

問題 29 キブル天秤

次の文中の に適切な数式または数値を書き入れ, { } から正しいものを選べ。

キブル天秤は, 物体の質量を 10^{-8} 程度の相対的不確かさで測定する装置である。この秤の発明によって, 人工的なキログラム原器に頼ることなく, キログラムを定義することが可能となり, それを実施するために, 物理定数のプランク定数 h と電気素量 e が測定定数から定義定数に変更された。ここではキブル天秤の原理を考える。

(I) キブル天秤による質量の測定は二つの過程から成る。一つは運動モード (moving mode または velocity mode) と呼ばれるもので, 図 1 はその模式図である。

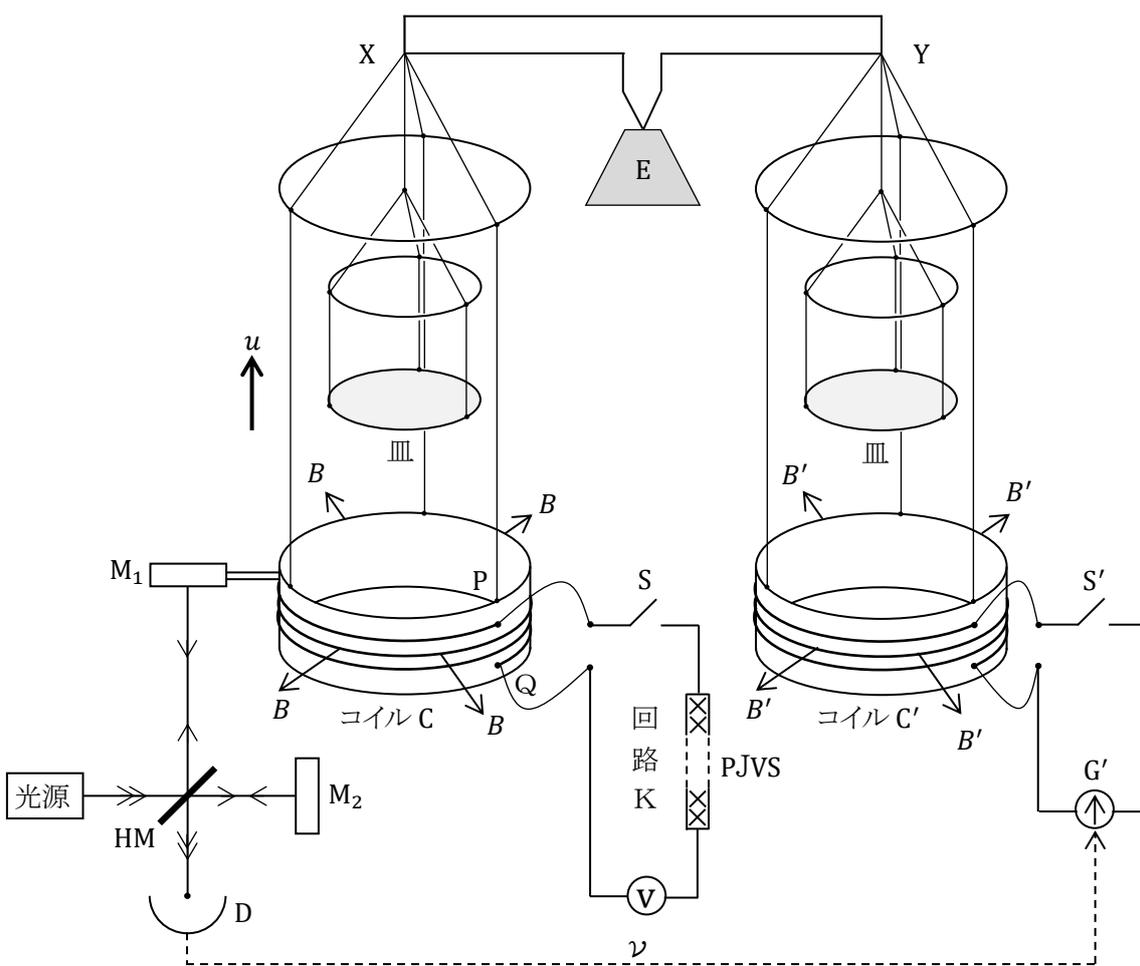


図 1

天秤の腕 XY はナイフエッジ E を支点として回転するが、いま図の状態です。左端 X から試料を乗せる皿と円形コイル C が釣り下げられている。コイル C の巻線の全長は ℓ で、上から見下ろしたとき、端子 P から端子 Q へ時計まわりに巻いてある。端子 P, Q を導線で回路 K につなぐ。この導線はコイル C の運動に影響を与えない。回路 K の P J V S は任意の電位差を正確に生じさせる素子で、V は高感度の電圧計である。P J V S については後で説明する。円形コイルには半径方向外向きの磁場がかけてあり、コイルの上下運動の範囲内で、その磁束密度 B は一定である。

光源から発せられた波長 λ のレーザー光は、半透鏡 H M で二つの同じ強さの光に分けられ、一つはコイル C に固定された鏡 M_1 で反射され、もう一つは天秤の容器に固定された鏡 M_2 で反射される。二つの反射光は H M を経由して光検出器 D で重なる。

腕の左端 X から釣り下げられた皿とコイルと同形のもので、右端 Y からも釣り下げられている。そのコイル C' にはコイル C と同様に放射状の磁場がかけられており、コイルの端子は運動に影響を与えない導線で電流源 G' につながれている。スイッチ S' を閉じて電流を流すと、コイル C' は磁場から電磁力を受ける。その力によって腕 XY を回転させることができる。

天秤の本体は密閉真空容器内に取り付けられており、容器内外の温度変化および外部からの振動と電磁波の伝播は、可能な限り小さくなるように制御されている。

