

問題 25 光速度の測定

相対論にとって基本的な物理定数である光速度の値が、どのようにして測定されたのか、その歴史を振り返ってみよう。

(1) レーマーの測定 (1676 年)

木星は太陽のまわりを周期 11.9 年で公転しており、その第 1 衛星であるイオは、木星のまわりを周期 1.77 日 (これを τ_0 とする) で公転している。太陽系の惑星とその衛星は、太陽を含む平面上で、北の空から見下ろせば反時計まわりに、円に近い軌道を描いている。そのため、地球からイオを観測すると、太陽に照らされた木星の影の部分にイオが入り込んで、見えなくなることがある。これを“食”という。もし、太陽からイオを観測できれば、その食の周期はほぼ τ_0 となる。ところが地球から観測すると、木星から地球までの距離が変化するために、イオの食周期は一定でなくなる。太陽・地球・木星が一直線に並んで、地球・木星間の距離が最小となる“衝”のときに、イオの食が始まる時刻を原点として、 n 回目の食が始まる時刻 t_n と $n\tau_0$ の差 $\Delta t_n = t_n - n\tau_0$ をグラフで表すと、図 1 のようになる。225 回目の食が始まるとき、太陽・地球・木星は次の衝の位置にある。

このグラフが極大となるのは、地球・太陽・木星が一直線に並んで、地球・木星間の距離が最大となる“合”のときである。このとき、地球と木星の間に太陽があるので、地球からイオの食を観測することはできないが、レーマーは長年に亘る t_n の観測値をもとにして、 $n = 113$ のときに Δt_n が極大となり、 $\Delta t_{113} \doteq 22$ 分になると見積もった。

問 1 木星の軌道半径は地球の軌道半径の何倍か。ケプラーの第 3 法則を用いて計算し、1 から 10 までの整数のうち最も近い整数で答えよ。

問 2 太陽を中心とする地球と木星の円軌道上に、ある衝とその次の合と衝が起こるときの地球の位置を●で、木星の位置を○で示せ。

問 3 レーマーがイオの食を観測していたころ、地球の軌道半径の測定値は 1.38×10^{11} m であった。この値と図 1 の極大値から光速度の値を求めよ。

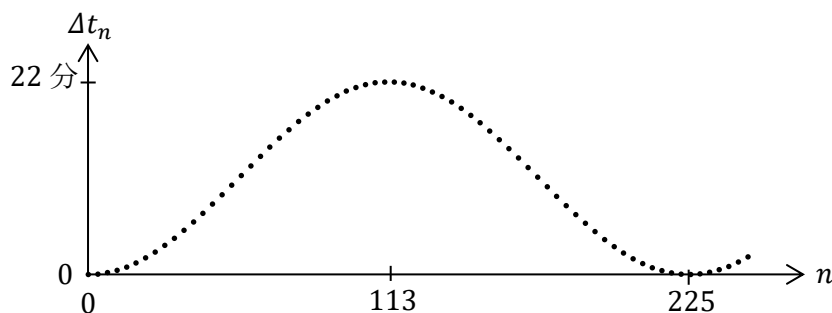


図 1

(2) ブラッドリーの測定 (1727 年)

雨の中を走れば、雨滴が前方斜め上から降ってくるように見える。同様のことは光でも起こり、光行差と呼ばれる。

太陽 O のまわりを地球 E が円軌道を描くとき、その回転軸の方向に見える星 S を一年間に亘って観測すれば、光行差のために、星 S は天球面上で円を描く。

図 2 の角度 p を星 S の年周視差 (parallax) というが、わかりやすくするために、極端に大きく描かれている。実際の星では p は 1 秒角より小さいので、太陽 O から星 S までの距離 R をこの図の縮尺にするなら、地球 E は太陽 O に重なってしまう。このとき、星 S からの光が見える方向 $S'E$ が、天球面上で角度 δ の円を描くのである。ブラッドリーはいくつかの明るい星を数年に亘って観測し、 $\delta = 20$ 秒角という結果を得た。

問 4 年周視差 p が 1 秒角であれば、太陽 O から星 S までの距離 R はいくらか。ただし、地球の軌道半径 r は $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ で、1 秒角は 1° の 3600 分の 1 である。弧度法で測った微小角 θ に対して、近似式 $\tan \theta \cong \theta$ が成り立つことを用いよ。

