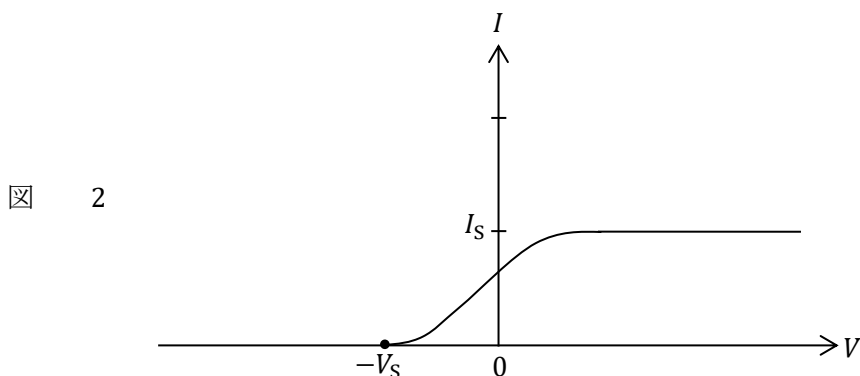
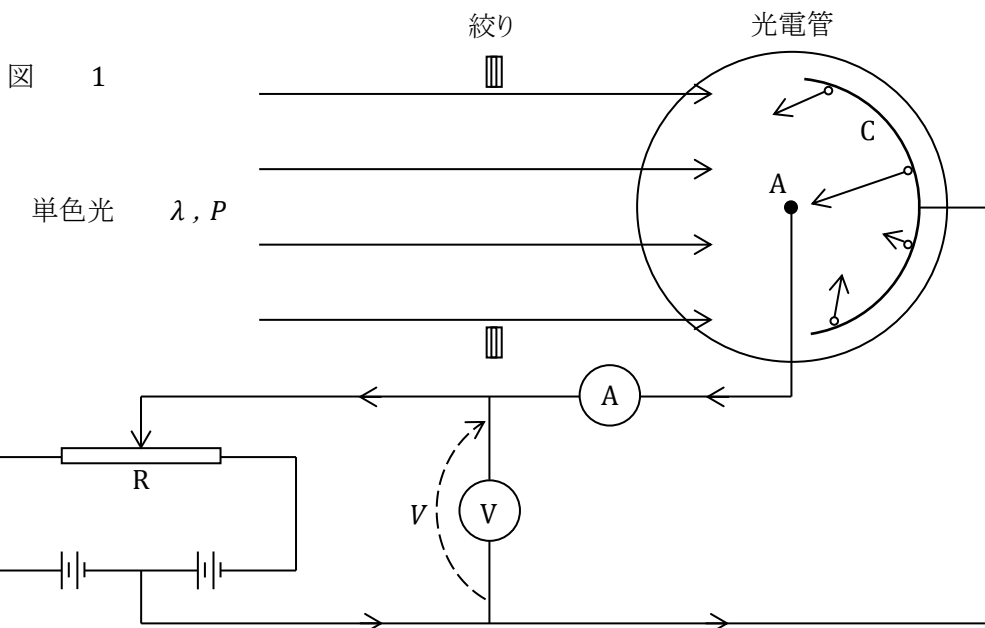


問題 27 プランク定数の測定

以下の文中の に適切な数式を、() 内の物理量を用いて書き入れ、問いに答えよ。
ただし、光速度を c 、電気素量を e 、プランク定数を h とする。

図 1 は、アインシュタインの光量子説を実証する実験装置の模式図である。光電管の陰極 C と陽極 A は同じ金属で作られており、その仕事関数は W である。陰極 C に波長 λ の単色光を照射すると、その表面から電子がさまざまな方向にさまざまな速さで飛び出してくる。陽極 A に達した電子は、図の矢印の向きに移動して陰極 C に戻る。照射する単色光のエネルギー流量、すなわち陰極 C に入射する単位時間あたりのエネルギーを P とする。単色光を照射したまま、スライド抵抗 R の接点を少しずつずらして測定した電圧計 (V) と電流計 (A) の読みをそれぞれ V, I とする。その測定値をグラフで表すと図 2 のようになる。接点を左へずらして V が正で大きくなると、 I は飽和電流 (saturation current) I_s に近づき、逆に接点を右へずらして V が負でその絶対値が大きくなると、 I は 0 に近づく。 I が 0 となるときの $-V$ の値 V_s を阻止電圧 (stopping potential) という。