静止の状態からコイル C' に流れる電流を調節して、コイル C を等速度で上昇させる。このとき光検出器 D で二つのレーザー光が干渉して、明るさが変化する。明るくなってから一旦暗くなり、次にまた明るくなる間に、鏡 M_1 は (1) だけ上昇する。したがって、微小時間 Δt の間に明→暗→明の変化を $\nu \Delta t$ 回繰り返せば、その間の鏡 M_1 と円形コイル C の上昇速度は (2) となる。この速度が予め想定していた一定速度 u となるように、コイル C' に流れる電流を制御する。それに必要な制御信号 ν が光検出器 D から電流源 G' へ伝えられる。その後、多くの微小時間 Δt で測定した速度の平均値を u とする。

実際の測定では、

$$u = 1 \text{ mm/s}, \quad \lambda = 500 \text{ nm} \quad (n = 10^{-9}), \quad \Delta t = 10 \text{ ms}$$

程度の値を採用している。このとき、微小時間 Δt の間に、光検出器 D では明→暗→明が (3) 回繰り返される。

(II) 極低温で電気抵抗が 0 となる金属を超電導体という。図 2-1 のように、薄い不導体 b を二つの超電導体 a と c で挟んだ素子を極低温にして、周波数 f の電磁波を不導体 b に照射する。この状態で電流 i を流すと、二つの超電導体の間に電位差 v が生じる。 i と v の関係をグラフで表すと、図 2-2 のようになる。このような素子をジョセフソン素子と呼ぶことにする。

図 2-2 が示すように、電流 i を変化させると、ある範囲内で電位差 v の値が一定となり、その一定値は、 $\Delta v = \frac{f}{K_J}$ の整数倍になる。 K_J はジョセフソン定数と呼ばれる定義定数で、次の値をもつ。

$$K_J = \frac{2e}{h} = 483\,597.848\,4 \dots \text{ GHz/V} \quad (G = 10^9)$$

図 2-3 のように、ジョセフソン素子を n 個直列につないで、図 2-2 の電流 i_1 を流せば、両端に $\frac{f}{K_J}n$ の電位差が生じる。実際には、 n として任意の整数が選べるようにプログラムされた素子が使用されている。これを PJVS (Programable Josephson Volt Standard) という。

たとえば、PJVS に $f = 75 \text{ GHz}$ の電磁波を照射して、 1 V に近い電位差を生じさせるためには、 n を $\boxed{(4)}$ にすればよい。