問 5 地球の公転速度 v と光速 c の値を有効数字 2 桁で求めよ。

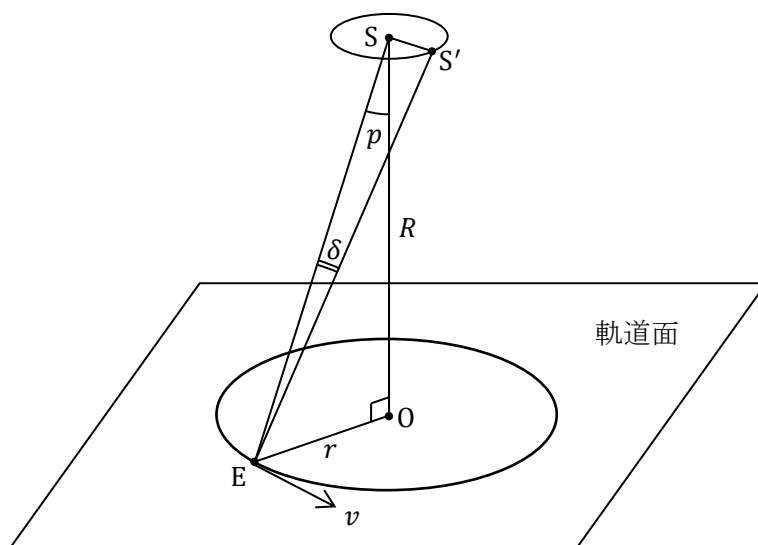


図 2

(3) フィゾーの測定 (1849 年)

フィゾーは図 3 のような測定装置で大気中の光速度を測定した。図の S は光源, $L_1 \sim L_4$ はレンズ, HM は半透鏡, G は歯車, R は反射鏡である。半透鏡に入射した光の一部が反射して歯車に向かう。歯車の突起の数は N で, 突起と隙間の幅は同じである。光源を出た光がレンズ L_1 による像点 F_1 に達したとき, 歯車の隙間を通過すれば, $L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow R \rightarrow L_3 \rightarrow L_2$ の経路を辿って F_1 に戻ってくる。 F_1 と R の間隔は ℓ である。レンズ L_2 と L_3 の厚さは ℓ に比べれば無視できる。歯車の回転速度が小さければ, 光が F_1 に戻ってきたとき, F_1 はまだ歯車の隙間にあるので, そこを通過した光の一部は半透鏡 HM を透過し, レンズ L_4 で集光されて, F_4 点で結像する。その像の明るさを測定する。

歯車の回転速度を徐々に大きくすると, 像点 F_4 の明るさは徐々に小さくなり, 単位時間あたりの回転数が n になったときに最小となる。さらに回転数を大きくすると, 像点 F_4 の明るさは徐々に大きくなり, 回転数が $2n$ になったときに最大となる。

問 6 以上のことから, 空気中の光速度 c を, N , ℓ , n を用いて表せ。

問 7 フィゾーの測定では, $N = 720$, $\ell = 8633 \text{ m}$ のとき, $n = 12.6$ 回転 / s であった。フィゾーが得た光速度の値はいくらか。