入射単色光を光子（光量子）の流れと見なせば、陰極 C に入射する単位時間あたりの光子数は、 $\boxed{(1)}(c, h, \lambda, P)$ と表される。一方、光子のエネルギーを吸収して陰極 C から飛び出す単位時間あたりの電子数は、 $\boxed{(2)}(e, I_s)$ と表される。よって、1 個の光子が入射したときに、陰極 C から 1 個の電子が飛び出す確率は、 $\boxed{(3)}(c, e, h, \lambda, P, I_s)$ から求まる。これを光電管の量子効率という。

飛び出してくる電子の運動エネルギーには上限がある。その上限値を、 λ と W を用いて表せば、 $\boxed{(4)}(c, h, W, \lambda)$ となり、 V_s を用いて表せば、 $\boxed{(5)}(e, V_s)$ となる。したがって、 V_s と W, λ の間には、

$$\boxed{(5)} = \boxed{(4)}$$

の関係式が成り立つ。また、(4) からわかるように、入射単色光の波長が、 $\boxed{(6)}(c, h, W)$ より大きいときには、いくら強い単色光を照射しても電子は飛び出さない。

問 1 入射単色光の波長 λ を変えずに、入射エネルギー流量を $2P$ にすれば、 $I - V$ 曲線はどのようなになるか。図 2 に破線で示せ。

問 2 入射単色光の波長を λ より少し小さくし、入射エネルギー流量を P になるように調整すれば、 $I - V$ 曲線はどのようなになるか。図 2 に点線で示せ。ただし、量子効率は λ が少し変化しても変わらないものとする。

次に、入射単色光の波長を λ_1 または λ_2 にしたときに、測定される阻止電圧を V_{S1} または V_{S2} とする。これらを用いてプランク定数を式で表せば、

$$h = \boxed{(7)}(c, e, \lambda_1, \lambda_2, V_{S1}, V_{S2})$$

となる。よって、 c と e の値が既知であれば、 $\lambda_1, \lambda_2, V_{S1}, V_{S2}$ の値を測定することによって、プランク定数 h の値を求めることができる。

問題 27 の解答と解説

量子論にとって基本的な物理定数である h の値は、いくつかの方法で測定できるが、ここでは光電効果を用いて測定する方法を取り上げる。

(1) 入射単色光の光子 (photon) 1 個のエネルギーは hc / λ であるから、単位時間あたりの入射光子数を n_{ph} とすれば、 $P = n_{\text{ph}} hc / \lambda$ が成り立ち、次式を得る。

$$n_{\text{ph}} = \boxed{\frac{\lambda P}{hc}} \quad \text{①}$$

(2) V が正で大きい場合、光電管内には A から C の向きに強い電場が生じ、C から飛び出した電子はすべて、C から A の向きに強い静電気力を受けて、A に吸い込まれてしまう。単位時間あたりに吸い込まれる電子数を n_e とすれば、電流の定義 (導線の断面を単位時間あたりに通過する電気量) より、 $I_s = n_e e$ が成り立ち、次式を得る。

$$n_e = \boxed{\frac{I_s}{e}} \quad \text{②}$$

(3) 陰極 C に一つの光子が入射すれば、一つの電子が飛び出するか、あるいは一つも飛び出さないかのどちらかである。したがって、一つの電子が飛び出す確率 η は、

$$\eta = \frac{n_e}{n_{\text{ph}}} = \boxed{\frac{hc}{e} \frac{I_s}{\lambda P}} \quad \text{③}$$