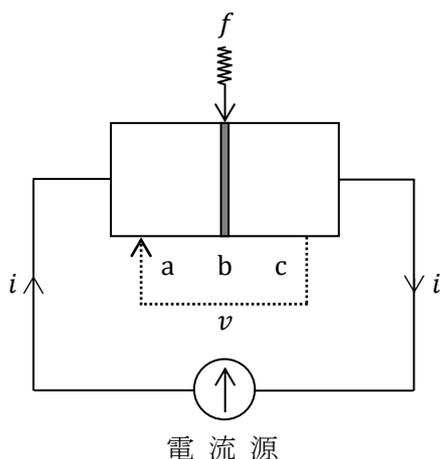


図 2-1

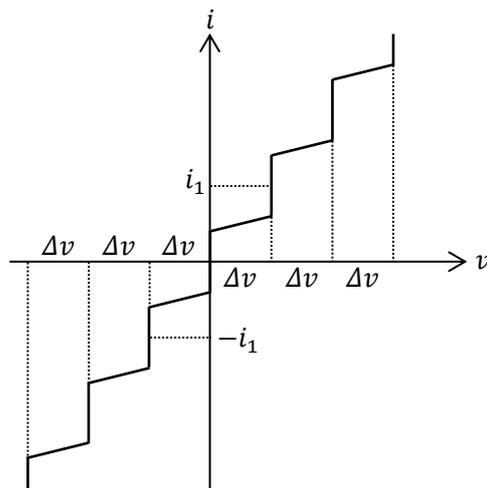


図 2-2

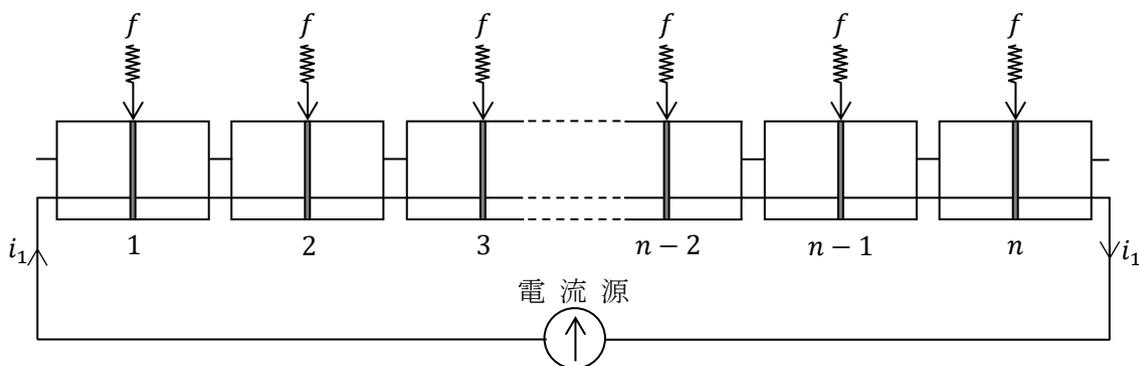


図 2-3

(III) 図 1 において、円形コイル C が等速度 u で上昇するとき、コイル C に誘導起電力が生じる。スイッチ S が開いているとき、端子 Q に対する端子 P の電位差 V は $\boxed{(5)}$ となる。このとき、PJVS の下端に対する上端の電位差 V_p が V に等しくなければ、スイッチ S を閉じたとき回路 K に電流が流れ、電圧計での電位差 V_D は $V - V_p$ となる。ここで、PJVS のパラメータ f と n を調節して、 $V_D = 0$ となるようにする。そのときの f と n の値をそれぞれ f_1, n_1 とすれば、 $B, \ell, u, h, e, f_1, n_1$ の間に次の関係式が成り立つ。

