

問題 22 ロケットの加速 ～ ツィオルコフスキーの公式 ～

ロケットは、積載された燃料の燃焼によって生じた高温のガスを高速で噴射し、その反作用で加速する。この問題では、燃焼ガスの噴射速度を一定として、ロケット本体が最終的に得る速度を計算する。次の文中の を適切な数式または数値で埋め、{ } 内から正しい語句を選べ。数式は () 内の変数を用いて表せ。

[I] 全質量 M_0 のロケットが宇宙空間のある慣性系に対して静止している。ロケット本体 (エンジン・燃料容器・搭載機器) の質量は M_R で、残りの質量 $M_0 - M_R$ は酸化剤も含めた燃料の質量 M_{F0} である。時刻 $t_0 = 0$ のとき燃料に点火すると、燃焼ガスが後方に噴射され、ロケットは一直線上を加速運動する。単位時間あたりに噴射される燃焼ガスの質量は μ で、 μ は時間的に一定とする。この場合、燃料が燃え尽きる時刻 T は M_{F0} / μ となる。時刻 T でのロケットの速度 V_T を求める。

時間 T を N 個の微小時間 $\Delta t = T / N$ に分割すると、時間 Δt の間に噴射される燃焼ガスの質量は $\mu \Delta t$ となる。 $i = 1, 2, \dots, N$ として、時刻 $t_{i-1} = (i-1) \Delta t$ と時刻 $t_i = i \Delta t$ におけるロケットの速度をそれぞれ V_{i-1}, V_i とし、後方に噴射される燃焼ガスのロケットに対する相対速度の大きさを v とする。計算を簡単にするために、慣性系での燃焼ガスの速度を $V_i - v$ とする。時刻 t_{i-1} と t_i の間に噴射された燃焼ガスとロケットの全運動量は保存されるので、次の関係式が成り立つ。

$$\boxed{(1)} \quad (M_0, \mu \Delta t, i, V_i, V_{i-1}, v) \quad (1)$$

式①より、 i 番目の微小時間にロケットの速度は、

$$\Delta V_i = V_i - V_{i-1} = \boxed{(2)} \quad (M_0, \mu \Delta t, i, v) \quad (2)$$

だけ増加することがわかる。この速度変化は、燃焼が続く間、(3) { 増加し続ける, 減少し続ける, 変化しない }。

時刻 T におけるロケットの速度は、 $V_0 = 0$ として、

$$V_T = V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_N = \sum_{i=1}^N \Delta V_i$$

で与えられる。実際の加速は断続的ではなく、連続的であるから、 V_T の正確な値は、 $N \rightarrow \infty$ の極限值を計算することによって得られる。

(問) その極限値は、

$$V_T = v \log \frac{M_0}{M_R} \quad (3)$$

で与えられることを示せ。証明にあたっては、 a と c が定数で、 $a > c > 0$, $b = c / N$ のとき、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{b}{a - jb} = \log \frac{a}{a - c} \quad (a)$$

が成り立つことを用いてよい。

式③をツィオルコフスキーの公式という。

〔Ⅱ〕 具体例でロケットの最終速度 V_T を計算してみよう。必要な場合には、 $\log 2 = 0.693$,
 $\log 3 = 1.10$, $\log 5 = 1.61$ を用いて、有効数字 2 桁で計算せよ。

たとえば、ロケット A の本体と積載燃料の質量および燃焼ガスの噴射の速さが、

$$M_R = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} , \quad M_{F0} = 4.0 \times 10^3 \text{ kg} , \quad v = 4.0 \text{ km s}^{-1}$$

であれば、ロケット A の最終速度は、

$$V_T = \boxed{\quad (4) \quad} \text{ km s}^{-1}$$

となる。この最終速度を大きくするには、 v か M_{F0} / M_R , またはその両方を大きくすればよいのだが、それ以外にロケットを多段式にする方法がある。その効果がどれほどのものかを見るために、ロケット A を真っ二つにした 2 段式ロケットを考える。すなわち、1 段目と 2 段目のロケット本体の質量 M_{IR} , M_{IIR} と積載燃料の質量 M_{IF0} , M_{IIF0} を、

$$M_{IR} = M_{IIR} = 0.5 \times 10^3 \text{ kg} , \quad M_{IF0} = M_{IIF0} = 2.0 \times 10^3 \text{ kg}$$