となる。 η は陰極 C の表面の物理性質で決まる。理想的な光電管の η は 1 である。スーパーカミオカンデの光電子増倍管の η は ~ 0.2 である。

(4) 仕事関数 W は、陰極 C から電子を取り出すのに必要なエネルギーの最小値であるから、光子のエネルギー hc / λ を吸収して飛び出す電子 (質量 m) の運動エネルギー最大値は、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \boxed{\frac{hc}{\lambda} - W} \quad \text{④}$$

となる。これを光電効果に関するアインシュタインの式という。

(5) $V = -V_s$ の場合、C から真つ直ぐ A に向かって最大の運動エネルギーで飛び出した電子でさえ、A の直前で静止し、C へ引き返すので、一つの電子も電流計 (A) を通過しない。そのとき、C に対する A の電位差は $-V_s$ であるから、上記の電子に対するエネルギー保存則より、次式を得る。

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = (-e)(-V_s) = \boxed{e V_s} \quad \text{⑤}$$

よって、 V_s と λ , W の間に成り立つ関係式は次のようになる。

$$e V_s = \frac{h c}{\lambda} - W \quad (6)$$

(6) 入射単色光の波長を徐々に大きくすると、式④より、やがて飛び出す電子の最大の速さ $v_{\max}$ は 0 になる。すなわち、電子は飛び出してこなくなる。よって、光電効果が起こるか、起こらないかの境目の波長 λ_c は、

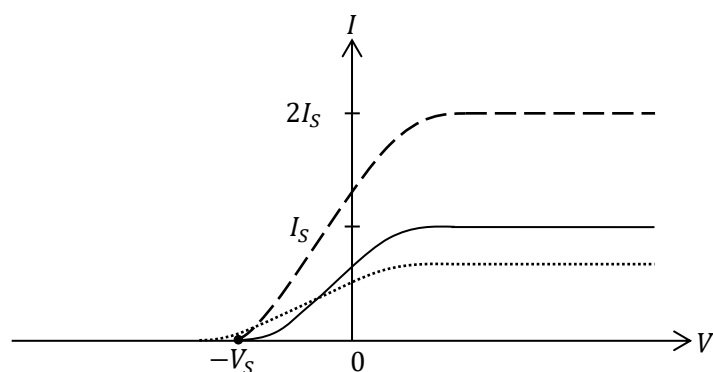
$$\lambda_c = \frac{h c}{W}$$

と表される。これを限界波長という。

問 1 波長 λ が不変なら、式⑥より阻止電圧 V_s も不変である。入射エネルギー流量が 2 倍になれば、式③より飽和電流も 2 倍になる。よって、 $I-V$ 曲線は図 3 の破線のようにになる。

問 2 波長が λ より少し小さくなれば、式⑥より阻止電圧 V_s より少し大きくなる。題意より、 η は変化しないとしてよいので、入射エネルギー流量が P になるように調整すれば、式③より飽和電流は I_s より少し小さくなる。よって、 $I-V$ 曲線は図 3 の点線のようにになる。

図 3



(7) 入射単色光の波長が λ_1 または λ_2 のとき、式⑥より、

$$e V_{s1} = \frac{h c}{\lambda_1} - W, \quad e V_{s2} = \frac{h c}{\lambda_2} - W \quad (7)$$

が成り立つ。この連立方程式を h と W について解けば、次式を得る。

$$h = \frac{e}{c} \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (V_{s1} - V_{s2}) \quad (8)$$

$$W = e \frac{\lambda_1 V_{s1} - \lambda_2 V_{s2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (9)$$

原理的には、式⑧から h の値を求めることができる。ところが、実際の光電管の陰極と陽極は異なる金属で作られている。なぜそうでなければならないのか。またそのとき、上記の諸式をどのように変更しなければならないのかについて、以下の(補足)で説明する。

(補足)

