

問題 20 フェーン現象と乾燥断熱減率

次の文中の に適切な数式または数値を書き入れよ。数式は () 内の変数を用いて表せ。

図 1 のように、湿潤な空気が上昇気流となって山を越えるとき、途中で雨か雪が降ると、山を越えたあと、空気は乾燥し、平地まで下降したとき気温が山を越えるまえより高くなる。これをフェーン現象という。

あるいは図 2 のように、気流が弱く、風上側の空気を山の頂上まで押し上げることができないとき、頂上付近の気流が山の斜面に沿って下降し、平地に達したときに高温になることがある。これは雨や雪を伴わないフェーン現象である。

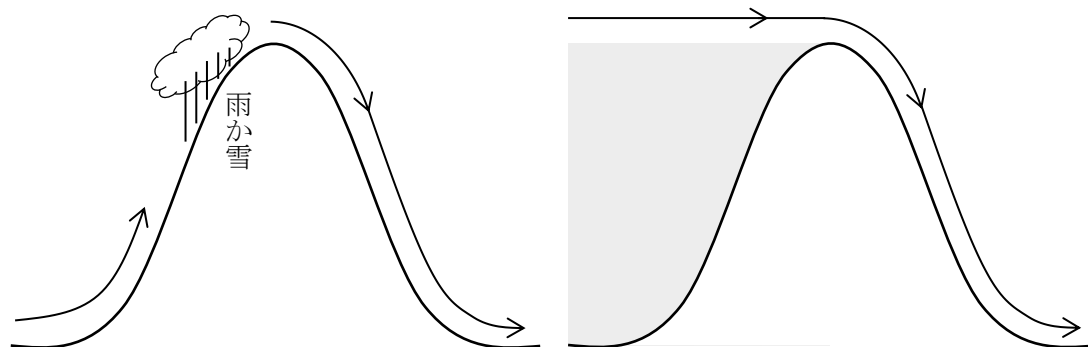


図 1

図 2

(I) 図 1 のようなフェーン現象が起こる理由を定量的に説明するために、湿潤な空気塊 G が、図 3 に示すような単純化された状態変化を起こす場合を考える。空気塊 G は定積モル比熱が cR の理想気体で、その物質量を n とする。 c は定数で、 R は気体定数である。平地の A 点と D 点での気圧は P_0 で、山の頂上での気圧は P_1 ($P_1 < P_0$) である。空気塊 G の A 点での温度は T_0 で、ここから山の頂上まで押し上げられる間、空気塊 G は断熱膨張するので、その温度は下がる。

断熱変化をするとき、空気塊 G の圧力 P と体積 V は、

$$P V^{\frac{c+1}{c}} = \text{一定} \quad (\text{i})$$

を満たしながら変化する。このとき、空気塊 G の温度 T と圧力 P の間には関係式：

$$T \times \boxed{(1)} = \text{一定} (c, P) \quad (\text{ii})$$

が成り立つ。式 (ii) より、空気塊 G が頂上の B 点に達したときの温度 T_1 は (2) (T_0, P_0, P_1, c) となる。

B 点に達する直前に、空気塊に含まれている水蒸気の分圧が飽和水蒸気圧となったために、B 点で水蒸気が凝縮し、雨が降り出したとする。空気塊 G が B 点から C 点まで山頂を通過している間に雨はやみ、水蒸気が放出した凝縮熱の総量は Q であった。この熱はすべて空気塊 G に吸収されるとし、水蒸気の凝縮による物質質量 n の変化は無視できるものとする。

B 点から C 点まで移動する間に、空気塊 G の温度が $T_2 - T_1$ だけ変化したとすれば、空気塊 G の内部エネルギーは (3) $(n, c, R, T_2 - T_1)$ だけ変化する。また、その間に空気塊 G が外部にする仕事は (4) $(n, R, T_2 - T_1)$ となる。これらと熱力学第一法則より、C 点での空気塊 G の温度 T_2 は (5) (n, c, R, T_1, Q) となることがわかる。

さらに、C 点から D 点まで山の斜面に沿って下降する間、空気塊 G は断熱的に圧縮されるので、D 点に達したときの温度 T_3 は (6) $(T_0, P_0, P_1, n, c, R, Q)$ となる。

