

問題 28 光ピンセット

レーザー光で微小な粒子 ($10\text{ nm}\sim 10\text{ }\mu\text{m}$) を捕捉する技術を光ピンセット (optical tweezers) という。これを使えば生体高分子に力をおよぼすことができるので、分子生物学や医学の基礎研究にとって有用な技術となっている。その他の分野でも、分子や誘電体微粒子を捕捉して移動させる必要があるときに、光ピンセットが用いられている。

ここでは、真空中に固定された半径 r ・屈折率 n の微小なガラス球 G に波長 λ の細いレーザー光線を照射する場合を考える。ただし、 $\lambda < r$ とする。この場合には、レーザー光線は幾何光学に従って伝播するとしてよい。

(I) 図 1 のように、球面上の点 A に入射角 α で入射したレーザー光線は、屈折角 β で屈折した後、点 B で入射角 β ・屈折角 α で屈折する。球面での反射や球内での吸収はないものとする。光線 AB の中点を O とし、球の中心 C と光線を含む平面上に、図のような座標軸 $O-x y$ を設定する。

レーザー光線は、エネルギーが hc/λ 、運動量の大きさが h/λ の光子の流れと見なすことができる。 c は光速度、 h はプランク定数である。

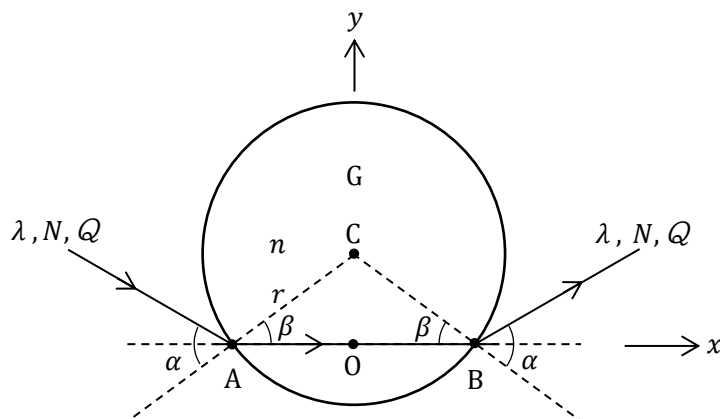
問 1 1 個の光子がレーザー光線に沿ってガラス球 G を透過するとき、その運動量変化の x 成分と y 成分はいくらか。 $h, \lambda, \alpha, \beta$ を用いて答えよ。

問 2 レーザー光線がガラス球 G におよぼす力の向きはどちら向きで、その大きさはいくらか。 $h, \lambda, \alpha, \beta, N$ を用いて答えよ。 N は A 点に入射する単位時間あたりの光子数である。

以下では、計算を簡単にするために、 α が微小角の場合を考える。この場合には、 $\sin \alpha \cong \alpha$ が成り立つ。

問 3 A 点に入射するレーザー光線の単位時間あたりのエネルギー (以下エネルギー流量という) を Q として、レーザー光線がガラス球 G におよぼす力の大きさを、 c, Q, r, n, d を用いて答えよ。 d は線分 CO の長さである。

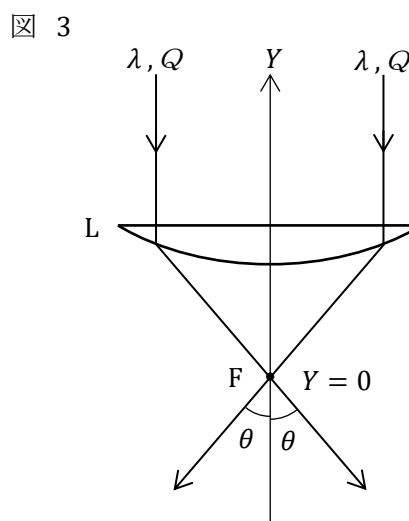
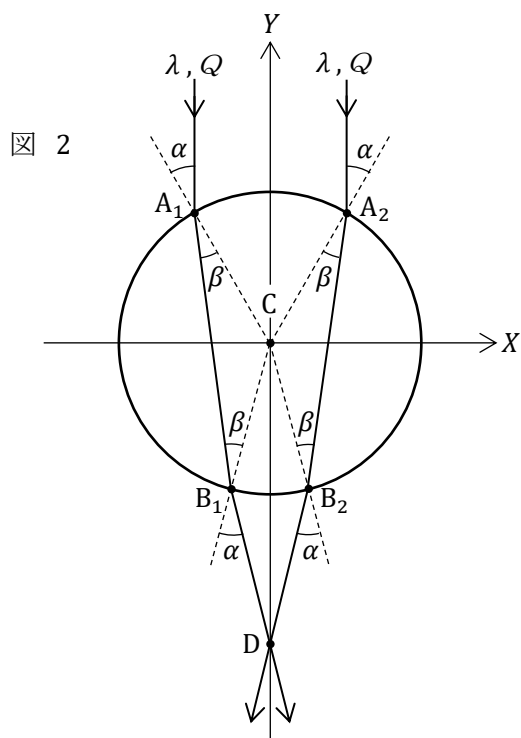
図 1