陰極 C と陽極 A が異なる金属で、それらの仕事関数 W_C と W_A が異なるとき、式 ⑤ と式 ⑥ は成り立たない。図 4 は、 $W_C \neq W_A$ で、CA 間に阻止電圧がかかっているときに、光電管を含む回路に沿って電子の位置エネルギーが変化する様子を表している。ただし、電位 (単位電荷あたりの静電気力の位置エネルギー) の基準点を陰極 C に取っている。

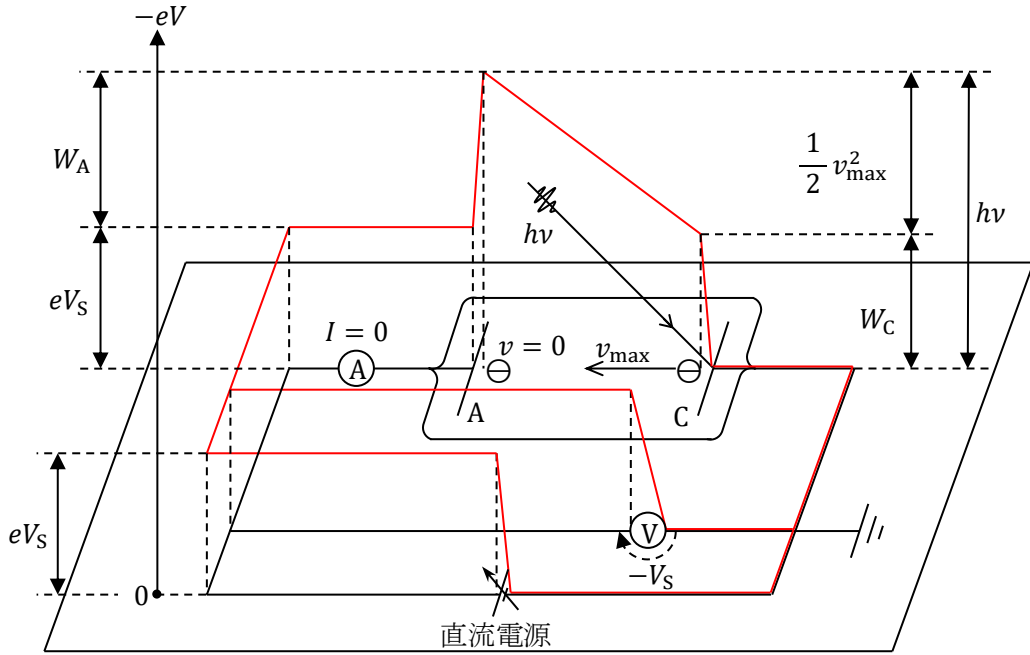


図 4 光電管に阻止電圧 V_S がかかっているときの電子の位置エネルギー (赤線)

陰極 C 内の電子が光子のエネルギー hc / λ を吸収して、表面から最大の速さ $v_{\max}$ で飛び出したとすると、アインシュタインの式より、

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{h c}{\lambda} - W_C \quad (10)$$

が成り立つ。この電子が陽極 A に向かって進めば、静電気力によって減速され、陽極 A の直前で一瞬静止する。この間に運動エネルギーが位置エネルギーに変換されるので、電子の位置エネルギーは W_C から $W_C + \frac{1}{2} m v_{\max}^2$ まで増加する。一方、陽極 A 内の電子の位置エネルギーは $(-e)(-V_S)$ で、その電子を A から取り出すのに必要なエネルギーの最小値が W_A であるから、陽極 A の表面近傍に静止している電子の位置エネルギーは $e V_S + W_A$ となる。これらより、

$$W_C + \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = e V_S + W_A \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = e V_S + (W_A - W_C) \quad (11)$$