とする。燃焼ガスの噴射の速さは、1 段目と 2 段目のロケットのどちらも 4.0 km s^{-1} とする。

この場合、1 段目のロケットの燃料が燃え尽きたとき、ロケットの速度は、

$$V_I = \boxed{\quad (5) \quad} \text{ km s}^{-1}$$

となる。このとき、1 段目のロケットを切り離し、2 段目のロケットに点火する。その後、2 段目のロケットの燃料が燃え尽きたとき、2 段目のロケットの速度は、

$$V_{II} = \boxed{\quad (6) \quad} \text{ km s}^{-1}$$

となる。ロケット A を 2 段式ロケットにすることによって、最終速度を 30 % ほど大きくすることができるのである。

〔Ⅲ〕 つぎに, 〔Ⅰ〕で論じたロケットを地上から鉛直上向きに打ち上げる場合を考える。ただし, その運動は, 重力加速度の大きさ g が地上での値と同じと見なせる範囲内とし, 空気の抵抗力は無視できるとする。ベクトル量の鉛直成分は, 鉛直上向きを正とする。

地上から打ち上げる場合でも, 燃焼速度に変化はなく, 燃料は時間 T で燃え尽き, ロケットに対する噴射燃焼ガスの速さ v は, 〔Ⅰ〕の場合と同じである。異なるのは, 重力がはたらくために, ロケットと噴射燃焼ガスの全運動量が保存されないことである。〔Ⅰ〕での計算と同様に, 時刻 t_{i-1} と t_i でのロケットの上昇速度をそれぞれ V_{i-1} , V_i として, i 番目の微小時間 Δt における全運動量の変化量 ΔP_i を求めれば,

$$\Delta P_i = \boxed{\quad (7) \quad} (M_0, \mu \Delta t, i, V_i, V_{i-1}, v)$$

となる。一方, この間にロケットと噴射燃焼ガス全体にはたらく重力による力積 ΔI_i は,

$$\Delta I_i = \boxed{\quad (8) \quad} (M_0, \mu \Delta t, i, g, \Delta t)$$

で与えられる。 ΔP_i と ΔI_i の関係から, i 番目の微小時間におけるロケットの速度変化 ΔV_i を求めれば,

$$\Delta V_i = \boxed{\quad (9) \quad} (M_0, \mu \Delta t, i, v, g, \Delta t) \quad ④$$

となる。

式 ④ より, 点火後にロケットが地上を離れるための条件式 :

$$v > \boxed{\quad (10) \quad} (M_0, g, \mu)$$

が導かれる。この条件式が満たされているとき, 時刻 T でのロケットの上昇速度は,

$$\begin{aligned} V_T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i \\ &= \boxed{\quad (11) \quad} (M_0, M_R, v, g, T) \end{aligned}$$

となる。

問題 22 の解答と解説

なめらかに動くことができる物体から、その一部が分裂して飛び出すと、残りの部分が反跳を受ける。この現象は、運動量保存則の応用問題として、力学や原子物理の分野にしばしば登場する。ここで論じるロケットの加速はその代表例であるのだが、その加速を最後まで追いかけるためには、微積分が必要となるので、筆者が知る限り、入試問題では見たことがない。ここでは微積分がもろに顔を出さないように作問してあるが、結局、肝腎なところで微積分を使わざるを得なくなる。古典物理学は微積分という言葉で書かれているのである。

[I] (1) 時刻 $t \leq t_0 = 0$ において、ロケットが静止しているように見える慣性系で、時刻 $t_{i-1} = (i-1)\Delta t$ と時刻 $t_i = i\Delta t$ におけるロケットと噴射燃焼ガスの質量と速度が、図 1 に示されている。

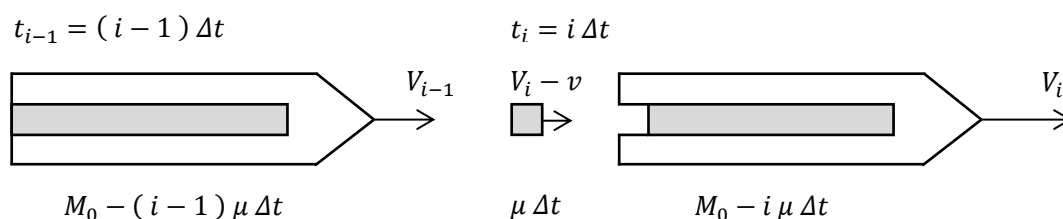


図 1

ロケットと噴射燃焼ガスの全運動量が保存されるので、次式が成り立つ。

$$\boxed{\{M_0 - (i-1)\mu\Delta t\} V_{i-1} = \mu\Delta t (V_i - v) + (M_0 - i\mu\Delta t) V_i} \quad (1)$$

