

問題 26 電子の比電荷と電気素量の測定

I トムソンによる電子の発見 (1897 年)

19 世紀の終り頃, ガラス管に閉じ込められた希薄気体に電圧をかけると, 陰極から陽極に向かって負電荷の流れがあることが発見され, 陰極線と名付けられた。トムソン (J.J. Thomson) は, 陰極線が質量 m , 電荷 $-e$ ($e > 0$) の粒子 p の流れであると仮定し, 電磁場内の運動からその比電荷 $-e/m$ の値を求めた。

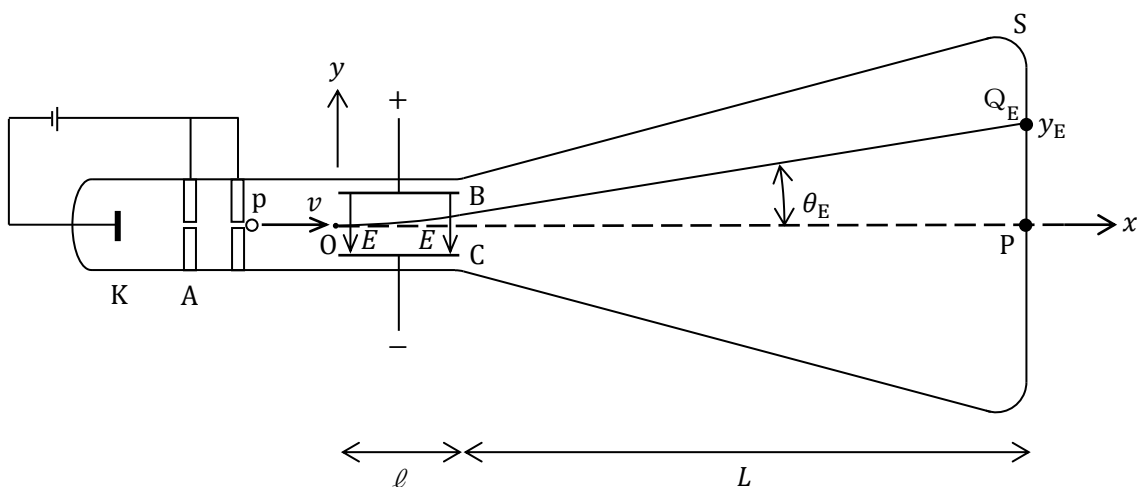


図 1

図 1 はトムソンの実験装置の模式図である。ガラス管内の陰極 K と陽極 A の間にある粒子 p は, A に向かって加速され, A に開けられたスリットから速さ v で飛び出してくる。 BC は長さ ℓ の平行電極板, S は蛍光板で荷電粒子が衝突すると蛍光を発する。 BC の右端と S の間隔は L である。粒子 p が BC 間に進入する点 O を原点として, 図のように (x, y) 座標を導入する。

BC 間に電場がない場合には, 粒子 p は x 軸上を直進して S 上の点 P に衝突する。 BC 間に B から C の向きに強さ E の一様な電場がある場合には, 粒子 p は放物線軌道を描き, BC 間を通り過ぎると x 軸と角度 θ_E をなす方向に直進し, S 上の点 Q_E に衝突する。ただし, BC より右側には電場はないとし, 粒子 p にはたらく重力や希薄気体の分子との衝突は無視できるものとする。

問 1 $\tan \theta_E$ を, m, e, ℓ, v, E を用いて表せ。

問 2 Q_E 点の y 座標 y_E を, m, e, ℓ, L, v, E を用いて表せ。

次に, BC 間の電場を 0 にし, 紙面に垂直で裏から表の向きに, 磁束密度 B の一様な磁場をかける。ただし, 磁場は BC 間にだけ存在し, その外側には存在しないと仮定する。磁場が弱い場合

