

問題 21 大気中を流れる電流と落雷

大気中に存在する鉛直下向きの電場と電流について考える。空気の誘電率を ε ，地球の半径を R として，以下の問に答えよ。数値計算に必要な場合には， $\varepsilon = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ， $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ を用いよ。数値解は有効数字 1 桁で答えよ。

図 1 に示すように，空気中に N 個の点電荷 q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) があり，それらを閉曲面 S が取り囲んでいる。 S 上の微小領域での電場を $\vec{E}$ とする。微小領域の面積を ΔS ，外向きの単位法線ベクトルを $\vec{n}$ ， $\vec{E}$ の法線成分 $\vec{E} \cdot \vec{n}$ を E_n とするとき，

$$\sum \varepsilon E_n \Delta S = \sum_{i=1}^N q_i$$

が成り立つ。左辺の和は S 上のすべての微小領域についての和である。これをガウスの法則という。

問 1 空気中の点電荷 q から距離 r 離れた位置での電場 $\vec{E}$ の点電荷から遠ざかる向き成分 $E(r)$ を，ガウスの法則を用いて求めよ。ただし，空気中には点電荷 q しか存在しないとする。

問 2 半径 R の導体球に電荷 Q を与えると，電荷は球面上に一様に分布し，球面からわずかに離れた空気中での電場は，球の中心から遠ざかる向きを正として， E_0 となった。 ε ， R ， E_0 を用いて Q を表せ。

地球は導体球と見なすことができる。その表面付近には鉛直下向きの電場がある。その強さは位置と時刻によって異なるが，ここではその平均値を 100 V m^{-1} とする。

問 3 地球全体の帯電量の平均値はいくらか。

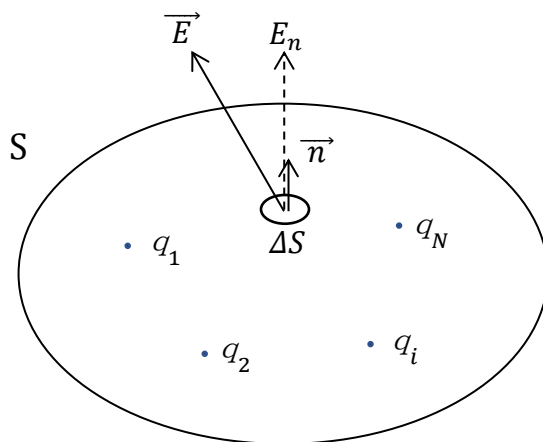


図 1

晴天域の大気中には鉛直下向きに電流が流れている。その電流密度 (単位面積あたりの電流) は位置と時刻によって異なるが、ここではその平均値を $3 \times 10^{-12} \text{ A m}^{-2}$ とする。

問 4 地球の帯電量を一定に保つ何らかの働きがなければ、大気中を流れる電流によって地球の帯電量は減少し、ついには 0 となってしまう。それまでに要する時間はいくらか。ただし、地球の帯電量は問 3 で求めた平均値とし、電流は一定のまま変化しないとする。

地表面付近の電場と電流は 200 年以上に亘って観測されているので、電流による地表面への正電気の流入を打ち消すように、なにかが負電荷を地表面に供給しているはずである。それは落雷であると考えられている。

積乱雲の内部には強い上昇気流がある。図 2 に示すように、この気流によって、積乱雲の中に存在する正に帯電した微粒子と負に帯電した微粒子が引き離され、正に帯電した微粒子は雲頂に、負に帯電した微粒子は雲底に集められる。雲底にある負電荷は、静電誘導によって、雲底直下の地表面を正に帯電させる。雲底から地表面へ落雷が起こると、この負と正の電荷が打ち消し合い、結果的には、雲頂の正電荷が残り、地表面では負の帯電量が増加する。

平均的な落雷では、 $1 \times 10^{-4} \text{ s}$ 程度の際に $5 \times 10^4 \text{ A}$ 程度の電流が流れる。落雷によって地表面に流入した負電荷は、瞬時に地球の全表面に行き亘ると考えてよい。