(注) 慣性系から見たとき、 i 番目の微小時間における噴射燃焼ガスの速度を $V_i - v$ としているが、燃焼ガスは連続的に噴射されるので、平均値をとって、

$$V_{i-1} + \varepsilon \Delta V_i - v \quad (\text{ただし, } 0 \leq \varepsilon \leq 1)$$

とした方がよい。しかし、そのようにして式 (1) の右辺第 1 項を、

$$\mu\Delta t \{V_{i-1} + \varepsilon \Delta V_i - v\}$$

に置き換えても、 $\mu\Delta t \varepsilon \Delta V_i$ は 2 次の微小量となり、無視できるので、 $\varepsilon = 1$ とした。 $\varepsilon = 0$ としてもよいのだが、 $\varepsilon = 1$ の方が後で式の展開が簡潔になるのである。

(2) 式 (1) より、次式を得る。

$$\Delta V_i = V_i - V_{i-1} = \boxed{v \frac{\mu\Delta t}{M_0 - (i-1)\mu\Delta t}} \quad (2)$$

(3) 式 (2) は、

$$\Delta V_i = v \frac{\mu\Delta t}{M_0 - \mu t_{i-1}}$$

と書き換えられるので、時間が経つ (t_{i-1} が大きくなる) と ΔV_i は 増加し続ける。

(問) 式②を用いれば, V_T の正確な値は,

$$V_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N v \frac{\mu \Delta t}{M_0 - (i-1) \mu \Delta t} = v \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mu \Delta t}{M_0 - j \mu \Delta t}$$

と表される。ここで, $M_0 = a$, $\mu \Delta t = b$ とし, $c = N b = N \mu \Delta t = \mu T = M_{F0}$ に注意して, 問題文に与えられている式 (a) を適用すれば,

$$V_T = v \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{b}{a - j b} = v \log \frac{a}{a - c} = v \log \frac{M_0}{M_0 - M_{F0}} = v \log \frac{M_0}{M_R} \quad (3)$$

を得る。(証明終)

式 (a) は, x の関数 $\frac{c}{a - c x}$ に対して, 区間 $0 \leq x \leq 1$ で区分求積法を適用すれば, 導出できる。

すなわち, 区間 $[0, 1]$ を N 等分して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c}{a - c \frac{j}{N}} \frac{1}{N} = \int_0^1 \frac{c}{a - c x} dx = \log \frac{a}{a - c}$$

を求めておき, 左辺の c/N を b で置き換えればよい。

[Ⅱ] (4) 点火前の全質量 $M_0 = M_R + M_{F0}$ は $5.0 \times 10^3 \text{ kg}$ であるから, 式③より,

$$V_T = 4.0 \text{ km s}^{-1} \times \log \frac{5.0 \times 10^3 \text{ kg}}{1.0 \times 10^3 \text{ kg}} = 4.0 \text{ km s}^{-1} \times 1.61 = \boxed{6.4} \text{ km s}^{-1}$$

となる。

(5) 2 段式ロケットが静止しているときの全質量 M_0 は $5.0 \times 10^3 \text{ kg}$ で, 1 段目のロケットの燃料が燃焼しているときのロケット本体の質量 M_R は, $M_0 - M_{IF0} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg}$ であるから, 1 段目のロケットの燃料が燃え尽きたとき, ロケットの速度は,

$$\begin{aligned} V_I &= 4.0 \text{ km s}^{-1} \times \log \frac{5.0 \times 10^3 \text{ kg}}{3.0 \times 10^3 \text{ kg}} = 4.0 \text{ km s}^{-1} \times (\log 5 - \log 3) \\ &= 4.0 \text{ km s}^{-1} \times (1.61 - 1.10) = \boxed{2.0} \text{ km s}^{-1} \end{aligned}$$

となる。

(6) 1 段目のロケットを切り離した直後のロケットの全質量 M_0 は, $M_{IIR} + M_{IIF0} = 2.5 \times 10^3 \text{ kg}$ で, ロケット本体の質量 M_R は $M_{IIR} = 0.5 \times 10^3 \text{ kg}$ であるから, 2 段目のロケットの燃料が燃え尽きたとき, ロケットの速度は,

$$\begin{aligned} V_{II} &= V_I + v \log \frac{M_0}{M_R} \\ &= 2.04 \text{ km s}^{-1} + 6.44 \text{ km s}^{-1} = \boxed{8.5} \text{ km s}^{-1} \end{aligned}$$