には、BC間を通過中の粒子 p にはたらくローレンツ力は、 y 軸の正の向きに大きさが一定としてよい。すなわち、磁場内の円軌道を放物線軌道で近似してよい。このとき、粒子 p は一様電場がある場合と同様の軌道を描く。BC間を通り過ぎたあと、 x 軸と角度 θ_B をなす方向に直進し、S 上の点 Q_B に衝突する。

問3 $\tan \theta_B$ と Q_B 点の y 座標 y_B を、 m, e, ℓ, L, v, B のうち必要なものを用いて表せ。

トムソンの実験では B の値が小さいので、問3で得た式が成り立つ。実験の手順は次のとおりである。

まず、BC間に電場 E をかけて θ_E を測定する。 E の値は $y_E \ll L$ となるように設定されている。次に、BC間の電場を磁束密度 B の磁場に替える。トムソンの実験では B を連続的に変えられるようになっているので、 B を変化させて、 $\theta_B = \theta_E$ となるとききの B の値 B_0 を読み取る。

問4 粒子 p の速さ v を、 E と B_0 を用いて表せ。

問5 粒子 p の比電荷の大きさ e/m を、 E, B_0, ℓ, θ_E を用いて表せ。

問6 トムソンの実験の一例では、

$\ell = 0.05 \text{ m}, E = 1.5 \times 10^4 \text{ V/m}$ で、希薄気体が空気の場合、

$\theta_E = 8/110, B_0 = 5.5 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$

となっている。この実験で得られる v と e/m の値はいくらか。

この比電荷の大きさは、当時、電気分解の実験から分かっていた陽イオンの比電荷の最大値（水素イオン H^+ の比電荷）より 1000 倍ほど大きい。もし粒子 p の質量が陽イオンの質量と同程度であれば、その電荷の大きさは陽イオンの電荷に比べて非常に大きくなる。逆に、もし粒子 p の電荷の大きさが陽イオンの電荷と同程度であれば、その質量は陽イオンの質量に比べて非常に小さいことになる。

粒子 p は、封入された希薄気体の分子から陰極 K の近傍の強い電場によって生成される陰イオンの可能性が考えられた。そこでトムソンは、さまざまな希薄気体を封入して実験を行い、粒子 p の e/m の値が、少しばらつきはあるが、どの希薄気体でもほぼ同じである、という結果を得た。このことも理由の一つとなって、粒子 p はすべての分子に共通な分子の構成要素で、上記の二つ目の可能性が高いことが分かり、粒子 p は電子と呼ばれるようになった。

II ミリカンによる電気素量の測定 (1911 年)