を得る。したがって、 V_S と λ 、 W_A の間の関係式は、式 ⑩ と式 ⑪ より、

$$e V_S = \frac{h c}{\lambda} - W_A \quad (12)$$

となる。右辺の第 2 項は、陰極 C ではなく、陽極 A の仕事関数であることに注意しなければならない。

A と C が同じ金属であるときに、式 ⑤ と式 ⑥ が成り立つのである。式 ⑪ を

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = e V_S', \quad V_S' \equiv V_S + \frac{W_A - W_C}{e} \quad (13)$$

と書き換えたときに現れる電位差 $(W_A - W_C) / e$ を A と C の接触電位差という。阻止電圧を論じるときには、接触電位差を考慮しなければならない (注)。これに気がついていない物理のテキストや大学入試問題が多数ある。

A と C が同じ金属でないときには、式 ⑦ の代わりに、

$$e V_{S1} = \frac{h c}{\lambda_1} - W_A, \quad e V_{S2} = \frac{h c}{\lambda_2} - W_A \quad (14)$$

が成り立つ。これらを h と W_A について解くと、

$$h = \frac{e}{c} \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (V_{S1} - V_{S2}) \quad (15)$$

$$W_A = e \frac{\lambda_1 V_{S1} - \lambda_2 V_{S2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (16)$$

となる。 h を表す式は A と C が同じ金属である場合と同じ式になるが、 $\lambda_1, \lambda_2, V_{S1}, V_{S2}$ の測定値から得られる仕事関数の値は、陽極の仕事関数であって、陰極の仕事関数ではない。

ミリカン (R. A. Millikan) は、陰極 C として、光電効果を起こしやすいアルカリ金属を、陽極 A として、光電効果を起こしにくい酸化銅を採用した。その理由は、A と C を同じ金属にすると、C に入射した単色光が反射されて A に入射し、その表面で光電効果を起こして阻止電圧 V_S の測定を困難にするからである。

図 5 は、陰極がナトリウムの場合に、ミリカンが測定して得た $I - V$ 曲線である (文献 1)。 I が 0 に近い部分だけが示されている。電流計の読みの 1 mm が何 A に相当するのかは論文に書かれていない。 $\lambda_1 = 253.5 \text{ nm}$ のときには阻止電圧 V_{S1} は正であるが、それ以外の波長のときには阻止電圧は負になっている。波長 λ_i を振動数 $\nu_i (= c / \lambda_i)$ に変換した観測データ (ν_i, V_{Si}) ($i = 1, \dots, 6$) を (ν, V_S) 図上に示せば、図 6 のようになり、直線上に分布する。これが、アインシュタイン