(II) 図 2 のように、 XY 座標の原点にガラス球 G の中心 C を固定し、2 本の平行レーザー光線 (波長 λ , エネルギー流量 Q) を Y 軸の負の向きに入射させる。2 本の光線は Y 軸に関して対称で、それらとガラス球 G の中心 C は平面上にある。したがって、屈折光線は Y 軸上の点 D で交差する。入射角 α は微小角とする。

問 4 2 本のレーザー光線がガラス球 G におよぼす力の合力 $\vec{F}$ の向きはどちら向きで、その大きさはいくらか。 c, Q, r, n, d を用いて答えよ。

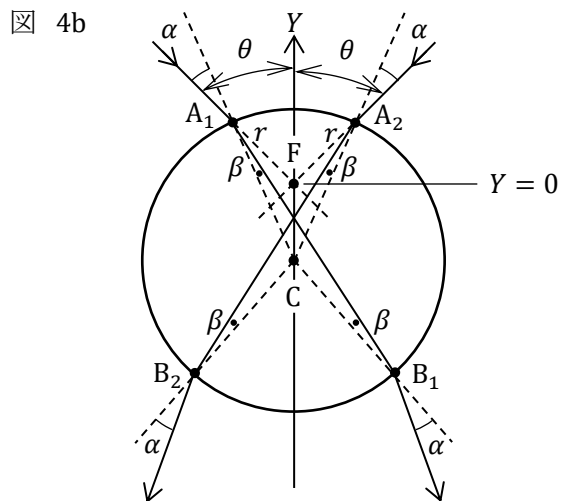
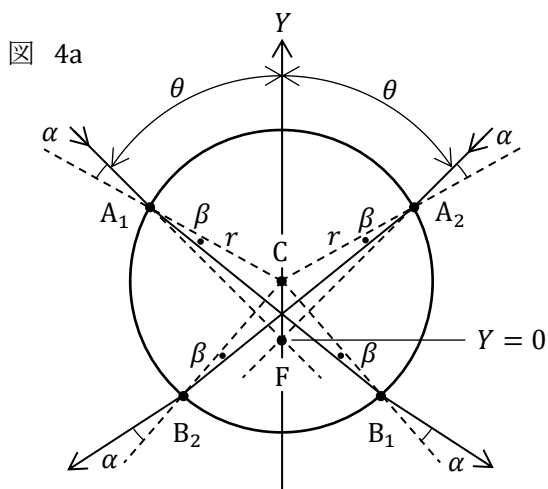
問 5 もし、図 2 の A_2 点に入射するレーザー光線のエネルギー流量 Q_2 が A_1 点に入射するレーザー光線のエネルギー流量 Q_1 の 2 倍であれば、ガラス球 G にはたらく合力 $\vec{F}$ の向きはどちら向きになるか。力の作用点を C として、その向きを矢印で表せ。



(III) 図 3 のように、2 本の平行レーザー光線 (波長 λ , エネルギー流量 Q) をレンズ L によって Y 軸上の焦点 F で交差させる。屈折光線と Y 軸のなす角度を θ とする。 θ は微小角ではない。焦点 F を Y 軸の原点とする。

問 6 図 4 のように、ガラス球 G の中心 C を原点近傍の Y 軸上に固定して、2 本の屈折光線を遮る。そのとき、2 本のレーザー光線がガラス球 G におよぼす力の合力 $\vec{F}$ が Y 軸の正の向きになるのは、中心 C が Y 軸の正の領域にあるとき (図 4 a) か、それとも負の領域にあるとき (図 4 b) か。

また、そのときの合力の大きさ F を、 c, Q, r, n, θ, Y を用いて表せ。ただし、 Y は中心 C の位置座標で、 $|Y| \ll r$ とする。すなわち、入射角 α は微小角とする。このとき、中心 C から A_1F に下した垂線の方角と A_1B_1 に下した垂線の方角は同じと見なしてよい。