図 2 はミリカン (R. A. Millikan) の油滴実験の模式図である。

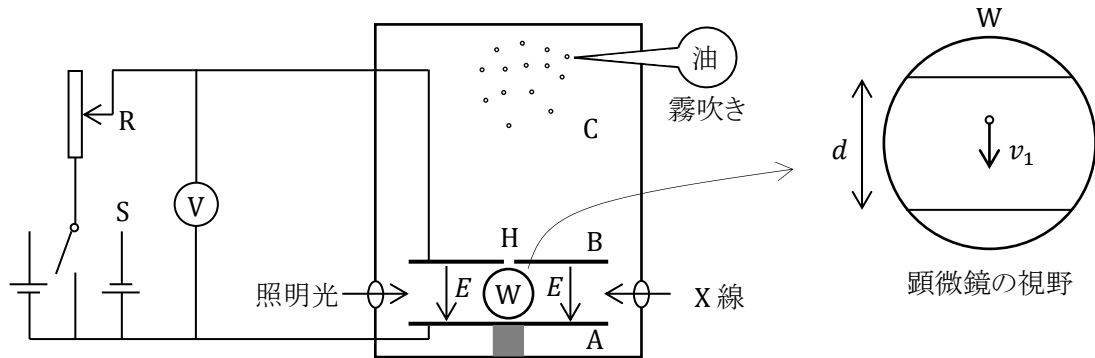


図 2

清浄な空気を封入した密閉容器 C の中に平行電極板 AB を設置する。スイッチ S とスライド抵抗 R を操作することによって、 AB 間の電圧 V と電場 E の向きを変えることができる。 AB 間に存在する分子イオンを増やしたいときには AB 間に X 線を照射する。霧吹きによって容器内に油滴を噴射すると、油滴はゆっくり落下し、そのうちのいくつかは B に開けられた小穴 H を通って AB 間に進入する。 AB 間に照明を当て、窓 W を通して顕微鏡で観察すると、油滴が夜空の星のように光って見える。その視野には二本の細い毛が水平かつ平行に張っており、その間隔は油滴が落下する位置で d である。以下では、油滴は球形としてその半径を a 、密度を σ 、空気の密度を ρ とし、重力加速度の大きさを g とする。

まず、 AB 間の電場を 0 にして、視野にある一つの油滴に着目すると、ゆっくり等速落下していることがわかる。その理由は、運動する油滴には速度と逆の向きに空気の粘性抵抗力がはたらくからである。この力が油滴に及ぼす影響は大きく、仮になんらかの外力がはたらいて油滴が加速運動を始めても、一瞬のうちに一定の終速度に達する。速さ v の油滴にはたらく粘性抵抗力の大きさは $6\pi\eta av$ で与えられる。ただし、 η は空気の粘性率 (粘度) である。

問 7 油滴にはたらく浮力の大きさはいくらか。

ある油滴が視野内で二本の平行線の間を通過する時間 Δt_1 を測定すれば、その下降速度 $v_1 (= d/\Delta t_1)$ がわかる。

問 8 この油滴の半径 a を、 $\sigma, \rho, g, \eta, v_1$ を用いて表せ。

二本の平行線の間を下向きに通過したあと、 AB 間の電場が下向きで大きさが E となるように、 S と R を操作すると、この油滴は直ちに等速上昇ようになる。これはこの油滴が負に帯電しているからである。今度は二本の平行線の間を上向きに通過する時間 Δt_2 を測定すれば、その上昇速度 $v_2 (= d/\Delta t_2)$ がわかる。

問 9 この油滴の帯電量の大きさ（絶対値） e_n を、 $\sigma, \rho, g, \eta, E, v_1, v_2$ を用いて表せ。

二本の平行線を上向きに通過したあと、 AB 間の電場を 0 にすると、この油滴はまた等速落下するようになり、最初の状態に戻る。そのあと、また二本の平行線の間を通過する時間 Δt_1 と Δt_2 を測定して、下降速度と上昇速度を求める。ただし、上昇するときの電場の大きさ E は最初と同じにする。同一の油滴に対してこのような測定を何度も繰り返して行う。その結果、何度測定しても Δt_1 の値はほとんど変わらないが、 Δt_2 の値は大きくなったり、小さくなったりする。その理由は、等速落下しているときに、空気中の分子イオンが油滴の表面に付着するからである。

問 10 ある等速上昇に対する Δt_2 の測定値が1回前の測定値より大きくなったとすれば、直前の等速落下中に油滴に付着した分子イオンの電荷は正、負のどちらか。また、 Δt_1 の測定値がほとんど変化しなかったことから、油滴の物理量についてどのようなことが言えるか。

このようにして測定した油滴の帯電量の大きさ e_n のうち、ほぼ等しい値をもつものを一つにまとめてグループ分けをする。一つの実験例では、それぞれのグループ内での平均値 $\bar{e}_n$ を小さいものから順に並べれば、次のようになる。

グループ名	:	a	b	c	d	e
$\bar{e}_n/10^{-19} \text{ C}$	:	6.558	8.206	11.498	14.817	19.720

これらの数値の並び方を見ると、誤差を取り除けば、その最大公約数が電気素量になると考えられる。

問 11 その電気素量の値 e_1 を有効数字4桁で求めよ。

問題 26 の解答と解説

I

問 1, 2 BC 間を運動しているときの粒子 p の加速度を a_y , BC 間を通過する時間を Δt , 通過直後の速度の y 成分を Δv_y , y 方向の変位を Δy とすると,

$$m a_y = e E, \quad \Delta t = \frac{\ell}{v}, \quad \Delta v_y = a_y \Delta t, \quad \Delta y = \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2$$

