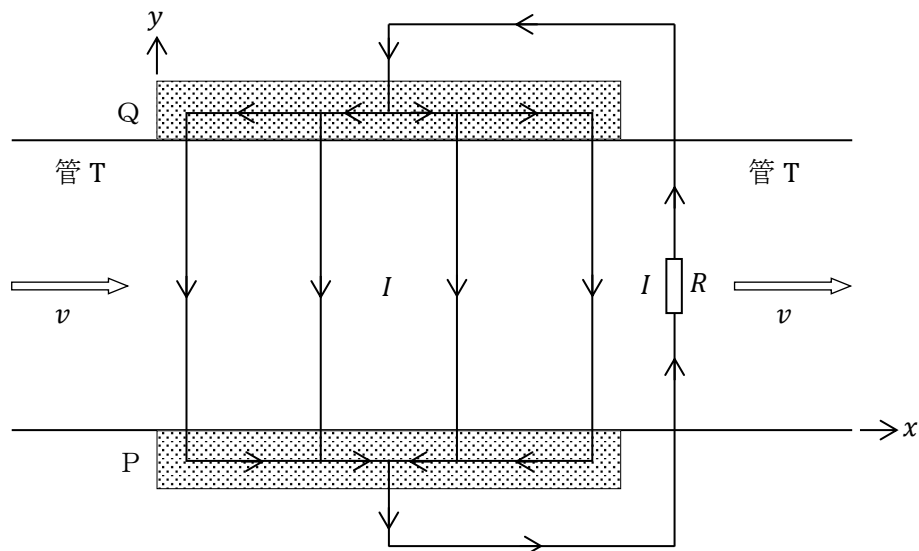
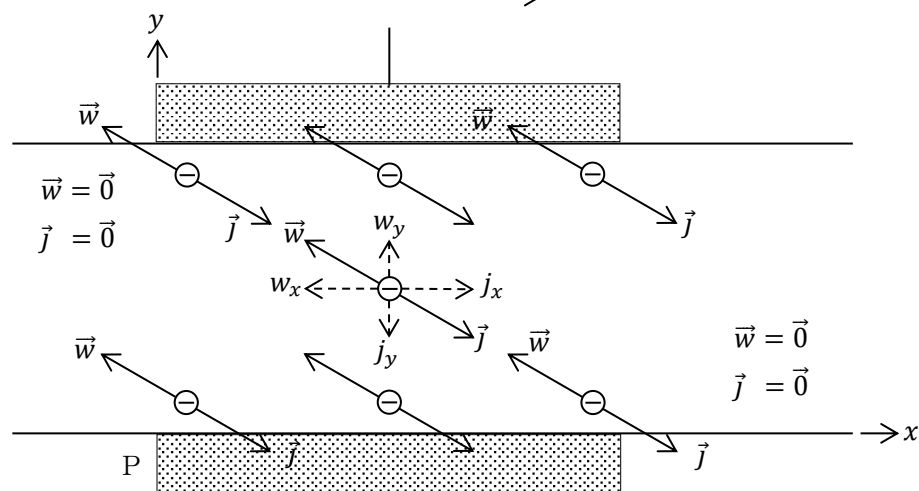


図 ivc
ドリフト速度
 $\vec{w} = \begin{pmatrix} u_x - v \\ u_y - 0 \end{pmatrix}$
電流密度
 $\vec{j} = -en\vec{w}$



液体金属の流れ \vec{v} に乗って見たときの平均的な自由電子の相対速度 \vec{w} と電流密度 \vec{j} (\vec{w} を drift velocity という)

[余談]

この問題の出典は大学入試問題である。電磁推進船の問題は大阪大学 1991 年度前期で、MHD 発電の問題は京都大学 1987 年度である。ただし、2 つの問題を合体させたので、問題文は全面的に書き換えてある。

超電導電磁推進船の実用化を目指した実験船「ヤマト^{ワン}-1」は、日本造船振興財団によって建造され、1992 年に実証航行実験が行われた。総トン数が 185 t もあるのに定員は 10 人で、航行速度はたったの 8 ノットであった。現在の技術では、搭載された超電導コイルが作り出す磁束密度は 4T が限度であったのが原因であるが、一応設計通りに動いたという点では成功であった。しかし、超電導コイルを冷却するのに 10 日もかかるようでは使いものにならない。実用化のためには、強力な小型常温超電導コイルの開発が不可欠である。突破口が開くのはいつのことになるのだろうか。また、海水を電気分解するのであるから塩素ガスが発生する。これをどのように除去するのかもまだ解決していないようである。

実験が終了したあとしばらくの間、ヤマト-1 は神戸海洋博物館の前に野外展示されていた。興味があったので、神戸での仕事のあと見学に行った。実験船という名前から想像していたものよりずっと大きく、少々ずんぐりしているが、カッコよく見えた。筆者は理学部出身であるが、理論に基づいてこのような実物を作り上げる夢を実現させた工学部系の人たちを羨ましく思った。

このときたまたま展示場のすぐ近くに、コロンブスの航海に使われたサンタ・マリア号の復元船が展示されていた。こちらは映画などから想像していたものよりずっと小さく、よくまあこのような小さな船に 30 人を越える荒くれ男どもを乗せて、未知の海に乗り出して行ったものだ、と感心した。と同時に、歴史を動かすことになる人間の欲望に対して名状しがたい畏れのようなものを感じた。

ともあれ、小さくてなんとなく危なっかしく見える帆船ではあるが、これでも 500 年前の最先端造船技術によって造られたのである。いまから 500 年も経てば、高性能の高速電磁推進船が、いやそれどころか私たちが想像もできないような推進機関で航行する船が、大洋を行き交っているにちがいない。

なお、ヤマト-1 とサンタ・マリア号の復元船は解体されてしまったので、いまは見ることができない。

[他の演習問題へ](#)