となる。これは (4) で求めた 1 段式ロケットの最終速度の 1.32 倍になっている。

〔Ⅲ〕(7) i 番目の微小時間 Δt における全運動量の変化量は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= \{ \mu \Delta t (V_i - v) + (M_0 - i \mu \Delta t) V_i \} - \{ M_0 - (i - 1) \mu \Delta t \} V_{i-1} \\ &= \boxed{ \{ M_0 - (i - 1) \mu \Delta t \} (V_i - V_{i-1}) - \mu \Delta t v }\end{aligned}$$

(8) i 番目の微小時間 Δt に噴射された燃焼ガスとロケットの質量の和は、 $\mu \Delta t + (M_0 - i \mu \Delta t)$ であるから、それらにはたらく重力による力積は、次のようになる。

$$\Delta I_i = \boxed{ - \{ M_0 - (i - 1) \mu \Delta t \} g \Delta t }$$

(9) $\Delta P_i = \Delta I_i$ より、

$$V_i - V_{i-1} = \boxed{ v \frac{\mu \Delta t}{M_0 - (i - 1) \mu \Delta t} - g \Delta t } \quad (4)$$

を得る。

(10) 点火後の最初の微小時間 Δt に、ロケットが地上から離れる条件は、 $V_1 > 0$ である。

式 (4) に、 $i = 1$ 、 $V_0 = 0$ を代入すれば、求める条件式は、

$$V_1 = v \frac{\mu \Delta t}{M_0} - g \Delta t > 0$$

より、

$$v > \boxed{ \frac{M_0 g}{\mu} }$$

となる。

(11) 時刻 T での速度 V_T は、〔Ⅰ〕と同じ極限計算によって、次のようになる。

$$\begin{aligned}V_T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left\{ v \frac{\mu \Delta t}{M_0 - (i - 1) \mu \Delta t} - g \Delta t \right\} \\ &= v \log \frac{M_0}{M_R} - g N \Delta t = \boxed{ v \log \frac{M_0}{M_R} - g T } \quad (5)\end{aligned}$$

地上から打ち上げたときの最終速度は、宇宙空間での加速に比べて、重力による減速 $g T$ の分だけ小さくなる、という当たり前の結果が得られた。空気の抵抗力が無視できない場合には、抵抗力による減速の分だけさらに小さくなる。

(補足説明)

微分方程式を導入せずにロケットの運動方程式を解こうとすると、このようにややこしい説明になってしまう。それでも結局は、区分求積法を適用するときに、微分方程式を解くのと同一計算をしているのである。

微分方程式としての運動方程式を解くと、簡単に式⑤が求まる。それを示しておこう。

時刻 $t = 0$ のときに、地上から初速度 0 で上昇を始めたロケットが、時刻 t のときに、その全質量が $M(t)$ 、上昇速度が $V(t)$ になったとする。それから微小時間 dt が経ったとき、ロケットの全質量が $M(t) + dM$ 、速度が $V(t) + dV$ になったとする。解答・解説の記号を用いれば、 $dM = -\mu dt$ である。

この微小時間での全運動量の変化量は、重力による力積に等しいから、

$$\{M(t) + dM\}\{V(t) + dV\} + (-dM)\{V(t) - v\} = -M(t)g dt$$

が成り立つ。これを整理して、2次の微小量 $dM dV$ を無視すれば、

$$M(t) dV + dM v = -M(t)g dt$$

となる。この両辺を dt で割り、 $dt \rightarrow 0$ の極限をとれば、

$$M(t) \frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt} v - M(t)g$$

となる。これが [Ⅲ] で論じたロケットの運動方程式である。

この両辺を $M(t)$ で割って、時間 t で、 0 から T まで積分すれば、

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dV}{dt} dt &= -v \int_0^T \frac{\frac{dM}{dt}}{M} dt - g \int_0^T dt \\ \rightarrow V(T) - V(0) &= -v \int_{M_0}^{M_R} \frac{dM}{M} - gT \\ \rightarrow V(T) &= v \log \frac{M_0}{M_R} - gT \end{aligned}$$

となり、式⑤を得る。

[他の演習問題へ](#)