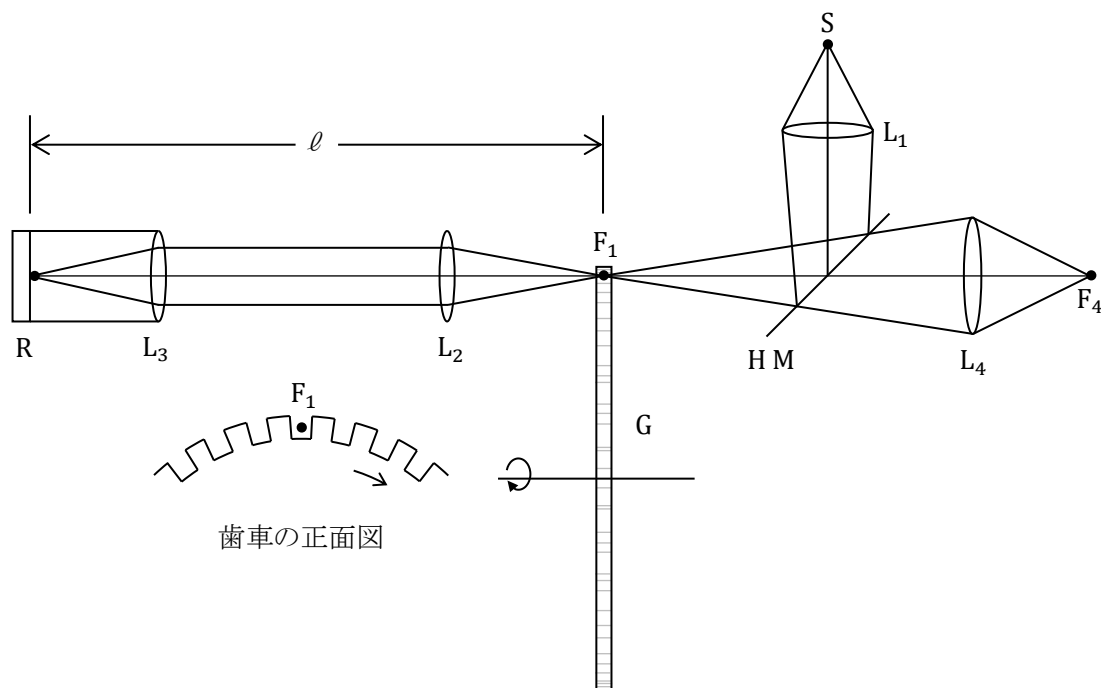


図 3

(4) フーコーの測定 (1862 年)

図 4 はフーコーの測定装置の模式図である。光源 S_1 を出て半透鏡 HM 上の C 点に達した光の一部が透過し、回転鏡 RM 上の O 点に向かう。 O 点に入射角 θ_1 で入射し、反射角 θ_1 で反射した光は、 O 点を中心とする球面鏡 SM 上の M 点で反射して O 点に戻る。回転鏡は O 点を通り、紙面に垂直な軸まわりに回転することができるが、最初は回転していないとする。このとき、 O 点に戻ってきた光は反射角 θ_1 で反射し、往路の経路を逆行する。その光は C 点で一部透過して光源 S_1 に戻り、残りは反射して S'_1 点で像を結ぶ。 S_1 点を出た光が M 点で結像し、その点で反射した光が S'_1 点で結像するように、 HM と RM の間に凸レンズが挿入されているのだが、図を見やすくするために、ここでは省いてある。 $\overline{S_1 C} = a$ 、 $\overline{CO} = b$ 、 $\overline{OM} = r$ とする。

回転鏡 RM が回転している場合には、回転鏡への入射角が時々刻々変化する。いま、入射角が θ_1 になったときを考えれば、 M 点で反射して O 点に戻るまでの経路は、回転鏡が回転していない場合と同じである。ところが回転している場合には、光が OM 間を往復する微小時間 Δt の間に回転鏡は微小角 $\Delta\theta$ だけ回転する。そのため、 O 点での入射角と反射角は θ_2 ($\theta_2 < \theta_1$) となり、反射された光は S_2 点と S'_2 点で結像する。回転に起因する像のずれ $\overline{S'_1 S'_2}$ ($= \overline{S_1 S_2}$) を d とし、反射光 OS_2 の OS_1 からのずれ角を δ とする。回転鏡の単位時間あたりの回転数は n である。像のずれをマイクロメーターで測定することによって光速度が求まる。