$$B \ell = \boxed{(6)} \tag{a}$$

ただし、コイル C と電圧計を流れる電流とは独立に、PJVS には図 2-2 の電流 i_1 が流されている。

(IV) 質量を測定する二つ目の過程は計量モード (weighing mode または force mode) と呼ばれるもので、図 3 はその模式図である。

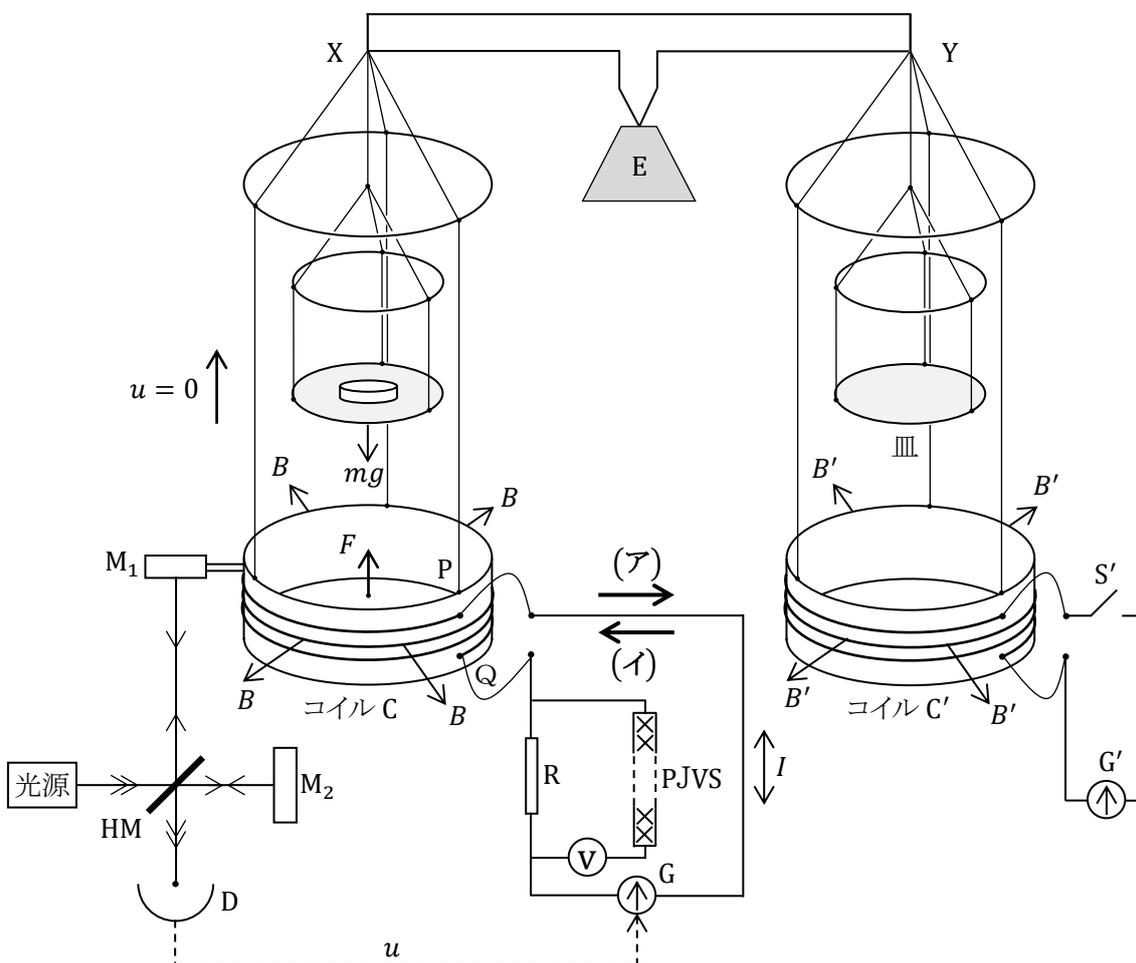


図 3

未知質量 m の試料を、腕の左端 X から釣り下げられた皿の中心に置く。電流源 G から流れ出した電流 I がコイル C を流れ、コイル C は磁場から電磁力 F を受ける。これが試料にはたらく重力 mg を打ち消せば、天秤は最初の静止の位置に留まる。 g は天秤が存在する位置での重力加速度の大きさである。そのためには、電流 I は図の矢印 (ア) { (ア) , (イ) } の向きに流れなければならない。静止しているとき、 mg , B , ℓ , I の間には、次の関係式が成り立つ。