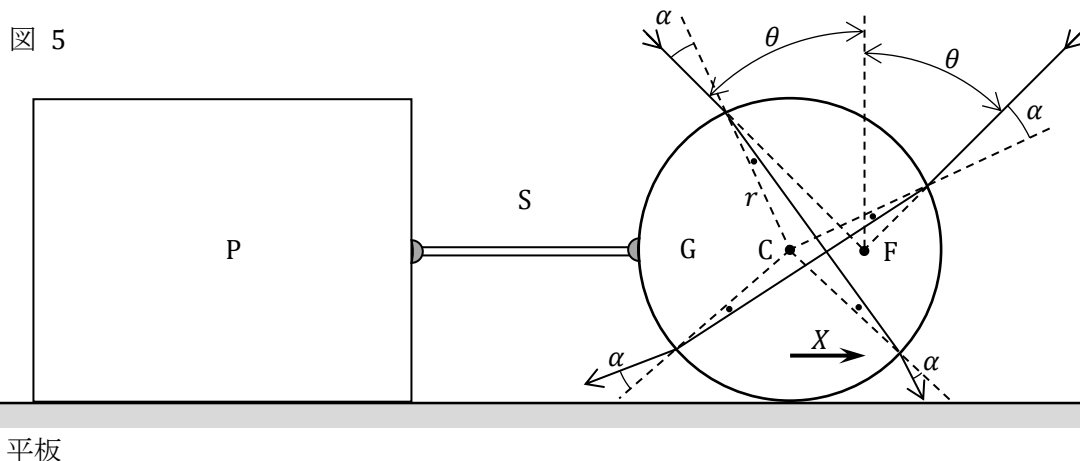
いま、 Y 軸が鉛直方向で、ガラス球 G に重力 mg (m はガラス球 G の質量、 g は重力加速度の大きさ) が Y 軸の負の向きにはたらいている場合を考える。2 本のレーザー光線による力の合力と重力がつりあって、ガラス球 G が真空中に静止しているとする。そのときの Y の値を Y_0 とする。ただし、 $|Y_0| \ll r$ とする。

問 7 Y 軸方向になんらかの擾乱が生じて、ガラス球 G の位置 Y が Y_0 から少しずれたとする。その後、ガラス球 G は位置 Y_0 の近傍に留まるかどうかを、理由を付して述べよ。

次に、図 5 のように、水平な平板上に微小なガラス球 G と生体高分子 P を置き、両者を高分子のひも S でつなぐ。これらは真空中にあり、 P は平板に固定されている。図 3 のレーザー光線の焦点 F がガラス球 G の中心から右側へ少しずれた位置にくるようにする。そのずれ X をゆっくり増加させると、 $X = X_0$ ($\ll r$) となったときに、ひもが生体高分子から離れた。

問 8 離れる直前にひもと生体高分子がおよぼしあっていた張力の大きさはいくらか。以下の数値を用いて、有効数字 1 桁で答えよ。ただし、ガラス球 G と平板の間の摩擦力は無視できるとする。

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, Q = 5 \times 10^{-3} \text{ J/s}, n = 1.5, \theta = 45^\circ, X_0 / r = 0.1$$



問題 28 の解答と解説

アシュキン (A. Ashkin) は, 1970 年に放射圧がマイクロメートル程度の粒子におよぼす力を検出し, 1986 年に強いレーザー光によって微粒子を捕捉できることを実証した。その業績によって, 2018 年にノーベル賞を受賞した。

早稲田大学 (2000 年) と東京大学 (2021 年) が光ピンセットを題材にした入試問題を出題している。この問題はこれらを参考にして作成した。

(I)

問 1 ガラス球 G を透過する前と透過した後の光子の運動量の x 成分 $p_x, p_{x'}$ と y 成分 $p_y, p_{y'}$ は,

$$p_x = \frac{h}{\lambda} \cos(\alpha - \beta) \quad p_y = -\frac{h}{\lambda} \sin(\alpha - \beta)$$

$$p_{x'} = \frac{h}{\lambda} \cos(\alpha - \beta) \quad p_{y'} = \frac{h}{\lambda} \sin(\alpha - \beta)$$

であるから, それらの変化量 $\Delta p_x, \Delta p_y$ は次のようになる。

$$\Delta p_x = p_{x'} - p_x = \boxed{0}, \quad \Delta p_y = p_{y'} - p_y = \boxed{\frac{2h}{\lambda} \sin(\alpha - \beta)}$$