問 8 $\delta = 2 \Delta\theta$ であることを示せ。

問 9 空気中の光速度 c を、 $a + b$ 、 r 、 n 、 d を用いて表せ。

問 10 フーコーが用いた測定装置は、図 4 において、

$$a + b = 5.19 \text{ m}, \quad r = 20 \text{ m}, \quad n = 800 \text{ 回転 / s}$$

に相当し、 d の測定値は 7.0 mm であった。フーコーが得た光速度の値はいくらか。

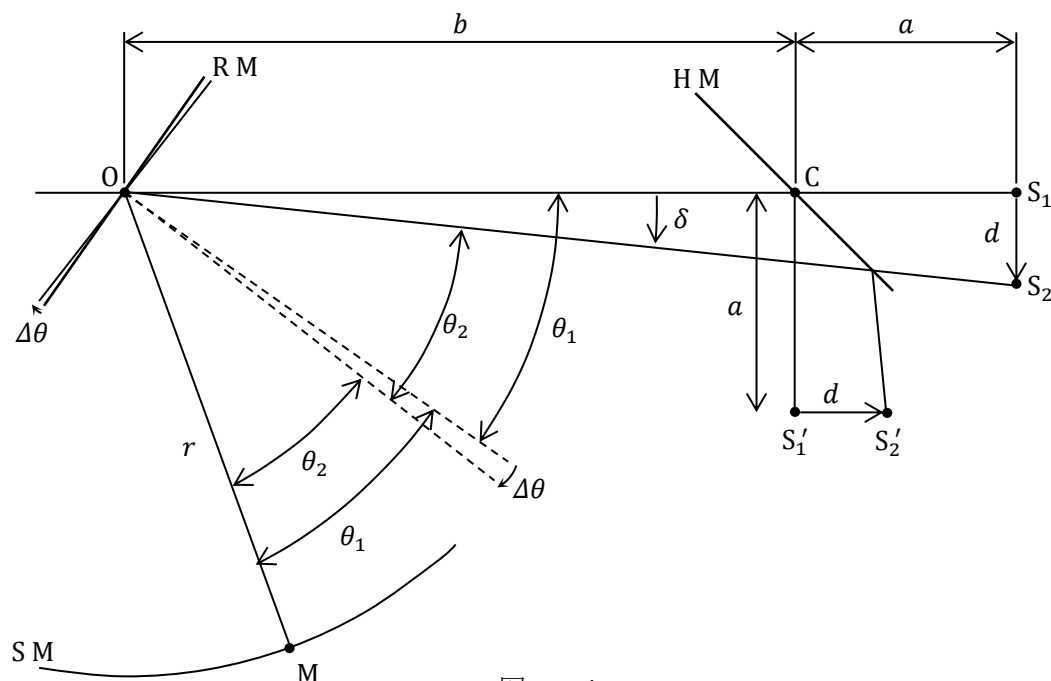


図 4

問題 25 の解答と解説

(1) 光が有限の速さで伝わるかどうかさえ分からなかった時代に、レーマー (O.C.Roemer) は、イオの食周期の変化から、光の速さは有限で、地球軌道の直径を 22 分で伝わることを発見した。

問 1 木星と地球の公転周期をそれぞれ τ_J , τ_E とし、円軌道で近似したときの木星と地球の軌道半径をそれぞれ R_J , R_E とすれば、ケプラーの第 3 法則より、

$$\left(\frac{\tau_J}{\tau_E}\right)^2 = \left(\frac{R_J}{R_E}\right)^3$$

が成り立つ。左辺の値は、 $11.9^2 \cong 142$ で、右辺の値は、 $R_J / R_E = 4, 5, 6$ を仮定すれば、

$\left(R_J / R_E\right)^3 = 64, 125, 216$ であるから、 $R_J / R_E = \boxed{5}$ の場合が最も真の値に近い。正確には、 $R_J / R_E = 5.20$ である。

問 2 ある衝のときに観測されるイオの食が始まる時刻を $t = t_0 = 0$ とする。題意より、次の衝のときに 225 回目の食が始まる。そのとき、図 1 より $\Delta t_{225} = 0$ となる。よって、225 回目の食が始まる時刻は、

