

問題 23 自転車の加速と減速

図 1 のような自転車の加速と減速について考える。自転車と運転者（以下、車・人系という）の全質量は m で、その重心 C は車体に対して位置を変えない。重心 C の地面からの高さは H である。前輪 A と後輪 B の半径はどちらも R で、回転軸の重心 C からの水平距離はそれぞれ L_A 、 L_B である。前ギア G と後ギア G' の半径はそれぞれ r 、 r' で、前ギアとクランク K 、後ギアと後輪 B は一体となって回転する。クランク K の長さは ℓ で、二つのペダル P に両足がおよぼす回転方向の力の和を F とする。自転車が加速走行しているとき、ギアに掛けてある軽いチェーンがギアにおよぼす力のモーメントは、ギア G には接点 S で、ギア G' には接点 S' で、それぞれ図の矢印の向きにおよぼす大きさ T の張力による力のモーメントで近似できるとする。また、簡単のために、回転体 A と $G \cdot K \cdot P$ と $B \cdot G'$ の質量は無視できるとする。このとき、回転体にはたらく力のモーメントはつりあっていなければならない。すなわち、右回りに回そうとする力のモーメントは、常に、左回りに回そうとする力のモーメントに等しい。回転軸での摩擦は無視できるものとする。

自転車は傾くことなく、水平な地表面上を直線走行する。走行する方向を x 軸とし、ベクトル量の x 成分は図 1 の右向きを正とする。地面と車輪の間の静止摩擦係数は μ である。重力加速度の大きさを g とし、車・人系にはたらく空気の抵抗力は無視できるものとして、以下の問に答えよ。