が成り立つ。これらより a_y と Δt を消去すれば,

$$\Delta v_y = \frac{e E \ell}{m v}, \quad \Delta y = \frac{1}{2} \frac{e E}{m} \left(\frac{\ell}{v} \right)^2$$

となる。これらより次式を得る。

$$\tan \theta_E = \frac{\Delta v_y}{v} = \boxed{\frac{e E \ell}{m v^2}} \quad (1)$$

$$y_E = \Delta y + L \tan \theta_E = \boxed{\frac{e E \ell}{m v^2} \left(L + \frac{1}{2} \ell \right)} \quad (2)$$

問 3 題意より, BC 間の一様磁場から粒子 p が受けるローレンツ力の向きは y 軸の正の向きで, 大きさは $e v B$ としてよい。よって, 問 1, 2 の解答で, $e E$ を $e v B$ に置き換えれば,

$$\tan \theta_B = \frac{e v B \ell}{m v^2} = \boxed{\frac{e B \ell}{m v}} \quad (3)$$

$$y_B = \frac{e v B \ell}{m v^2} \left(L + \frac{1}{2} \ell \right) = \boxed{\frac{e B \ell}{m v} \left(L + \frac{1}{2} \ell \right)} \quad (4)$$

となる。

問 4 条件式 $\theta_B = \theta_E$ と式 (1), 式 (3) より,

$$\frac{e B_0 \ell}{m v} = \frac{e E \ell}{m v^2} \quad \rightarrow \quad v = \boxed{\frac{E}{B_0}} \quad (5)$$

を得る。

問 5 式 (5) を式 (1) に代入して, 粒子 p の比電荷の大きさを求めれば,

$$\frac{e}{m} = \boxed{\frac{E \tan \theta_E}{B_0^2 \ell}} \quad (6)$$

となる。

問 6 θ_E の測定値が小さいので, 近似式 $\tan \theta_E \simeq \theta_E$ を用い, 式 (5) と式 (6) に与えられた数値を代入すれば,

$$v = \frac{1.5 \times 10^4 \text{ V/m}}{5.5 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2} = \boxed{2.7 \times 10^7 \text{ m/s}}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{1.5 \times 10^4 \text{ V/m} \times (8/110)}{(5.5 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2)^2 \times 0.05 \text{ m}} = \boxed{7.2 \times 10^{10} \text{ C/kg}}$$

となる。単位の変換では、 $\text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s}$ 、 $\text{V} = \text{J C}^{-1}$ 、 $\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ を用いた。

なお、トムソンの論文では測定値が cgs emu で与えられているので、ここでは SI に単位を変換して採用した。

(補足 1)

その後、電子の比電荷は別の方法でも測定されるようになり、2018 年の時点では、

$$e/m = 1.758\,820\,010\,77\,(54) \times 10^{11} \text{ C/kg} \quad (2018 \text{ CODATA})$$

(7)

((54) は最後の 2 つの数字の標準不確かさ)

となっている。問 6 で得た値はこの値の 40 % 程度でかなりずれが大きい。

トムソンの論文：

J. J. Thomson M. A. F. R. S. (1897) : XL. Cathode Rays,
Philosophical Magazine Series 5, 44 : 269, 293 – 316

に載っている θ_E の測定値は小さく、すべて (整数/110) の形で与えられているので、式 (4) を用いて、

$$\theta_E \cong \tan \theta_E = \frac{y_E}{L + \frac{1}{2} \ell}$$

から求めたのであろう。 ℓ は 5 cm と書かれているので、 L は 107.5 cm であろう。また、蛍光板は半径が L よりかなり小さい球面で、その外側に貼り付けられた目盛りで y_E を読み取っている。しかし、これらの近似から生じる誤差は数 % 程度であろう。