$$B \ell = \boxed{(8)} \tag{b}$$

力が釣り合わず、コイル C が動く場合には、光検出器 D で検出した速度 u の信号を電流源 G に伝えて、 $u = 0$ となるように電流 I を制御する。

回路 K の抵抗 R での電位降下に等しい電位降下を P J V S で発生させれば、電圧計での電位降下は 0 となる。そのように調節したときの P J V S のパラメータ f と n の値がそれぞれ f_2 , n_2 で、抵抗 R の抵抗値を R とすれば、コイル C を流れる電流 I は次式で与えられる。

$$I = \boxed{(9)} \tag{c}$$

(V) 図4-1のように、適切な組み合わせの二つの半導体板 S_1, S_2 を重ね合わせたものに、電極板 E_1, E_2 を取り付け、これを極低温にして、図の x 方向に電流 I_x を流し、 z 方向に磁束密度 B_H の強磁場をかけると、電子は二つの半導体の接触面内でのみ運動するようになり、図の端子 Q_1 と Q_2 の間にホール電圧 V_y が生じる。このとき、 $R_H = V_y / I_x$ と B_H の間に図4-2のような関係が成り立つ。 B_H を変化させると、ある範囲内で「横抵抗」と名付けられた R_H が一定の値を取る。その値は、 k を自然数として、

$$R_H = \frac{R_K}{k}, \quad R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,45 \dots \Omega \quad (d)$$

で表されるとびとびの値になる。これを量子ホール効果といい、 R_K をフォン・クリッツィング定数という。これは定義定数であり、電気抵抗の基準として用いることができる。

図3の抵抗 R の抵抗値 R と R_H の比を精確に測定し、

$$R = r R_H \quad (e)$$

を得たとする。このような測定を、 R_H で R を校正するといい、 r を校正係数という。

式(b), (c), (d), (e) を用いて、 $B, \ell, k, mg, e, f_2, n_2, r$ の間に成り立つ関係式を求めれば、

$$B \ell = \boxed{(10)} \quad (f)$$

を得る。

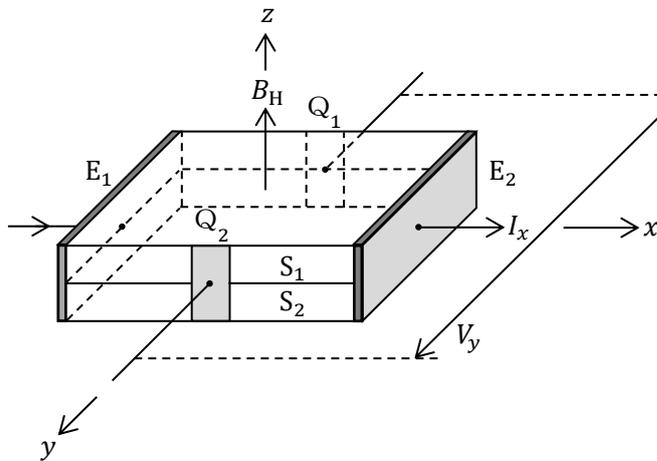


図 4-1

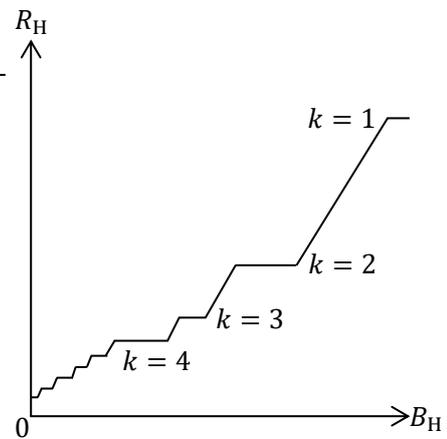


図 4-2

(VI) 最後に、式(a)と式(f)から $B \ell$ を消去して、 m を、 $h, k, n_1, n_2, f_1, f_2, r, u, g$ を用いて表せば、

$$m = \boxed{(11)} \quad (g)$$

となる。

右辺の h と k を除く変数の値を測定すれば、式(g)から試料の質量 m を求めることができる。

問題 29 の解答と解説

現時点 (2025 年) において, 開発・改良中のキブル天秤が世界に 10 台ほどあるが, 日本にはない。この問題は, アメリカ国立標準技術研究所で開発されたキブル天秤の改良型 NIST-4 の解説論文 (文献 1 と 2) を基にして作成した。原理は同じでも, 測定方法は各研究機関によって異なる。2023 年に東京大学の入試問題で扱われたキブル天秤 (多分ニュージーランドのもの) は, ここで論じる測定方法とは少し異なる。