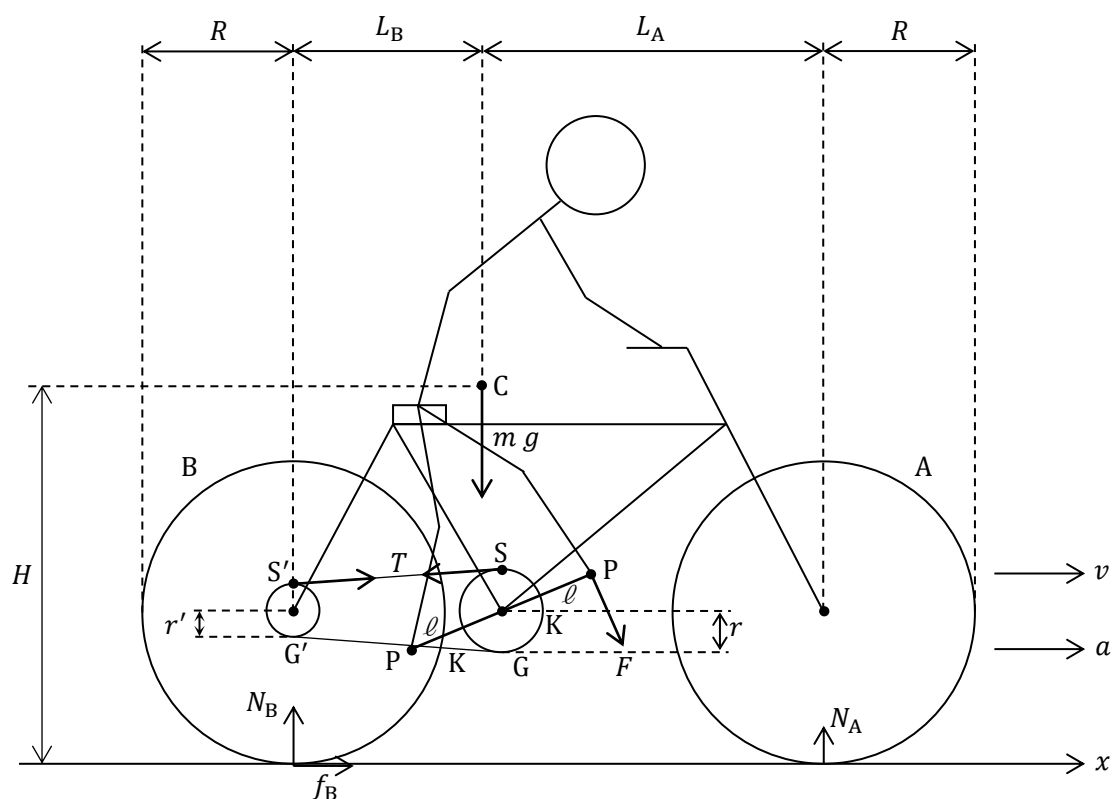


図 1

I. 静止の状態からペダルを漕ぐと、車・人系は加速運動を始める。加速度が小さいときには、後輪 B は地面に対して滑らずに回転運動をし、前輪 A が地面から浮き上がることはない。このとき、

問 1 チェーンの張力 T とペダルを漕ぐ力 F の比 T/F と、地面が車輪 B におよぼす静止摩擦力 f_B とチェーンの張力 T の比 f_B/T を、 R, r, r', ℓ のうち必要なものを用いて表せ。

問 2 車・人系の速度 v とペダル・クランクの回転角速度 ω の比 v/ω と、車・人系の加速度 a とペダルを漕ぐ力 F の比 a/F を、 R, r, r', ℓ, m のうち必要なものを用いて表せ。

問 3 ペダルを漕ぐことによって運転者が微小時間 Δt の間にする仕事は、その間の車・人系の運動エネルギーの増加量に等しいことを示せ。微小量の積を無視して計算せよ。

ペダルを漕ぐ力を徐々に大きくして、車・人系の加速度を増加させると、やがて、車・人系は次のどちらかの運動に移行する。

(i) 加速度 a が a_1 を越えたとき、後輪 B が地面に対して滑ることなく、前輪 A が地面から浮き上がる。

(ii) 加速度 a が a_2 を越えたとき、前輪 A が地面から浮き上がることなく、後輪 B が地面に対して滑る。

どちらの運動に移行するかは、 μ と L_B/H の値で決まる。

まず、後輪 B が滑らず、かつ、前輪 A が浮き上がらない場合を考える。このとき車・人系は、 x 方向の運動方程式と、鉛直方向にはたらく力のつりあいの式と、重心 C のまわりにはたらく力のモーメントのつりあいの式を満たす。これらの式を基にして、

問 4 前輪 A と後輪 B が地面から受ける垂直抗力の大きさ N_A と N_B を、 L_A, L_B, H, m, g, a を用いて表せ。

問 5 a を増加させたときに、(i) の運動に移行したとすれば、 a_1 はいくらか。そのとき、 μ はどのような条件を満たさなければならないか。

問 6 a を増加させたときに、(ii) の運動に移行したとすれば、 a_2 はいくらか。そのとき、 μ はどのような条件を満たさなければならないか。

II. ペダルを漕ぐのを止めると、車・人系は等速走行する。このとき両輪にブレーキをかけて、車・人系を減速させることを考える。ブレーキをかけると、車輪のリムに動摩擦力がはたらき、車輪を左回りに回そうとする力のモーメントが生じる。その結果、もし車輪が地面に対して滑らなければ、地面から車輪に静止摩擦力がはたらき、車輪を右回りに回そうとする力のモーメントが生じる。そして、これら二つの力のモーメントがつりあう。したがって、静止摩擦力の大きさは、ブレーキを握る力を調整することによって自由に変わることができる。

両輪にブレーキをかけたとき、どちらの車輪も地面に対して滑らず、かつ、地面から浮き上がらないとする。このとき、

問 7 前輪 A と後輪 B が地面から受ける垂直抗力の大きさ N_A と N_B はいくらか。 L_A, L_B, H, m, g と車・人系の減速度の大きさ $b (= -a)$ を用いて表せ。

問 8 $\mu < \frac{L_A}{H}$ と $\mu \geq \frac{L_A}{H}$ の二つの場合に分けて、可能な b の最大値 b_m を求めよ。

問 9 後輪 B にブレーキをかけずに、前輪 A にブレーキをかけて車・人系を静止させたとすると、ブレーキをかける前に、車・人系が持っていた運動エネルギーは、どこでどのようなエネルギーに変換されるか。