問 2 運動量変化 Δp_y はガラス球 G が 1 個の光子に与えた力積に等しい。よって, 作用・反作用の法則より, 1 個の光子はガラス球 G に $-\Delta p_y$ の力積を与える。レーザー光線がガラス球 G におよぼす力 f は, 透過する光子が単位時間あたりにおよぼす力積であるから, その向きは, $\boxed{\text{C から O の向き}}$ で, 大きさ f は次のようになる。

$$f = N |-\Delta p_y| = \boxed{\frac{2Nh}{\lambda} \sin(\alpha - \beta)}$$

問 3 レーザー光線のエネルギー流量は, $Q = N \frac{hc}{\lambda}$ と表され, 屈折の法則より, $\sin \alpha = n \sin \beta$ が成り立つ。これらと問題文に与えられている近似式を用いれば, f は,

$$f \doteq \frac{2Nh}{\lambda} (\alpha - \beta) \doteq \frac{2Q}{c} (n\beta - \beta)$$

と変形される。また, 図 1 より, $d = r \sin \beta \doteq r \beta$ であるから, f は,

$$f \doteq \boxed{\frac{2Q}{c} \frac{n-1}{r} d} \quad (1)$$

と表される。すなわち, 入射角 α が小さくて, レーザー光線がガラス球 G の中心近傍を通過する場合には, ガラス球 G におよぼす力の大きさは, 中心 C から屈折光線 AB までの距離 d に比例し, その向きは中心 C から屈折光線 AB の中点に向かう向きとなる。

(II)

問 4 1 本のレーザー光線は, 問 3 の解答で述べた力をガラス球 G におよぼす。図 6 に示されているように, その方向は X 軸と角度 $\alpha - \beta$ をなす。 Y 軸に関して 2 本のレーザー光線は対称であるか

ら、2つの力の合力 $\vec{F}$ の X 成分は 0 で、 Y 成分は、

$$F_Y = -2f \sin(\alpha - \beta)$$

となる。式 (1) と近似式 $\sin(\alpha - \beta) \doteq (n-1)\beta \doteq (n-1)d/r$ より、

$$|F_Y| \doteq \frac{4Q}{c} \left(\frac{n-1}{r} \right)^2 d^2$$

を得る。合力 $\vec{F}$ の向きは、C から D の向き である。

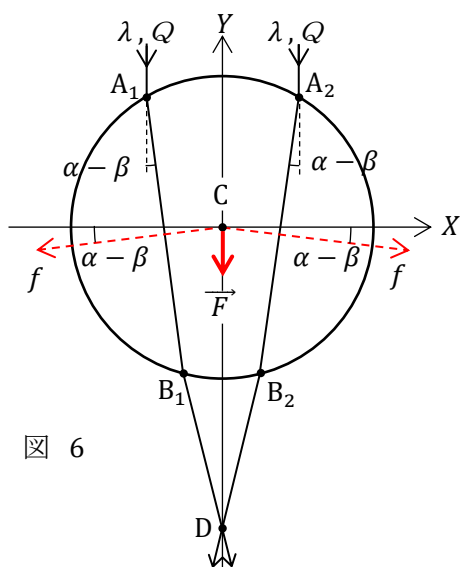


図 6

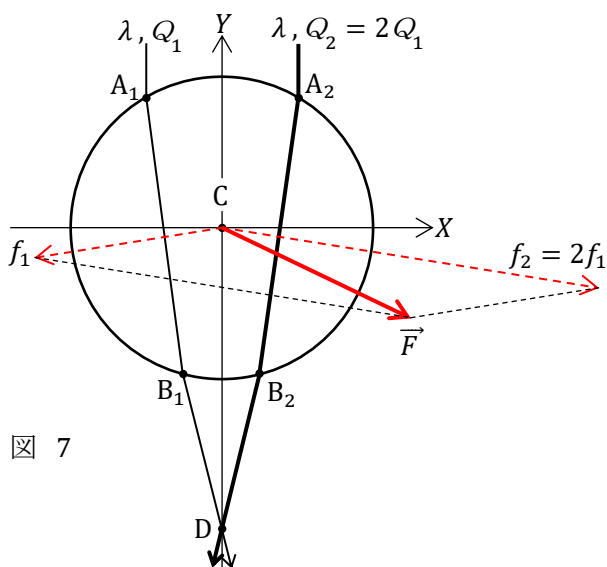


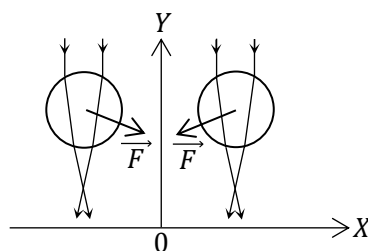
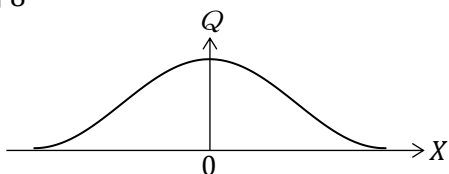
図 7