この結果からわかるように、B 点で雨が降らなければ、D 点での温度は A 点での温度に等しく、フェーン現象は起こらない。

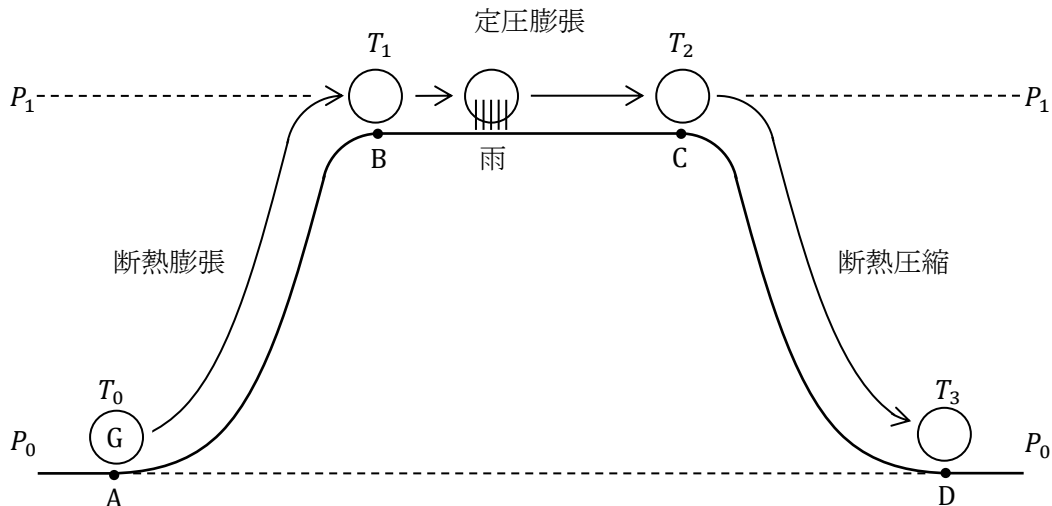


図 3

(II) 図 2 のようなフェーン現象が起こる原因は、空気塊が斜面を下降するときの断熱圧縮である。その下降高度と温度上昇の関係を求めるために、図 4 のような単純化された下降気流を考える。

高さ H の崖の上端 E から押し出された平板状の空気塊 G が、水平方向に広がることなく、ゆっくり下降し、平地 F に達したあと水平方向に移動する。ゆっくりとは、空気塊 G にはたらく力が釣りあっていると見なせることを意味する。

空気は定積モル比熱が $c R$ の理想気体とし、単位物質質量あたりの質量を μ とする。

空気塊 G の上面の位置を上端 E からの鉛直下向きの変位 h で表し、その厚さを Δh とする。 Δh は H に比べて十分小さいとし、上面での気圧 P と気温 T を、空気塊 G 全体の圧力と温度とする。このとき空気塊 G の密度 ρ は、状態方程式より、

$$\rho = (7) \quad (R, \mu, P, T) \quad (\text{iii})$$

と表される。

空気塊 G の下面にはたらく鉛直上向きの圧力を $P + \Delta P$ とすれば, 空気塊 G にはたらく力のつりあいより,

$$\Delta P = \boxed{(8)} \times \Delta h \quad (\rho, g) \quad (\text{iv})$$

を得る。ただし, g は重力加速度の大きさである。

次に, 空気塊 G が断熱的に収縮しながら高さ Δh だけ下降し, その上面での気圧と気温が $P + \Delta P$, $T + \Delta T$ になったとする。このとき, 空気塊 G の圧力と温度は式 (ii) を満たしながら変化するので, ΔT と ΔP の間には次の関係式が成り立つ。ただし, $|x| \ll 1$ のときに成り立つ近似式:

$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ を用いて近似計算をせよ。

$$\Delta T = \boxed{(9)} \times \Delta P \quad (c, T, P) \quad (\text{v})$$

さらに, 式 (iii), (iv), (v) から ρ と ΔP を消去すれば,

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = \boxed{(10)} \quad (c, R, \mu, g) \quad (\text{vi})$$

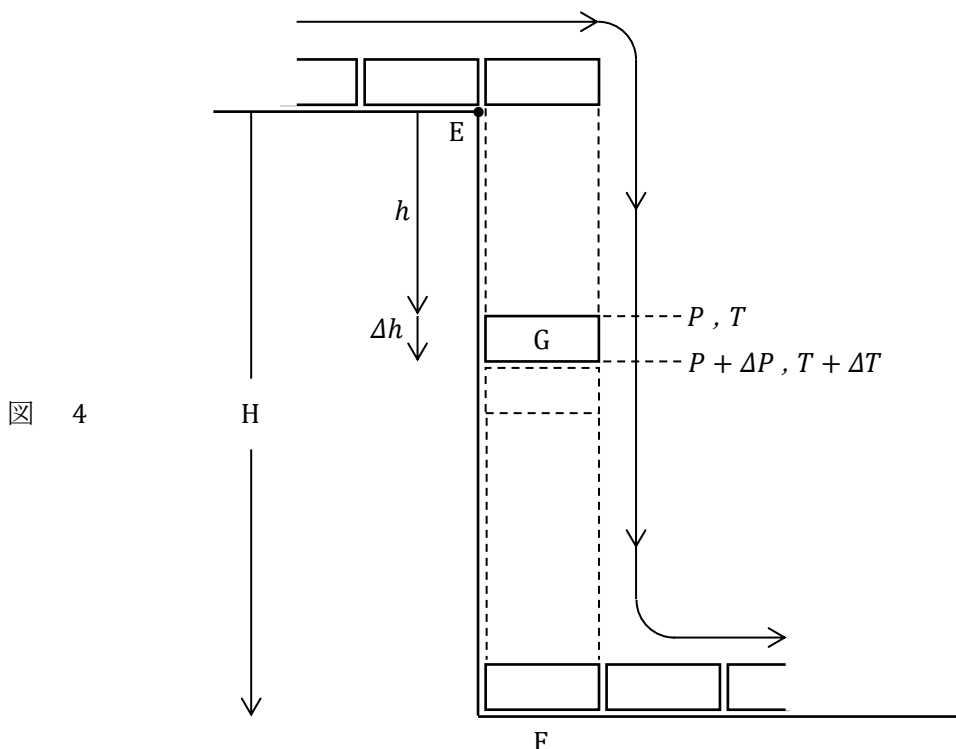
を得る。これは単位下降高度あたりの温度上昇であるが, 単位上昇高度あたりの温度降下でもある。これを空気の乾燥断熱減率という。