問 5 地球の全表面で、落雷が単位時間あたり何回程度起こっていると考えられるか。

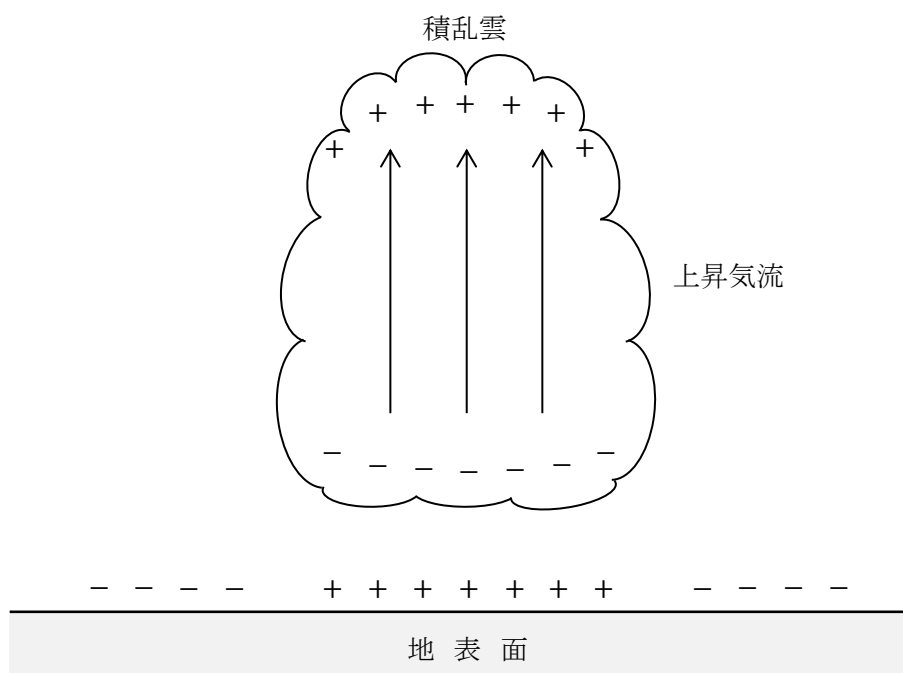


図 2

雲頂に残った正電荷は高層大気の中を広がりながらゆっくり降下し、大気中の下向き電流に寄与する。この他に、宇宙線（宇宙から降ってくる高エネルギー粒子）によって大気中の窒素分子と酸素分子が電離し、正の分子イオンと自由電子が生じる。自由電子は中性分子と結びついて負の分子イオンとなる。これらの荷電粒子が大気中の下向き電流の担い手となる。

成層圏より上の領域では自由電子の個数密度が大きくなる。そのために電気伝導率（電気抵抗率の逆数）が非常に大きくなり、電場は 0 と見なすことができる。この領域を電離圏という。成層圏と電離圏の境界面の高さを H とする。

いま仮に、地表面から高さ H までの大気中に、地球の帯電量 Q を打ち消すだけの正電荷 $-Q$ が一様に分布しているとしよう。このとき、

問 6 大気中の電荷密度 ρ を、 Q, R, H を用いて表せ。 $H \ll R$ に注意して近似計算をせよ。必要なら、 $|x| \ll 1$ のときに成り立つ次の近似式を用いよ。

$$(1+x)^a \cong 1+ax$$

問 7 地表面から高さ h ($0 < h \leq H$) の位置での電場成分 $E(h)$ を、 h, H と地表面付近の電場 E_0 を用いて表せ。ただし、鉛直上向き成分を正とする。 $H \ll R$ に注意して近似計算をせよ。

問 8 地表面の電位を 0 とすれば、電離圏の電位は何 V か。ただし、 H を 50 km とせよ。高さ h での電位を $\varphi(h)$ とし、 Δh を微小高度差とすれば、

$$E(h) = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta h} = -\frac{\varphi(h+\Delta h) - \varphi(h)}{\Delta h}$$