問題 23 の解答と解説

自転車が走行しているとき、全体の並進運動と車輪やギアの回転運動が互いに関連しているうえに、タイヤが地面に対して滑ることもあるので、加速・等速・減速のときに、片輪または両輪が滑らない・滑り出す・滑るのすべての場合について論じるのは、簡単ではない。高校の物理では、剛体回転の運動方程式を扱わないので、回転体の質量を無視するという非現実的な設定をしなければならない。これもまた、自転車の運動をわかりにくくする原因の一つになっている。そのため、大学入試問題にはあまり登場しないのだが、この問題は、東北大学（2005 年度後期）と名古屋市立大学（2023 年度前期）の入試問題を参考にして作成した。

I. 図 2 のように、紙面に垂直な回転軸 O のまわりに、平板状の物体 Q が角速度 ω で回転しているとき、回転軸 O から距離 ℓ 離れた点 P に大きさ F の力を $\overline{OP}$ に垂直な方向におよぼすと、 ω の時間変化率 $\frac{d\omega}{dt}$ （これを角加速度という）は、

$$I \frac{d\omega}{dt} = F \ell \quad (1)$$

を満たす（注 1）。 I をこの回転体の慣性モーメントといい、回転軸 O から距離 r_i 離れた微小領域 ΔS_i での面密度が ρ_i であるとき、

$$I = \sum_i \rho_i r_i^2 \Delta S_i \quad \left(\sum_i \text{ はすべての微小領域についての和} \right)$$

で定義される。たとえば、半径 R ・質量 M の一様な円輪（円板）であれば、円輪（円板）の面に垂直な中心軸のまわりの慣性モーメントは、 $I(\text{円輪}) = M R^2$,

$$I(\text{円板}) = \int_0^R \rho r^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} M R^2 \quad \left(\rho = \frac{M}{\pi R^2} \right)$$

となる。

式 (1) からわかるように、慣性モーメント I が 0 の回転体に有限の大きさの力のモーメント $F \ell$ がはたらくと、回転の角速度 ω は一瞬のうちに ∞ になってしまう。したがって、質量 0 の回転体が有限の角速度 ω で回転するためには、力のモーメントは常に 0 でなければならないのである。

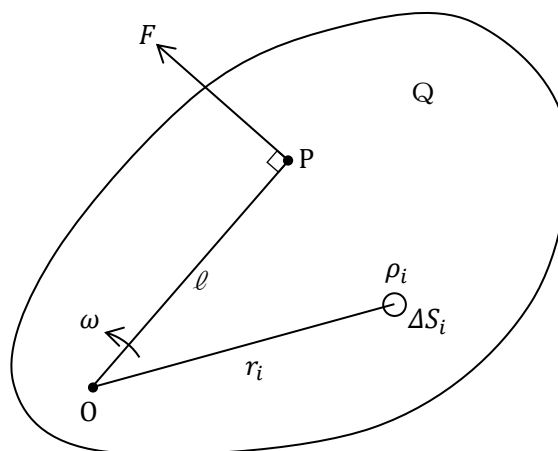


図 2

問1 ギア G とクランク K とペダル P から成る回転体の質量を 0 としているので、右回りに回そうとする力のモーメント $F \ell$ は左回りに回そうとする力のモーメント $T r$ に等しい。よって、

$$\frac{T}{F} = \boxed{\frac{\ell}{r}} \quad (2)$$

となる。チェーンがギア G' を右回りに回そうとすると、後輪 B は地面に対して左向きに滑ろうとする。その結果、滑らないように地面は後輪 B に右向きの静止摩擦力 f_B をおよぼす。回転体 B・G' の質量を 0 としているので、 $T r' = f_B R$ が成り立ち、次式を得る。

$$\frac{f_B}{T} = \boxed{\frac{r'}{R}} \quad (3)$$

問2 ギア G の角速度は ω であるから、微小時間 Δt の間にギア G が巻き込むチェーンの長さは $r \omega \Delta t$ である。一方、ギア G' の回転角速度を ω' とすれば、同じ微小時間 Δt の間にギア G' が繰り出すチェーンの長さは $r' \omega' \Delta t$ である。チェーンは伸び縮みしないので、