問 5 1本のレーザー光線がガラス球 G におよぼす力の大きさ f はエネルギー流量 Q に比例するので、 A_2 点に入射したレーザー光線がおよぼす力は、 A_1 点に入射したレーザー光線がおよぼす力の 2 倍になる。これらの力ベクトルを合成すれば、その向きは図 7 に示した $\vec{F}$ の矢印の向きになる。

(補足 1)

2本のレーザー光線ではなく、平面レーザー光が Y 軸の負の向きに伝播していて、 Y 軸に垂直な面を単位面積あたり単位時間あたりに通過するレーザー光のエネルギー Q が、 Y 軸からの距離 R の単調減少関数で、たとえば X 軸上で図 8 のようになっているとする。 X の負の領域にあるガラス球 G を透過するレーザー光が、図 7 に示されているような 2本のレーザー光線の集まりと考えれば、ガラス球 G はエネルギー流量密度 Q が増加する向き、すなわち、 Y 軸に近づく向きの力を受けることがわかる。 X の正の領域にガラス球 G があるときも同様である。

図 8



(III)

問 6 中心 C の位置座標 Y が正の場合と負の場合に分けて、2 本のレーザー光線がおよぼす力を破線で、それらの合力を実線で表せば、図 9 のようになる。これらの図から明らかなように、合力 $\vec{F}$ が Y 軸の正の向きになるのは、中心 C が焦点 F より下にあるとき、すなわち、 $\boxed{Y < 0}$ のときである。

ガラス球 G がないときの光線 $A_1 F$ (あるいは $A_2 F$) に中心 C から下した垂線の足を H とすると、

$$\overline{CH} = r \sin \alpha = |Y| \sin \theta$$

が成り立つ。一方、 $\overline{CO} = r \sin \beta \equiv d$, $\sin \alpha = n \sin \beta$ であるから、

$$d = r \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{|Y| \sin \theta}{n} \quad (2)$$

となる。問題文にあるように、 CH の方向と CO の方向は同じと見なしてもよいので、式 (1) と式 (2) を用いて合力 $\vec{F}$ の大きさ F を求めれば、

$$F \equiv 2 f \sin \theta = \boxed{\frac{4 Q}{c} \frac{n-1}{n} \frac{|Y|}{r} \sin^2 \theta} \quad (3)$$

となる。

図 9a

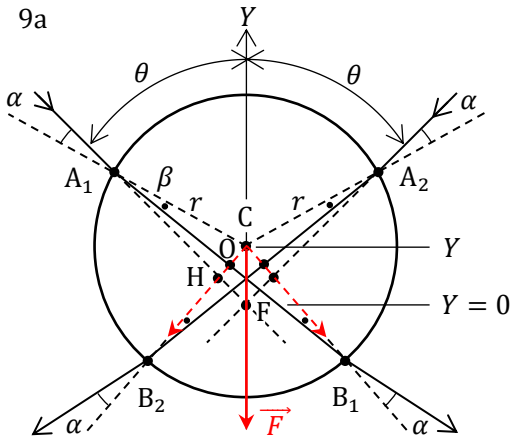
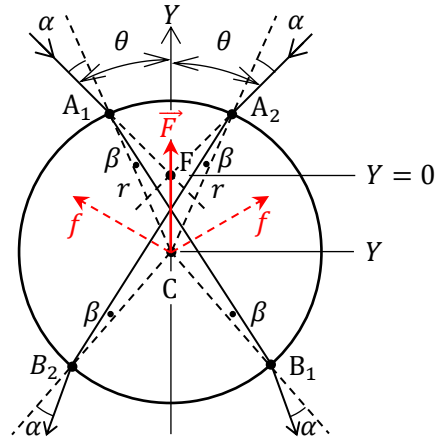