が成り立つことに留意せよ。

電離圏の実際の電位は、問 8 で求めた値より 1 桁小さいと見積もられている。

問 9 実際の大气中の電荷密度 ρ は、上空に上がれば単調に減少する。図 3 のグラフに、実際の電場 $E(h)$ を表す曲線の概形を描け。縦軸の E_0 は地表面付近の実際の電場である。



図 3

問題 21 の解答と解説

大気中の電場と電流については 19 世紀から測定されているが、地域的・時間的変動が大きく、高層大気中の電場・電流や落雷の頻度・電流の測定が十分でないこともあって、大気中の電気回路の詳細についてはまだ十分に解明されていない。この問題に与えられている電場・電流の平均値はかなり粗い数値であるが、少なくとも数値の桁は実際の状況を正しく反映していると思われる。

問 1 点電荷 q を中心とする半径 r の球面上の電場は、球対称性より、球面に垂直で、その強さは球面上のどこでも同じであるから、ガウスの法則より、

$$4\pi r^2 \varepsilon E(r) = q$$

が成り立つ。これより次式を得る。

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2}$$

これはクーロンの法則である。ガウスの法則はクーロンの法則と等価である。

問 2 導体球を取り囲み、半径が R よりわずかに大きい球面に対してガウスの法則を適用すれば、次式を得る。

$$Q = 4\pi R^2 \varepsilon E_0 \quad (1)$$

問 3 式 (1) を地球に適用する。題意により、 $E_0 = -100 \text{ V m}^{-1}$ であるから、地球の帯電量は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi (6.4 \times 10^6 \text{ m})^2 \times (8.9 \times 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1}) \times (-100 \text{ V m}^{-1}) \\ &= -4.6 \times 10^5 \text{ C} \sim -5 \times 10^5 \text{ C} \end{aligned}$$

問 4 電流密度を i とすると、大気から地球の全表面へ流れ込む電流 I は、

$$\begin{aligned} I &= 4\pi R^2 i \\ &= 4\pi \times (6.4 \times 10^6 \text{ m})^2 \times (3 \times 10^{-12} \text{ A m}^{-2}) = 1.5 \times 10^3 \text{ A} \end{aligned}$$

となる。これは単位時間あたりに地球の全表面へ流れ込む正の電気量であるから、問 3 で求めた負の全帯電量 Q を打ち消すのに要する時間 T は、 $Q + IT = 0$ より、

$$T = \frac{-Q}{I} \sim 3 \times 10^2 \text{ s}$$

となる。一定電流を仮定しない場合の計算は、(追加説明 2) に与えてある。

問 5 1 回の平均的な落雷で地表面に流入する電気量 ΔQ は、

$$\Delta Q = -(1 \times 10^{-4} \text{ s}) \times (5 \times 10^4 \text{ A}) = -5 \text{ C}$$

である。地球の全表面で落雷が単位時間あたり N 回起こっているとすると、単位時間あたり $N \Delta Q$ の電気量が地表面に流入する。これが問 4 で求めた I を打ち消すので、 $I + N \Delta Q = 0$ より、

$$N = \frac{I}{- \Delta Q} = \frac{1500 \text{ A}}{5 \text{ C}} \sim \boxed{3 \times 10^2 \text{ s}^{-1}}$$

問 6 高さ H の大気の体積 V は, H/R の 2 次以上の微小量を無視すれば,

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3} (R+H)^3 - \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 \left\{ \left(1 + \frac{H}{R}\right)^3 - 1 \right\} \\ &\doteq \frac{4\pi}{3} R^3 \times 3 \frac{H}{R} = 4\pi R^2 H \end{aligned}$$

となるので, 大気中の電荷密度 ρ は次のように表される。

$$\rho = \frac{-Q}{V} = \boxed{\frac{-Q}{4\pi R^2 H}} \quad (2)$$

問 7 地球を取り囲む半径 $R+h$ の球面にガウスの法則を適用すれば,

$$4\pi (R+h)^2 \varepsilon E(h) = Q + 4\pi R^2 h \rho$$

となる。これに式 (2) を代入すれば,

$$4\pi R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \varepsilon E(h) = Q \left(1 - \frac{h}{H}\right)$$