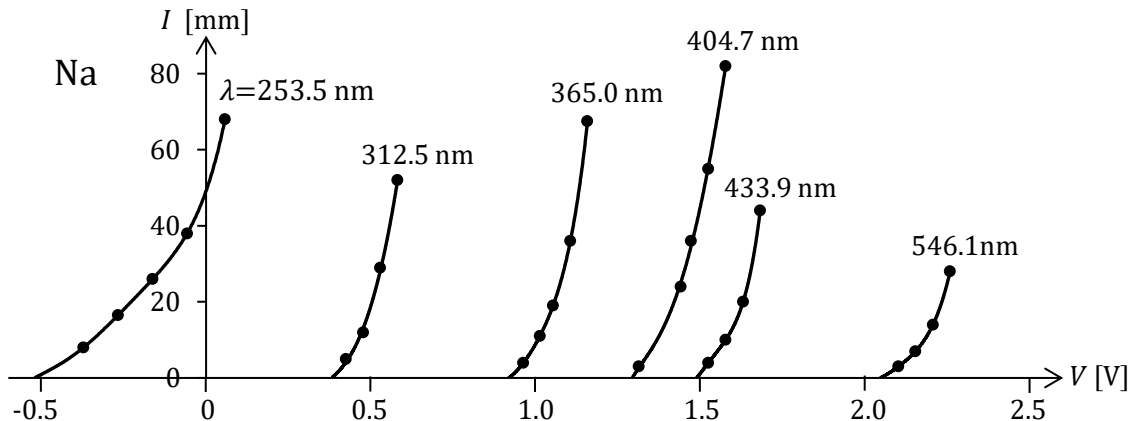


図 5

ンの光量子説の正しさを示す証拠の一つとなり、アインシュタインはノーベル賞を受賞した。

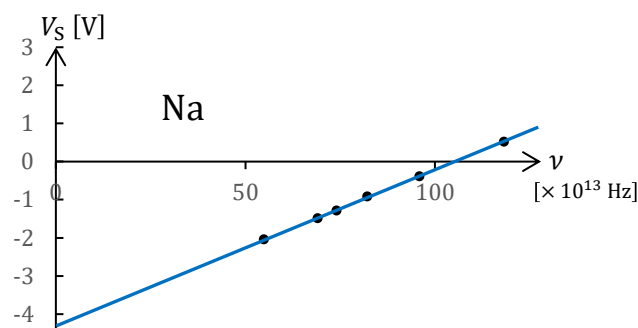


図 6 阻止電圧 V_s と照射光の振動数 ν の関係

この直線 : $V_s = \frac{h}{e} \left(\nu - \frac{W_A}{h} \right)$ の傾き $\frac{h}{e}$ の値をグラフから求めると、

$$\frac{h}{e} = 4.128 \times 10^{-15} \text{ V / Hz}$$

となる。ミリカンは、 e として油滴実験から得た値 :

$$e = 1.592 \times 10^{-19} \text{ C}$$

を採用して、

$$h = 6.57 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

を得た(文献 1)。ミリカンにノーベル賞が授与された理由として、油滴実験による電気素量の測定だけでなく、 h の値の測定も挙げられている。

現在では、別の原理に基づく精度の高い測定法によって、 h の測定値の相対不確かさが 10^{-8} になっている。ところが、質量の単位をキログラム原器から切り離して再定義するために、 h を定義定数とすることが 2018 年の国際度量衡総会で採択され、2019 年 5 月に発効した。その値は、

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

である。質量の単位の再定義については、別の問題で解説する。

文献 1 : Millikan, R. A. : A direct photoelectric determination of Planck's " h ",
Phys. Rev. 7 (3), 355–388, 1916

(注)

パウリの排他律によれば、1つの電子状態には1つの電子しか入れない。そのため、絶対0度に近い金属内の電子は、容器にパチンコ玉を詰め込むときのように、低いエネルギー準位から順に埋まっていく。最後の電子が占める最も高いエネルギー準位をフェルミ準位という。

この解説では、陰極Cの金属のフェルミ準位を位置エネルギーの基準にしているのである。このフェルミ準位にある電子をCの表面近傍の点 P_C まで取り出すのに要するエネルギーが W_C であるから、 P_C 点の電位 φ_{PC} は $W_C / (-e)$ となる。光電管に阻止電圧 V_s がかかっているとき、陽極Aの金属のフェルミ準位が陰極Cの金属のフェルミ準位より $(-e)(-V_s)$ だけ高くなる。したがって、Aの表面近傍の点 P_A の電位 φ_{PA} は $(eV_s + W_A) / (-e)$ となる。

P_A 点と P_C 点の電位差：

$$\varphi_{PA} - \varphi_{PC} = -V_s - \frac{W_A - W_C}{e} \quad (17)$$

を乗り越えるためには、 P_C 点における電子は運動エネルギー $\frac{1}{2} m v_{\max}^2$ を持たなければならないのである。

図1において、電池・抵抗・電圧計・電流計を取り払って、陽極Aの金属で作った導線でAとCをつないだとき、すなわち、式(17)で V_s を0としたときの P_A 点と P_C 点の電位差：

$$K_{AC} \equiv \varphi_{PA} - \varphi_{PC} = \frac{W_C - W_A}{e} \quad (18)$$

をAとCの接触電位差という。”

[他の演習問題へ](#)