図 9b



問 7 合力 $\vec{F}$ の Y 成分 F_Y を、簡単のために、

$$F_Y = -K Y, \quad K = \frac{4 Q}{c} \frac{n-1}{n} \frac{1}{r} \sin^2 \theta > 0$$

と表せば、ガラス球 G が $Y = Y_0$ で静止しているとき、

$$0 = -K Y_0 - m g \quad \rightarrow \quad Y_0 = -\frac{m g}{K} < 0$$

が成り立つ。擾乱によって動き出した後のガラス球 G の運動方程式は、加速度の Y 成分を a_Y として、

$$m a_Y = -K Y - m g = -K (Y - Y_0)$$

と表される。よって、ガラス球 G は、

$$\text{つりあいの位置 } Y = Y_0 \text{ を中心として、角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ の微小単振動をする。}$$

すなわち、擾乱が小さければ、ガラス球 G の運動は安定で、 $Y = Y_0$ から離れてしまうことはない。

(補足2)

2本のレーザー光線ではなく、平面レーザー光をレンズLに入射させると、屈折光のエネルギー流量密度 Q は、光線が集中する焦点Fで最大となり、そこから離れると減少する。このとき、微小ガラス球Gは Q が増加する向きに力を受けるので、焦点Fより下にあるとき、ガラス球Gには上向きの力がはたらき、下向きの重力を打ち消して、真空中でガラス球Gを浮遊させることが可能となる。

この問題の最初に $\lambda < r$ を仮定したが、 $\lambda > r$ の場合には幾何光学は使えず、微粒子による電磁波の散乱(レイリー散乱)を論じなければならない。それにはマックスウェル方程式とベクトル解析が必要となるので、ここでは説明しないが、結論だけを述べると、電磁波の電場のエネルギー密度の時間平均値が増加する向きに、誘電体の微粒子が力を受ける。したがって、平面レーザー光の波長より小さなガラス球も、上記の焦点の下側で浮遊させることが可能となる。

問8 図9と図10が異なるところは、 $\overline{CH} = |Y| \sin \theta$ が $\overline{CH} = X \cos \theta$ になっている点である。

そのために、式(2)が、 $d = \frac{X}{n} \cos \theta$ となり、式(3)が、

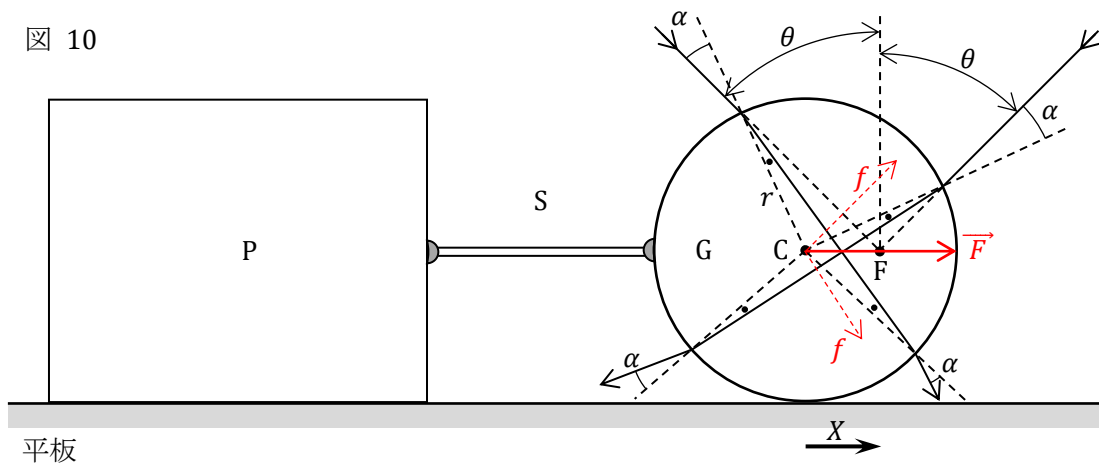
$$F = \frac{4Q}{c} \frac{n-1}{n} \frac{X}{r} \cos^2 \theta$$

となる。 $X = X_0$ として、与えられた数値を代入すると、離れる直前にはたらいっている張力の大きさは、

$$F = \frac{4 \times 5 \times 10^{-3} \text{ J/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \times \frac{1.5 - 1}{1.5} \times 0.1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \approx \boxed{1 \times 10^{-12} \text{ N}}$$

となる。大雑把に言って、生体高分子間にはたらく力は pN (ピコニュートン) の桁である。

図 10



他の演習問題へ