$$t_{225} = 225 \tau_0 = 398 \text{ 日}$$

となる。この間に地球は太陽のまわりを、

$$\frac{398}{365} \times 360^\circ = 393^\circ = 360^\circ + 33^\circ$$

だけ回転し、図 5 の ● の位置にくる。問われている合の位置は、ある衝と次の衝の真中の位置 ● である。

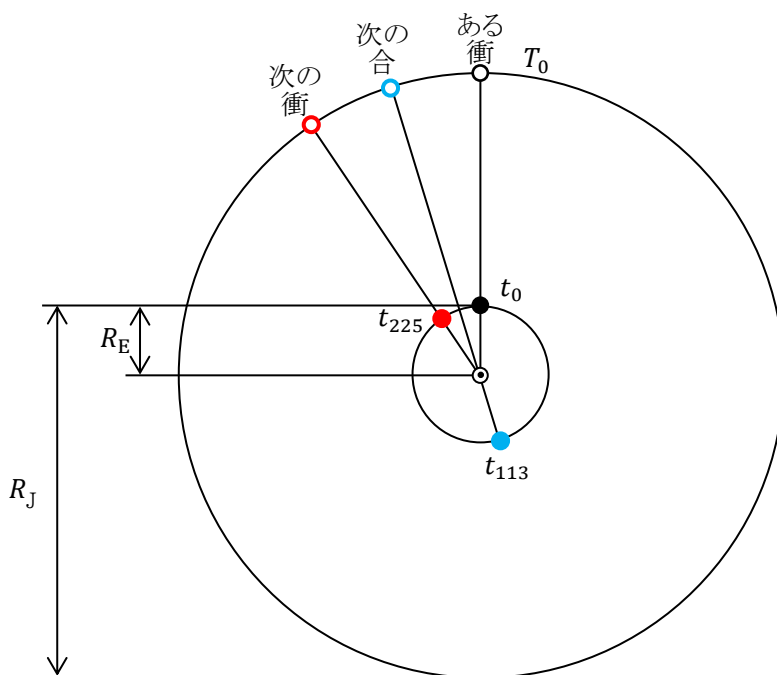


図 5

問3 最初の衝のときに、イオが木星の影に入る時刻 T_0 は、それが地球で観測される時刻 $t_0 = 0$ より、その情報が光速度 c で伝わる時間 $(R_J - R_E) / c$ だけ前であるから、 $T_0 = -(R_J - R_E) / c$ である。この時刻から $113 \tau_0$ だけ時間が経つと、木星と地球の位置は合となる。そのときにイオの 113 回目の食が始まり、その情報が地球に伝わるのに $(R_J + R_E) / c$ だけ時間がかかる。よって、

$$t_{113} = T_0 + 113 \tau_0 + \frac{R_J + R_E}{c} = 113 \tau_0 + \frac{2 R_E}{c}$$

となり、

$$\Delta t_{113} = t_{113} - 113 \tau_0 = \frac{2 R_E}{c}$$

を得る。よって、光速度 c の値は次のようになる。

$$c = \frac{2 R_E}{\Delta t_{113}} = \frac{2 \times 1.38 \times 10^{11} \text{ m}}{22 \times 60 \text{ s}} = \boxed{2.1 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

(注)

朔望月 (新月から次の新月までの時間) が恒星月 (月の公転周期) より 0.23 日長いように、太陽から見たイオの食周期はイオの公転周期より約 1 分長い。問3 で要求されている数値は有効数字 2 桁なので、これら 2 つの周期を区別せずに τ_0 としている。

レーマーは地球から見たイオの食周期の変化を 8 年間に亘って観測し、その変化は光速度が有限であるとすれば説明できることを発見した。レーマーは光速度の値を公表していない。光は地球の軌道直径を 22 分で伝わると述べているだけである。1673 年にカッシーニ (G.D.Cassini) は、地表の 2 点から見たときの火星の視差から、地球の軌道半径の値を算出した。この値をもとにして問3 のような計算をし、光速度の値を公表したのはホイヘンス (C.Huygens) が最初である (1690 年)。レーマーが見積もった 22 分という値は真の値 16 分 38 秒から 24 % ほどずれているが、当時の望遠鏡や時計の性能を考えれば、上出来の成果と言わねばならない。レーマーの業績については次の文献に詳しい解説がある。

FN の高校物理 fnorio.com/0128Romer_1676/Romer_1676.html

(2) 問4 図2より、 $r = R \tan p \approx R p$ が成り立ち、

$$p = 1 \text{ 秒角} = \left(\frac{1}{3600} \right)^\circ = \frac{1}{3600} \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

であるから、

$$R = \frac{r}{p} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m} \times \frac{3600 \times 180}{3.14} = \boxed{3.1 \times 10^{16} \text{ m}}$$

となる。この距離を天文学では 1 パーセク (pc , parsec) という。

太陽に最も近い恒星 (α Centauri Proxima) の年周視差は 0.755 秒角で、その距離は、

$$\frac{1}{0.755} \text{ pc} = 1.32 \text{ pc} = 4.3 \text{ 光年}$$

である。ただし、1 pc = 3.26 光年である。

問 5 地球は 1 年で太陽のまわりを一周するので、その公転速度は次のようになる。

$$v = \frac{2\pi r}{1 \text{ 年}} = \frac{2 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^{11} \text{ m}}{365 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = \boxed{3.0 \times 10^4 \text{ m/s}}$$

星 S から太陽 O へ光が速度 c で伝わる。その伝播方向に垂直な方向に地球上の観測者が速度 v で動きながら星 S を観測するので、その光は前方斜め上の角度 δ の方向から伝わるように見える。よって、 $v/c = \tan \delta \approx \delta$ が成り立ち、

$$c = \frac{v}{\delta} = \frac{3.0 \times 10^4 \text{ m/s}}{20 \times \frac{3.14}{3600 \times 180} \text{ rad}} = \boxed{3.1 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