$$r \omega = r' \omega' \quad (4)$$

が成り立つ。

地面に対する後輪 B の回転軸の速度は v であり、回転軸に対する後輪 B の接地点の速度は $-R \omega'$ である。後輪 B は滑らないのだから、地面に対する後輪 B の接地点の速度は 0 である (注2)。よって、 $v + (-R \omega') = 0$ が成り立つ。これと式 (4) より、次式を得る。

$$\frac{v}{\omega} = \frac{R \omega'}{\omega} = \boxed{\frac{R r}{r'}} \quad (5)$$

式 (2) と式 (3) の辺々を掛け合わせた式： $\frac{f_B}{F} = \frac{\ell r'}{R r}$ と車・人系の運動方程式： $f_B = m a$ より、次式を得る。

$$\frac{a}{F} = \boxed{\frac{\ell r'}{m R r}} \quad (6)$$

問3 加速度 a が一定と見なせるほどの微小時間 Δt に、速度 v が $\Delta v = a \Delta t$ だけ増加したとする。この間の車・人系の運動エネルギーの増加量 ΔK は、次のように変形される。

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 \doteq m v \Delta v = m v a \Delta t \\ &= F \frac{\ell r'}{R r} v \Delta t \quad (a \text{ に式 (6) の } a \text{ を代入}) \\ &= F \ell \omega \Delta t \quad (v \text{ に式 (5) の } v \text{ を代入}) \end{aligned}$$

$\ell \omega \Delta t$ は微小時間 Δt の間のペダルの変位であるから、右辺は微小時間 Δt の間に運転者がする仕事である。

問 4 後輪 B が地面から受ける静止摩擦係数 f_B が車・人系の駆動力となるので、

$$x \text{ 方向の運動方程式} : ma = f_B \quad (7)$$

$$\text{鉛直方向の力のつりあい} : N_A + N_B = mg \quad (8)$$

$$\text{重心 C のまわりの力のモーメントのつりあい} : N_B L_B = N_A L_A + f_B H \quad (9)$$

が成り立つ。これらより N_A と N_B を求めれば、次のようになる。

$$N_A = \frac{m(L_B g - H a)}{L_A + L_B} \quad (10)$$

$$N_B = \frac{m(L_A g + H a)}{L_A + L_B} \quad (11)$$

問 5 a を増加させたとき、(i) の運動に移行するならば、 $a = a_1$ のときに $N_A = 0$ となる。よって、式 (10) より、

$$a_1 = \frac{L_B}{H} g \quad (12)$$

を得る。この場合、 a が 0 から a_1 まで増加する間、後輪 B が地面に対して滑らないのだから、 f_B は最大静止摩擦係数 μN_B より小さくなくてはならない。すなわち、

$$ma \leq \mu \frac{m(L_A g + H a)}{L_A + L_B} \quad (13)$$

を満たさなければならない。 $a = a_1$ のときに式 (13) が成り立てば、 $0 \leq a < a_1$ の範囲にある a に対しても成り立つので、求める条件は次のようになる。

$$a_1 \leq \mu \frac{L_A g + H a_1}{L_A + L_B} \quad \rightarrow \quad \mu \geq \frac{L_B}{H} \quad (14)$$

問 6 a を増加させたとき、(ii) の運動に移行するならば、 $a = a_2$ のときに $f_B = \mu N_B$ となる。よって、 a_2 が満たすべき式は、

$$ma_2 = \mu \frac{m(L_A g + H a_2)}{L_A + L_B}$$

となる。これを a_2 について解けば、

$$a_2 = \frac{\mu L_A}{L_A + L_B - \mu H} g \quad (15)$$

を得る。この場合、 a が 0 から a_2 まで増加する間、前輪 A が地面から浮き上がらない ($N_A > 0$ を満たす) のだから、式 (10) より、

$$a < \frac{L_B}{H} g \quad (16)$$

を満たさなければならない。 $a = a_2$ のときに式 (16) が成り立てば、 $0 \leq a < a_2$ の範囲にある a に対しても成り立つので、求める条件は次のようになる。

$$\frac{\mu L_A}{L_A + L_B - \mu H} g < \frac{L_B}{H} g \quad \rightarrow \quad \mu < \frac{L_B}{H} \quad (17)$$