トムソンの実験では、図 3 のようなヘルムホルツコイルが用いられている。

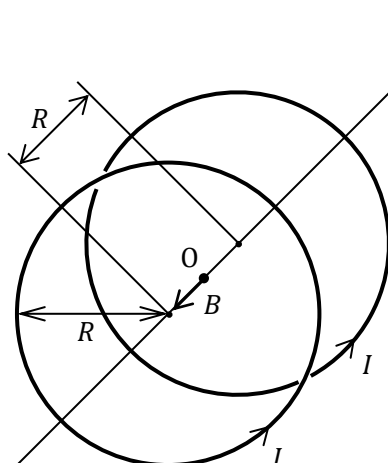


図 3 ヘルムホルツコイル

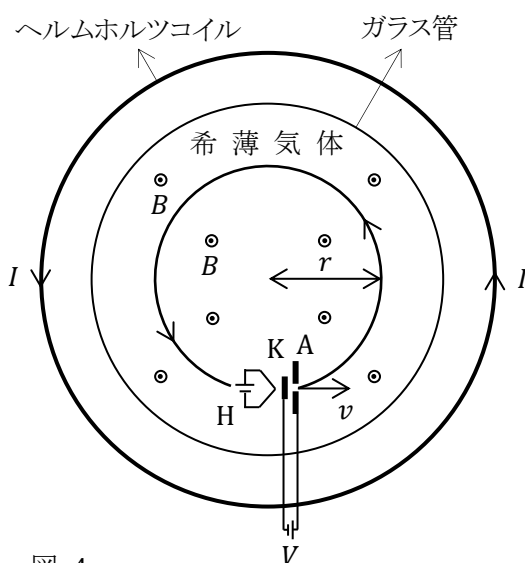


図 4

半径 R の n 巻円形コイル 2 つを距離 R だけ離して向かい合わせ、それぞれに同じ電流 I を矢印の向きに流すと、2 つのコイルに挟まれた領域内の磁場は、ほぼ一様となり、その磁束密度 B は、

$$B \cong \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 n I}{R} \quad (\mu_0 \text{ は真空の透磁率})$$

で与えられる。 I を変化させることによって B を変えることができる。トムソンは、 $2R = \ell$ として、図 1 の電極板 BC を挟むように、ガラス管の外側にヘルムホルツコイルを設置した。しかし、ヘルムホルツコイルは BC 間の領域の外側にも逆向きの磁場を生じさせるので、 BC 間を通過したあとの粒子 p の軌道は直線からずれる。このずれを無視すると、得られる e/m の値は真の値より小さくなるので、これが大きなずれの一因かもしれない。これについてはトムソンも言及している。

現在では、大学の演習実験で次のような装置を用いて e/m を測定している。図 3 のヘルムホルツコイルの中心 O の近傍に、図 4 のようなガラス管を設置する。その内部にある小さな陰極 K と陽極 A の間に電圧 V をかけ、ヒーター H で K を熱すると、 K の表面から電子 (質量 m , 電荷 $-e$) が放出され、 A に開けられた小さな穴から速さ v で飛び出す。 K を出るときの速さは v に比べれば無視できるほど小さいので、電子に対するエネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v^2 = e V$$

が成り立つ。そのあと、電子は一様な磁場からローレンツ力を受けて、半径 r の円軌道を描く。その運動方程式の向心成分は、

$$m \frac{v^2}{r} = e v B$$

となる。これら 2 式より、

$$v = \frac{2V}{Br}, \quad \frac{e}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2}$$

を得る。 V は電圧計で、 B を発生させる I は電流計で測定できる。円軌道を描く電子は希薄気体の分子に衝突して分子を励起する。励起された分子はもとの基底状態に戻るときに光を発するので、円軌道を目で見ることができ、 r を測定することが可能となる。

(余談)