となる。

ブラッドリー (J. Bradley) がなぜこのような観測をしたのか、また、その観測によって発見した星 S の円運動が光行差に起因することをどのようにして思い付いたのか、などについては、

FN の高校物理 fnorio.com/0097aberration1/aberration1.html
に詳しい解説がある。

(3) 問 6 光源 S を出た光がレンズ L_1 による像点 F_1 に達したとき、そこが歯車の隙間になっておれば、その光は、 F_1 を通過したあと、レンズ L_2 と L_3 によって R 上で結像する。そこで反射したあと、同じ経路を逆行して F_1 に戻ってくる。 F_1 R 間を光が往復する時間 Δt は $2\ell/c$ としてよい。光が F_1 に戻ってきたときに、そこが歯車の突起になっておれば、その光は F_4 点に達することができず、観測される光は暗くなる。

歯車の一つの突起および一つの隙間が歯車の中心となす角度は、それぞれ $2\pi/2N = \pi/N$ であるから、歯車の回転角速度を ω とすると、 F_1 にあった隙間が隣りの突起に入れ代わって、戻ってきた光を遮る条件式は、

$$\frac{\pi}{N} = \omega \Delta t = \omega \frac{2\ell}{c}$$

と表される。これと $\omega = 2\pi n$ より次式を得る。

$$c = \frac{2N\ell\omega}{\pi} = \boxed{4N\ell n}$$

問 7 この式に与えられている数値を代入すれば、次のようになる。

$$c = 4 \times 720 \times 8633 \text{ m} \times 12.6 / \text{s} = \boxed{3.13 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

フィゾー (A. H. Fizeau) が考案した光速測定法の原理は誰でも理解できるが、19 世紀中頃に入手可能であった機器を用いて装置を作り上げ、信頼できる精度の測定値を得るのは容易でなかったと思われる。フィゾーの測定装置については次の文献に詳しい解説がある。

FN の高校物理 http://fnorio.com/0129Fizeau_1849/Fizeau_1849.html

(4) 問 8 回転鏡の鏡面が $\Delta\theta$ だけ回転すると、その法線も $\Delta\theta$ だけ回転するので、

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

となる。また、図 4 より、

$$\theta_1 + \Delta\theta = \theta_2 + \delta$$

が成り立つ。これら 2 式より、 $\delta = 2\Delta\theta$ を得る。

問 9 回転鏡の回転角速度を ω とすると、 $\omega = 2\pi n$ で、

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = 2\pi n \Delta t$$

となる。この角度変化は入射角 θ_1 に依存しない。よって、以下の結果は、球面鏡 SM で反射しさえすれば、回転鏡の回転角 θ_1 に関係なく成り立つ。 δ は微小角であるから、像のずれ d は、

$$d = (a + b) \tan \delta \simeq (a + b) \delta = (a + b) 4\pi n \Delta t$$

と表される。 Δt は光が OM 間を往復する時間であるから、 $\Delta t = 2r / c$ である。これらより、

$$d = 4\pi(a + b)n \frac{2r}{c} \rightarrow c = \boxed{\frac{8\pi(a + b)rn}{d}}$$

を得る。

問 10 この式に与えられた数値を代入すれば、

$$c = \frac{8 \times 3.14 \times 5.19 \text{ m} \times 20 \text{ m} \times 800 / \text{s}}{7.0 \times 10^{-3} \text{ m}} = \boxed{2.98 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

となる。

フーコーの測定装置については、次の文献に詳しい解説がある。

FN の高校物理 http://fnorio.com/0131Foucault_1850_1862/Foucault_1850_1862.html

その後、改良されたフィゾーとフーコーの測定装置や別の原理に基づく光速度測定法によって、測定精度は向上したが、レーザーが使えるようになると、その波長と周波数を別々に測定して、その積から光速度を求める方法が偉力を発揮し、相対的不確かさは 10^{-9} に達した。その精度は長さの測定精度に左右されるようになったので、1983 年の国際度量衡総会で、光速度 c を定義定数とすることが採択された。その値は、国際単位系 (SI) で、 $299\,792\,458 \text{ m/s}$ である。これに伴って、長さの単位の定義が次のように変更された。

「平面電磁波が $\frac{1}{299\,792\,458} \text{ s}$ の間に真空中を伝わる距離を 1 m とする」

なお、 1 s の定義は、

「Cs131 原子の基底状態の 2 つの超微細準位間の遷移に対応する放射の $9\,192\,631\,770$ 周期の継続時間」

である。