(I) (1) 鏡 M_1 が $\frac{\lambda}{2}$ だけ上昇すると, 二つの反射光の光路差が λ だけ変化し, 重ね合わされたレーザー光は, 明→暗→明と 1 回変化する。

(2) 微小時間 Δt の間に, 鏡 M_1 は $\frac{\lambda}{2} \cdot \nu \Delta t \equiv \Delta z$ だけ上昇するので, コイル C の上昇速度 u は次のようになる。

$$u = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lambda \nu \quad \text{①}$$

(3) 式①より,

$$\nu = \frac{2u}{\lambda} = \frac{2 \times 1 \times 10^{-3} \text{ m/s}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

を得る。よって, 微小時間 Δt の間に繰り返される明滅の回数は次のようになる。

$$\nu \Delta t = 4000 \text{ s}^{-1} \times 10 \times 10^{-3} \text{ s} = \boxed{40}$$

(II) (4) P JVS の両端間の電位差を V_p とすれば, 問題文にあるように, $V_p = \frac{h}{2e} f n$ と表される。これに与えられた数値を代入して n を求めれば, 最も近い整数は次のようになる。

$$\begin{aligned} n &= 1 \text{ V} \times 483 \, 597.848 \, 4 \text{ GHz V}^{-1} / 75 \text{ GHz} \\ &= \boxed{6448} \end{aligned}$$

(III) (5) 微小時間 Δt の間に, 長さ ℓ の導線が横切る磁束 $\Delta \Phi$ は, $\Delta \Phi = B \ell u \Delta t$ であるから, この導線に生じる Q から P の向きの誘導起電力 V_{emf} は, ファラデーの法則より,

$$V_{\text{emf}} = + \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B \ell u$$

となる。この起電力によって端子 P が正に, 端子 Q が負に帯電する。コイル C には電流が流れていないので, 端子 Q に対する端子 P の電位差 V は次のようになる。

$$V = V_{\text{emf}} = \boxed{B \ell u}$$

あるいは, 起電力の定義に基づいて, 次のように計算してもよい。

コイル C の上昇速度が u のとき、導線内にある仮想的な単位正電荷にはたらくローレンツ力の導線に沿う方向の成分 f_L は Q から P の向きになる。これを導線に沿って端子 Q から端子 P まで積分したものが Q から P の向きの誘導起電力であるから $V_{\text{emf}} = f_L \ell = u B \ell$ となる。

(6) $V_D = 0$ すなわち回路 K に電流が流れないように調節できたとすると、 $V_{\text{emf}} = V_P$ が成り立ち、次式を得る。

$$B \ell u = \frac{h}{2e} f_1 n_1 \quad \text{—— ②} \quad \rightarrow \quad B \ell = \boxed{\frac{h f_1 n_1}{2e u}} \quad \text{—— (a)}$$

(注) もし P J V S に照射する電磁波の周波数 f を連続的に変えることができるなら、このような調節が可能である。まず適当に f の値を設定して、P J V S の n の値を変化させ、 V_D の値が最も 0 に近くなるときの n を n_1 とする。次に、 n を n_1 に固定して、 f を変化させ、 $V_D = 0$ となるように微調整すればよいのである。そのときの f を f_1 とすれば、式②が成り立つ。

ところが、NIST-4 では f を固定しているので、微調整ができない。したがって、 n を変化させて n_1 がわかっても、一般的には

$$B \ell u \neq \frac{h}{2e} f n_1$$

となる。その代わりに、

$$B \ell u - R_C \Delta I = V = V_P + V_D, \quad V_P = \frac{h}{2e} f n_1$$

が成り立つ。 R_C はコイル C の電気抵抗で、 ΔI は $n=n_1$ のときにコイル C を流れる微小電流である。NIST-4 では V_D を 10^{-9} の相対的不確かさで測定できるように校正されたデジタル電圧計が用いられている。 R_C は 200Ω 程度で、電圧計の内部抵抗はこれに比べれば桁違いに大きいので、 $R_C \Delta I \ll V_D$ となる。よって、NIST-4 では、

$$B \ell u = \frac{h}{2e} f n_1 + V_D \quad \rightarrow \quad B \ell = \frac{1}{u} \left(\frac{h}{2e} f n_1 + V_D \right)$$