問 7 ブレーキをかけることによって、前輪 A と後輪 B が地面から受ける静止摩擦力の大きさを、それぞれ F_A 、 F_B とする。このとき、車・人系の x 方向の運動方程式、鉛直方向の力のつりあい、重心 C のまわりの力のモーメントのつりあいより、次式が成り立つ。

$$m b = F_A + F_B \quad (19)$$

$$m g = N_A + N_B \quad (20)$$

$$N_A L_A = N_B L_B + F_A H + F_B H \quad (21)$$

これらより、 $F_A + F_B$ を消去し、 N_A と N_B を求めれば、次のようになる。

$$N_A = \boxed{m \frac{L_B g + H b}{L_A + L_B}} \quad (22)$$

$$N_B = \boxed{m \frac{L_A g - H b}{L_A + L_B}} \quad (23)$$

問 8 両輪 A、B のどちらも地面から浮き上がらず、かつ地面に対して滑らない条件は、

$$N_A > 0 \quad (24)$$

$$N_B > 0 \quad (25)$$

$$F_A \leq \mu N_A \quad (26)$$

$$F_B \leq \mu N_B \quad (27)$$

である。

$b > 0$ であるから、式 (22) により、条件 (24) は満たされている。条件 (25) が成り立つためには、式 (23) より、

$$b < \frac{L_A}{H} g \quad (28)$$

を満たす必要がある。また、条件 (26) と (27) より、 $F_A + F_B \leq \mu (N_A + N_B)$ を得るが、これが成り立つためには、式 (19) と (20) より、

$$b \leq \mu g \quad (29)$$

を満たす必要がある。

よって、可能な b の最大値 b_m は、次のようになる (注 3)。

$$\mu < \frac{L_A}{H} \text{ の場合には, } b_m = \boxed{\mu g}$$

$$\mu \geq \frac{L_A}{H} \text{ の場合には, } b_m = \boxed{\frac{L_A}{H} g}$$

問 9 前輪 A にだけブレーキをかけると、前輪 A にはたらく左向きの静止摩擦力 F_A によって、車・人系は減速され、やがて静止する。このとき、車・人系の運動エネルギーは、静止摩擦力が車・人系にする負の仕事によって抜き取られるが、地面との間に滑りを伴わない静止摩擦力では、それを熱に変換することはできない。抜き取られたエネルギーは、ブレーキによる動摩擦力に抗して、

前輪Aの回転運動を維持するために使われる。そのエネルギーは、ブレーキの動摩擦力がリムにする負の仕事によって抜き取られ、最終的には 前輪 A のブレーキ部分で発生する摩擦熱 になる(注4)。

(注1)

図2の微小領域 ΔS_i を q_i と名付け、その質量を $m_i = \rho_i \Delta S_i$ とおく。図3のように、 q_i にはたらく外力を $\vec{f}_{ex i}$ 、他の微小領域 q_j がおよぼす内力を $\vec{f}_{ij}$ とし、これらの力による回転軸Oのまわりの力のモーメントを、それぞれ $n_{ex i}$ 、 n_{ij} とする。ただし、反時計まわりの力のモーメントを正とする。回転軸Oのまわりの q_i の角運動量 L_i は $m_i r_i^2 \omega$ で、その時間変化率 $\frac{dL_i}{dt}$ は q_i にはたらく力のモーメントに等しい。すなわち、

$$m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = n_{ex i} + \sum_j n_{ij} \quad \left(\sum_j \text{はすべての微小領域 } q_j \text{ についての和} \right)$$