となる。さらに, 式 (1) を代入して近似計算をすれば, 次のようになる。

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2h}{R}\right) \varepsilon E(h) &\doteq 4\pi R^2 \varepsilon E_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right) \\ \rightarrow E(h) &= E_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left(1 + \frac{2h}{R}\right)^{-1} \doteq E_0 \left(1 - \frac{h}{H} - \frac{2h}{R}\right) \doteq \boxed{E_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)} \end{aligned}$$

問 8 高度 h と $h + \Delta h$ の間の電位差 $\Delta\varphi$ は,

$$\Delta\varphi = -E(h) \Delta h$$

と表される。これは図 4 の影を施した微小部分の面積であるから, $\varphi(H) - \varphi(0)$ は, これらの微小面積の和となり, $E(h)$ のグラフと横軸で囲まれた三角形の面積に等しい。よって,

$$\begin{aligned} \varphi(H) &= \varphi(0) + \frac{1}{2} (-E_0) H \\ &= 0 + \frac{1}{2} \times 100 \text{ V m}^{-1} \times (50 \times 10^3 \text{ m}) = 2.5 \times 10^6 \text{ V} \sim \boxed{3 \times 10^6 \text{ V}} \end{aligned}$$

となる。

問 9 実際の電場も, $E(0) = E_0$, $E(H) = 0$ を満たす。大気中の電荷密度に不連続層がなければ, $E(h)$ のグラフは単調増加の連続曲線となる。その曲線と横軸で囲まれた面積が $\varphi(H)$ で, 題意より, それが図 4 の場合の面積より 1 桁小さいので, 実際の $E(h)$ のグラフの概形は図 5 のようになる。

実際、地表面から上空へ上がるにつれて、電場の強さが図 5 のように指数関数的に小さくなることが観測されている。

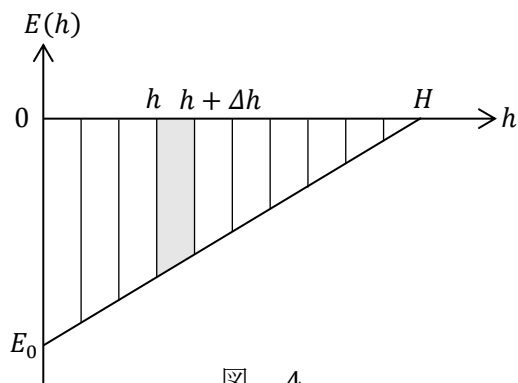


図 4

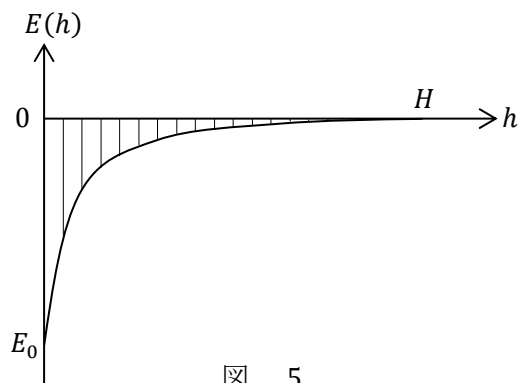


図 5

(追加説明 1)

図 6 は地球大気電気回路 (Global Atmospheric – Electrical Circuit) の等価回路である。電流は、積乱雲 → 電離圏 → 晴天大気 → 地表面 → 落雷 → 積乱雲の向きに流れる。

積乱雲の中で正と負に帯電した微粒子が生じる原因については、氷点下での氷晶 ($10\ \mu\text{m} \sim 100\ \mu\text{m}$) と霰 (氷晶に覆われた微小水滴) の衝突によるという説が有力である。高橋 劭の実験：