図 1 の BC 間で電子にはたらく重力と電気力の比を求めると、

$$\frac{mg}{eE} = \frac{1}{1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}} \times \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{1.5 \times 10^4 \text{ V/m}} = 3.7 \times 10^{-15}$$

となる。もっと一般的に、真空中で距離 r 離れた 2 つの電子がたがいに及ぼし合う万有引力とクーロン力の比を求めると、万有引力定数を G , クーロンの法則の比例係数を k として、

$$\frac{G \frac{m^2}{r^2}}{k \frac{e^2}{r^2}} = \frac{G}{k} \left(\frac{m}{e}\right)^2 = \frac{6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2}{8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2} \times \left(\frac{1}{1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}}\right)^2 = 2.4 \times 10^{-43}$$

となる。重力が電磁気力に比べていかに弱い力であるかがよくわかる。このような桁違いの力をもつ一つの式で記述する究極理論を物理学者は追い求めているのである。

II

問 7 流体中の物体にはたらく浮力の大きさは、その物体が排除した流体にはたらく重力に等しい。

よって、油滴にはたらく浮力は、 $\boxed{\frac{4\pi}{3}a^3\rho g}$ である。

問 8 等速落下する油滴にはたらく力のつりあいの式は、

$$0 = -\frac{4\pi}{3}a^3\sigma g + \frac{4\pi}{3}a^3\rho g + 6\pi\eta a v_1 \quad (8)$$

となる。これより a を求めれば、次のようになる。

$$a = \boxed{\left\{ \frac{9}{2} \frac{\eta v_1}{(\sigma - \rho)g} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

(補足 2)

空気中 ($\eta = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$) に静止している油滴 ($\sigma \sim 9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$) が重力によって落下し、粘性抵抗力によって終速度に達するまでの時間の目安 (緩和時間 τ) は、

$$\tau = \frac{2a^2(\sigma - \rho)}{9\eta} \sim \frac{2a^2\sigma}{9\eta}$$

で与えられる。 $a \sim 1 \mu\text{m} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ の油滴の場合なら、

$$\tau \sim \frac{2 \times (1 \times 10^{-6} \text{ m})^2 \times 9 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}}{9 \times 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa s}} \sim 1 \times 10^{-5} \text{ s}$$

であり、瞬時に終速度 v_1 に達する。

問 9 等速上昇する油滴にはたらく力のつりあいの式は、

$$0 = e_n E - \frac{4\pi}{3}a^3\sigma g + \frac{4\pi}{3}a^3\rho g - 6\pi\eta a v_2 \quad (10)$$

となる。式 (10) と式 (8) の辺々の差をとれば、

$$0 = e_n E - 6\pi\eta a (v_2 + v_1)$$

を得る。これに式 (9) の a を代入して e_n を求めれば、次のようになる。

$$e_n = \boxed{9\sqrt{2}\pi \left\{ \frac{\eta^3}{(\sigma - \rho)g} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{E} (v_1 + v_2) v_1^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

(補足 3)

文献 1 の論文では,

$$e_n = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{9\mu}{2g(\sigma-\rho)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sigma g}{F} (v_1 + v_2) v_1^{\frac{1}{2}}$$

と書かれている。ただし, η を μ で, E を F で表している。 σ を $\sigma - \rho$ に置き換えれば, この式は式(11)と一致する。ミリカンは単純な間違いをしているのである。そのため, 文献 1 に出てくる e_n の数値はすべて正しい数値から因子 $\rho/\sigma \sim 0.0013$ だけずれている。この論文では 1 % 以下の誤差が論じられているのに……。ただし, 文献 2 の論文ではこの間違いは訂正されている。

本質的な間違いではないが, プランク定数 h の測定に関する論文でも, ミリカンはいくつか単純な間違いをしている。当時の査読制度はどうなっていたのだろう。

文献 1 : The Isolation of an Ion , A Precision Measurement of Its Charge , and the Correction of Stoke's Law : R . A . Millikan , Science , Sep. 30 , 1910 , pp. 436 – 448