が成り立つ。これについては、

「問題7 ブランコの共振とパラメータ励振」

を見よ。さらに、この式をすべての微小領域 q_i について加え合わせれば、

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_i n_{ex i}, \quad I = \sum_i m_i r_i^2$$

となる。ただし、作用・反作用の法則から、 $\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = \vec{0}$ が成り立つので、 $\sum_i \sum_j n_{ij} = 0$ となることを用いた。図2では、点Pにのみ外力 F がはたらくとしたので、 $\sum_i n_{ex i} = F\ell$ となるのである。

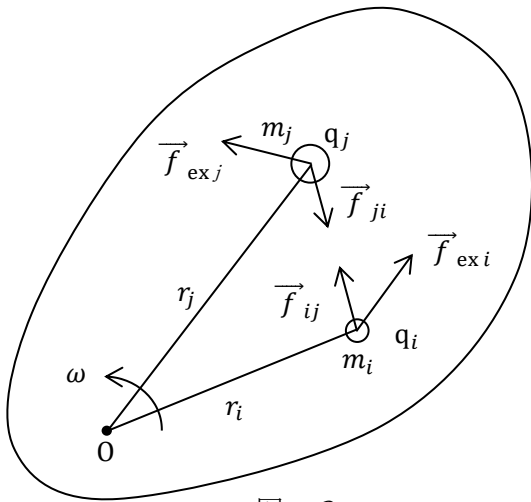


図 3

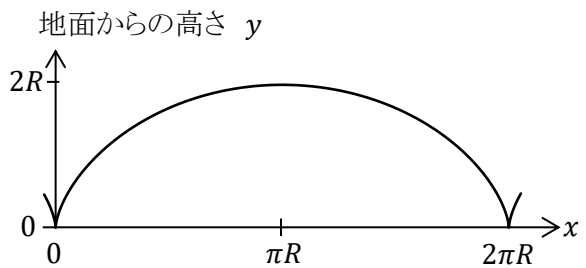


図 4

(注2)

タイヤの一点に蛍光塗料で印をつけておき、夜に等速走行している自転車を横から見ると、その印は図4のようなサイクロイド曲線を描く。印が地面に達したとき、その印は一瞬静止して見える。

(注3)

問8を数学的に見れば、変数 b, F_A, F_B, N_A, N_B が式(19), (20), (21)を満たすとき、不等式(24), (25), (26), (27) で表された制限条件のもとに、 b の最大値 b_m を求める問題になっている。これは線形計画法の問題である。

最初、そのように捉えて解答例を書いたのであるが、 μ と L_A/H と $(L_A + L_B)/H$ の大小関係によって場合分けをしなければならず、そのために式やグラフが多くなって、物理的意味がわかりにくくなってしまった。これは面白い解法であるのだが、ここでは物理的にわかり易い簡単な方法で解答した。

(注4)

問9を定量的に解説すれば、次のようになる。

ブレーキをかける前、車・人系は等速度 v_1 で走行していたとする。時刻 t_1 のときに一定の力でブレーキをかけ始め、時刻 t_2 のときに車・人系が静止したとする。減速中の運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = -F_A \quad (\text{一定})$$

と表される。両辺に速度 v を掛けると、左辺は、

$$m v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

となり、右辺は次のように変形される。

$$-F_A v = -F_A R \omega = -R' \mu' n \omega$$

ただし、 ω は前輪 A の回転角速度、 R' はリムの半径 ($R' \leq R$)、 μ' はブレーキ板とリムの間の動摩擦係数、 n はブレーキ板をリムに押し付ける垂直抗力の大きさである。

両辺を時刻 t で、 t_1 から t_2 まで積分すれば、

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt &= -R' \mu' n \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\theta}{dt} dt \\ \rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 &= -\mu' n R' (\theta_2 - \theta_1) = -\mu' n s' \end{aligned}$$

となる。ただし、 θ は前輪 A の回転角で、 $s' = R' (\theta_2 - \theta_1)$ はブレーキ板がリムを擦った長さである。 $\mu' n s'$ は動摩擦力が前輪 A から抜き取ったエネルギーで、これが摩擦熱となる。

[他の演習問題へ](#)