Riming Electrification as a Charge Generation Mechanism in Thunderstorms

J.Atmos.Sci.35 (1998) 1536

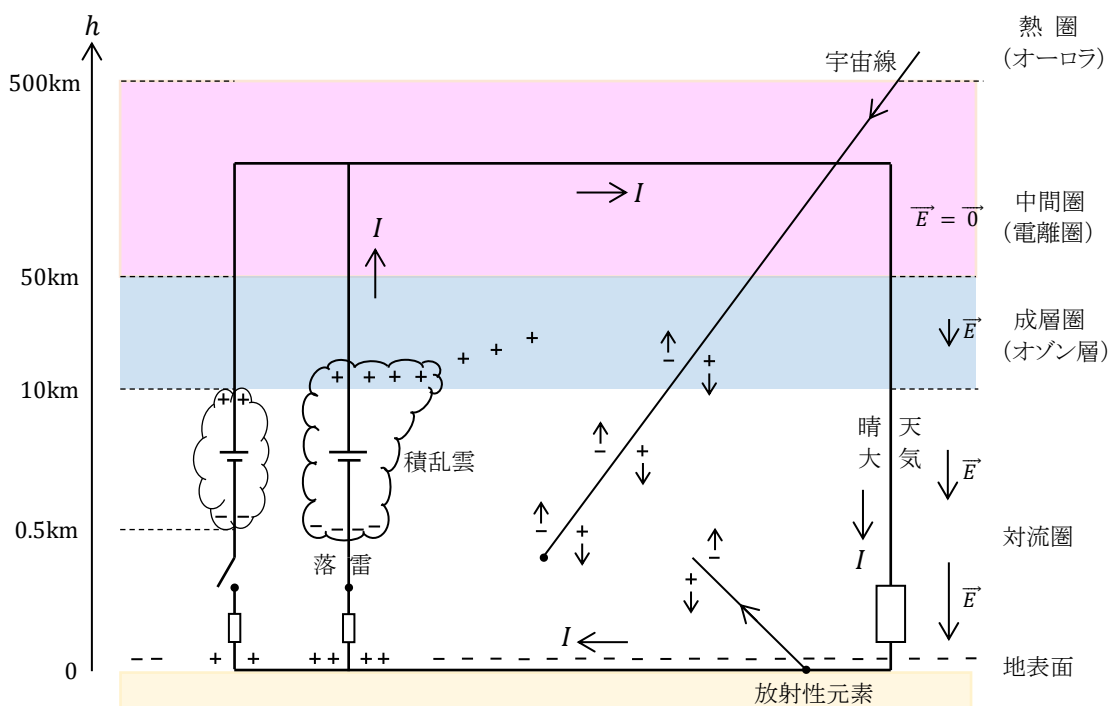


図 6

によると、どちらが正に帯電するかは気温と水蒸気の密度に依存するが、積乱雲上部の状態では、氷晶が正に、霰が負に帯電する。氷晶は上昇気流によって雲頂へ吹き上げられ、霰は合体によって成長し、重力によって落下する。積乱雲の3次元構造と電荷分布は複雑で、まだ十分に解明されていないが、粗い目で見れば、雲頂が正に、雲底が負に帯電する。

このように、電氣的に中性の状態から正と負の電荷を引き離す働きを起電力という。それにはエネルギーが必要である。積乱雲の場合には、内部にある上昇気流の運動エネルギーが使われる。この起電力によって雲頂と雲底の間に電位差が生じる。

雲底に集積した負電荷が大きくなると、地表面との間の電場が強くなるが、空気の絶縁破壊をもたらすほどの強さ ($\sim 3 \times 10^6 \text{ V m}^{-1}$) にはならない。それでも落雷が生じる理由については、かなり細かいことまでわかっているが、それについてはここでは述べない。

雲頂に吹き上げられた正の荷電粒子は、積乱雲が衰退すると、高層大気の中を拡散しながらゆっくり落下する。これが大気中の電場の源泉となる。積乱雲による落雷は熱帯地方の陸地に多い。一方、晴天大気中の電場は高緯度地方にもあるのだから、熱帯地方の高層大気で発生した正の荷電粒子は高緯度地方へ速やかに拡散していることになる。

電離圏にある希薄な空気の分子は、宇宙線や太陽光の紫外線・X線によって解離・電離され、プラズマ状態になる。自由電子の個数密度が大きくなると、電離圏の電気伝導率が非常に大きくなり、電離圏には電場は存在しなくなる。仮に、正と負の電荷分布にずれがあると、その間に電場が生じ、大きな伝導電流が流れて電荷分布のずれを消し去ってしまうからである。このとき、地表面に対する電離圏の電位差は、平均すれば $2.5 \times 10^5 \text{ V}$ 程度になる。