この論文には § 5 が二つあり, 校正が杜撰であることを示している。

文献 2 : On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant :

R . A . Millikan , Phys. Rev. II(2) , pp. 109 – 143

問 10 上昇時間 Δt_2 が長くなるのは, 上昇速度 v_2 が小さくなるからである。式 (10) からわかるように, v_2 が小さくなるのは e_n が小さくなるからである。この油滴は負に停電しているので, その絶対値が小さくなるのは, 正 電荷の分子イオンが付着するからである。

下降時間 Δt_1 が変化しないのは, 下降速度 v_1 が変化しないからである。 v_1 は式 (8) より,

$$v_1 = \frac{2a^2}{9\eta} (\sigma - \rho) g$$

と表される。 σ, ρ, η は個々の油滴とは関係がないので, v_1 が変わらないことは

油滴の半径 a が実験中に変化しない ことを意味する。

(補足 4)

本問に与えられている $\bar{e}_n$ のデータは, 文献 1 の TABLE 1 に載っている cgs esu の数値を SI に変換し, 問題作成の都合で, その一部だけを採用したものである。この実験はミリカンと大学院生のフレッチャーが 4 時間半をかけて測定したという。その間, Δt_1 の値はほとんど変化していないのだが, 実験の最後の方で Δt_1 がわずかに増加, すなわち v_1 がわずかに減少, しているように見える。ミリカンによると, これは油滴の表面から油が蒸発して, a がわずかに減少したからだという。

ミリカンが油滴を用いる以前は, 水滴を用いて実験をしていたのだが, 水滴の表面からの蒸発が精度の高い測定を困難にしていた。油滴を用いるという発想がノーベル賞につながったといえる。

問 11 $\bar{e}_n$ の測定値の差も、誤差を取り除けば、 e_1 の整数倍になっており、さらにまた、それらの差をとれば同じことが言える。この操作によって、 e_1 の値は $1.65 \times 10^{-19} \text{ C}$ に近いことがわかる。

暫定的なこの e_1 の値を用いて、各 $\bar{e}_n$ と e_1 の比に近い整数 n を求めると、次のようになる。

グループ名	:	a	b	c	d	e
n	:	4	5	7	9	12

よって、これら 5 つの $\bar{e}_n$ の値から求まる e_1 の値は次のようになる。

$$e_1 = \frac{1}{5} \left(\frac{6.558}{4} + \frac{8.206}{5} + \frac{11.498}{7} + \frac{14.817}{9} + \frac{19.720}{12} \right) \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$= \boxed{1.643 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

(余談)

ミリカンは、 η の a に対する依存性を考慮し、統計処理にも細心の注意を払って、電気素量の値を求めた。その値は $1.592 \times 10^{-19} \text{ C}$ である (文献 2)。

その後、油滴実験以外の方法でも電気素量 e が測定されるようになり、その精度が上がっていったが、2018 年 11 月の国際度量衡総会で SI の再定義が採択され、2019 年 5 月に発効した。その結果、 e は測定値ではなくなり、定義定数になった。その値は、

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

である。電子の質量 m_e の 2022 年時点での測定値は、

$$m_e = 9.109\,383\,7139\,(28) \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (2022 \text{ CODATA})$$

である。よって、電子の比電荷の値は、

$$\frac{-e}{m_e} = -1.758\,820\,008\,38\,(54) \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

となる。

e が定義定数となったことに伴って、これまで定義定数であった真空の透磁率 μ_0 と真空の誘電率 ϵ_0 は測定値に変わった。現時点でそれらの値は、

$$\mu_0 = 1.256\,637\,061\,27\,(20) \times 10^{-6} \text{ N A}^2 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^2$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} = 8.854\,187\,8188\,(14) \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

である。 c_0 は真空中の光速で、定義定数である。その値は、

$$c_0 = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

である。

単位系と物理定数はこれからどこまで改訂されるのだろうか。最終決定版はありうるのだろうか。

他の演習問題へ