となる。

(IV) (7) 重力 mg を打ち消すように、電磁力 F が鉛直上向きになるためには、フレミングの左手の法則より、コイル C を流れる電流は、 $\boxed{(イ)}$ P から Q の向きでなければならない。

(8) コイル C 全体にはたらく電磁力は、対称性より、コイル C の中心軸に沿ってはたらくとしてよい。よって、電磁力と重力が釣り合えば、支点 E のまわりの力のモーメントも釣り合い、腕 XY は回転しない。コイル C を流れる電流 I は半径方向の磁束密度 B に垂直であるので、電磁力の大きさ F は $B \ell I$ となる。よって、力の釣り合いの式より次式を得る。

$$B \ell I = mg \quad \rightarrow \quad B \ell = \boxed{\frac{mg}{I}} \quad \text{(b)}$$

(9) 抵抗 R での電位降下と P J V S での電位降下が等しいことから、次式を得る。

$$R I = \frac{h}{2e} f_2 n_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{I = \frac{h f_2 n_2}{2e R}} \quad (c)$$

(V)(10) 式 (b), (c) と問題文中の式 (d), (e) より次式を得る。

$$B \ell = mg / \frac{h f_2 n_2}{2e R} = \frac{2e mg}{h f_2 n_2} r R_H = \frac{2e mg}{h f_2 n_2} r \frac{h}{k e^2}$$

$$= \boxed{\frac{2 mg r}{k e f_2 n_2}} \quad (f)$$

(VI)(11) 式 (a) と式 (f) から $B \ell$ を消去して、 m を求めれば、

$$m = \boxed{h \frac{k n_1 n_2 f_1 f_2}{4 r u g}} \quad (g)$$

となる。

右辺の k は任意の量子数であるが、実際には、できるだけ小さな磁束密度 B_H (と言っても強磁場) で実用化が可能となる値 ($k = 4$) を採用することが多いようである。 $V_D = 0$ となる n を求める操作は自動化されており、その過程で整数 n_1 と n_2 の値がわかる。 f_1, f_2, r, u の値は上述の測定でわかり、 g の値は重力加速度計で測定できる。現在の技術では、これらの値を 10^{-9} 以下の相対的不確かさで求めることができる。それらの値を国際単位系 SI の単位を用いて表し、式 (g) に代入すれば、試料の質量 m を、kg 単位で、 10^{-8} 程度の相対的不確かさで求めることができるのである。

式 (g) の比例係数 h は定義定数であるから、プランク定数 h が質量の「基準」になっているとすることができる。

(文献)

1. D. Haddad et al. : A precise instrument to determine the Planck constant, and the future kilogram REVIEW OF SCIENTIFIC INSTRUMENT **87**, 061301 (2016)
2. I. A. Robinson and S. Schlaminger : The watt or Kibble balance : a technique for implementing the new SI definition of the unit of mass Metrologia **53** (2016) A46–A74

(参考) 図 3 で腕の右端にも皿を釣り下げているのは次の理由による。

たとえば、実際に $m \approx 1 \text{ kg}$ の試料の質量を精確に知りたいときには、左側の皿に試料を置いて釣り合ったときに、コイル C にはたらく上向きの電磁力 F を精確に測定すればよい。ところが実際には、まず左側の皿には試料を置かず、右側の皿に 0.5 kg のおもりを置いて釣り合ったときに、コイル C に働く下向きの電磁力 F_d を精確に測定する。次に、右側の皿におもりを置いたまま、左側の皿に試料を置いて釣り合ったときに、コイル C にはたらく上向きの電磁力 F_u を精確に測定する。2 回の測定で得られる精確な質量 0.5 kg と $m - 0.5 \text{ kg}$ の和は m である。このとき $F_d + F_u = F$ が成り立ち、コイル C を流れる電流にも同様の式が成り立つ。しかし、コイルに発生するジュール熱は 2 回に分けて測定した方が少ない。ジュール熱は、精密な機器に影響するので、少ない方がよいのである。