問題文にあるように、積乱雲の雲頂から拡散した正の荷電粒子はゆっくり落下して、下向きの電流に寄与するが、この下向き電流の主たる担い手は、宇宙線や地表面付近にある放射性元素からの γ 線によって生じた分子イオン O_2^+ , N_2^+ , O_2^- およびこれらより合成されるさまざまな高分子イオンである。正イオンは鉛直下向きに移動し、負イオンは鉛直上向きに移動する。大気中の帯電粒子全体の電荷密度は、地表面付近で最も大きく、上空へ上がるにつれて急激に小さくなる。

問題文にあるように、観測によれば、大気中の電場は高度が上がると急激に減少する。いま、高度を h として、電場 $E(h)$ が、

$$E(h) = E_0 e^{-h/h_e} \quad (E_0 < 0, h_e > 0) \quad (3)$$

で与えられるとしよう。このとき、高度 h のところにある面積 S 、厚さ Δh の薄い平板状領域を考える。この領域の電荷密度を $\rho(h)$ とすれば、ガウスの法則より、

$$S \varepsilon \{ E(h + \Delta h) - E(h) \} = S \Delta h \cdot \rho(h)$$

が成り立つ。 $\Delta h \rightarrow 0$ の極限をとり、式 (3) を用いれば、

$$\rho(h) = \varepsilon \frac{dE(h)}{dh} = \frac{\varepsilon (-E_0)}{h_e} e^{-h/h_e}$$

を得る。すなわち、電荷密度も上空に上がれば急激に小さくなるのである。

地表面の電気伝導率は非常に大きいので、地球は導体球と見なせる。電離圏も導体と見なせるので、地球大気電気回路は、地表面と電離圏という2つの球面電極板から成るコンデンサーに、

積乱雲という電池と晴天大気という絶縁体に近い電気抵抗を直列につないだコンデンサーの充電回路と見ることもできる。

(追加説明 2)

ある瞬間から地球の全表面で落雷がなくなつたと仮定しよう。それから時間 t 経ったとき、地表面の帯電量を $Q(t)$ 、地表面に流入する電流を $I(t)$ 、地表面付近の電流密度と電場を、それぞれ $i(t)$ 、 $E_0(t)$ とする。これらの間には次の関係式が成り立つ。

$$\text{問 2 の式 (1) より, } Q(t) = 4 \pi R^2 \varepsilon E_0(t)$$

$$\text{連続方程式 (電荷保存則) より, } \frac{dQ}{dt} = I(t)$$

$$\text{電流密度の定義より, } I(t) = 4 \pi R^2 i(t)$$

$$\text{電気伝導率 } \sigma \text{ の定義より, } i(t) = -\sigma E_0(t)$$

最後の式に負号が付いているのは、 i と E_0 の正の向きが逆だからである。これらより、 E_0 、 I 、 i を消去して、 Q と $\frac{dQ}{dt}$ の間の関係を求めれば、

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} Q$$

となる。この微分方程式の解は、

$$Q(t) = Q(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

と表される。 $Q(t)$ が $Q(0)$ の e^{-1} ($= 0.367 \dots$) 倍になるまでの時間 T は、 $Q(t)$ が 0 に近づく時間の目安となる。これを緩和時間といい、次式のように、 ε と σ で決まる。

$$T = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

地表面付近では、 $i(0) \sim 3 \times 10^{-12} \text{ A m}^{-2}$ 、 $E_0(0) \sim -100 \text{ V m}^{-1}$ であるから、

$$\sigma = \frac{i(0)}{-E_0(0)} \sim 3 \times 10^{-14} \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

である。よって、

$$T \sim \frac{8.9 \times 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1}}{3 \times 10^{-14} \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}} \sim 3 \times 10^2 \text{ s}$$

となり、問 4 の答と同じ桁の数値となる。

[他の演習問題へ](#)