空気を二原子分子理想気体と見なせば, $c = \frac{5}{2}$ であり, $\mu = 0.029 \text{ kg mol}^{-1}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ であるから,

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = \boxed{(11)} \text{ K m}^{-1} \quad (\text{数値})$$

となる。たとえば, $H = 1000 \text{ m}$ のとき, 平地 F に達した空気塊 G の温度は, 下降するまえの温度より,

$\boxed{(12)} \text{ K}$ (数値) だけ上昇する。



問題 20 の解答と解説

フェーン現象はときどき大学入試問題に登場する。(I)の問題は、京都大学の 2001 年度入試問題を参考にして作成した。

(I) (1) 空気塊 G は理想気体であるから、その状態方程式は、

$$P V = n R T \quad (1)$$

と表される。これと断熱変化のときに成り立つ式

$$P V^{\frac{c+1}{c}} = \text{一定} \quad (i)$$

から V を消去すれば、次のようになる。

$$P \left(\frac{n R T}{P} \right)^{\frac{c+1}{c}} = \text{一定} \rightarrow T \times \boxed{P^{-\frac{1}{c+1}}} = \text{一定} \quad (ii)$$

(2) 式 (ii) より、

$$T_1 P_1^{-\frac{1}{c+1}} = T_0 P_0^{-\frac{1}{c+1}}$$

が成り立つので、 T_1 は次のようになる。

$$T_1 = \boxed{T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{c+1}}} \quad (2)$$

(3) 空気塊 G は理想気体であるから、その内部エネルギー U は、 $n(cR)T$ で与えられる。よって、C 点と B 点での内部エネルギーの差は次のようになる。

$$\Delta U_{12} = \boxed{n c R (T_2 - T_1)} \quad (3)$$

(4) B 点から C 点まで定圧膨張する間に、空気塊 G の体積が $V_2 - V_1$ だけ変化したとすると、その間に空気塊 G が外部にする仕事 W_{12} は、

$$W_{12} = P_1 (V_2 - V_1)$$

となる。状態方程式 (1) より、

$$P_1 (V_2 - V_1) = n R (T_2 - T_1)$$

が成り立つので、 W_{12} は次のように表される。

$$W_{12} = \boxed{n R (T_2 - T_1)} \quad (4)$$

(5) 式 (3) と式 (4) を用いて、熱力学第一法則を表せば、

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U_{12} + W_{12} \\ &= (c+1) n R (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

となる。これより T_2 は次のようになる。

$$T_2 = \boxed{T_1 + \frac{Q}{(c+1) n R}} \quad (5)$$

(6) C 点から D 点まで空気塊 G は断熱変化をするので、式 (ii) より、

$$T_3 P_0^{-\frac{1}{c+1}} = T_2 P_1^{-\frac{1}{c+1}}$$

が成り立つ。これより T_3 を求め、さらに式 (5) と式 (2) を用いれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 T_3 &= T_2 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{c+1}} \\
 &= \left\{ T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{c+1}} + \frac{Q}{(c+1)nR} \right\} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{c+1}} \\
 &= \boxed{T_0 + \frac{Q}{(c+1)nR} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{c+1}}} \quad (6)
 \end{aligned}$$

B 点で雨が降らなければ $Q = 0$ であるから、そのときには $T_3 = T_0$ となり、フェーン現象は起こらない。

問題文に与える変数の数を必要最小限にするために、入試問題などではあまり見かけない定数 c を用いて、定積モル比熱 C_V を cR と表したが、定圧モル比熱 C_P と比熱比 $\gamma = C_P / C_V$ を用いて、上で得た諸式を書き換えると次のようになる。

$$\text{式(ii)} \rightarrow T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{一定} \quad \text{あるいは} \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{一定}$$

$$\text{式(6)} \rightarrow T_3 = T_0 + \frac{Q}{n C_P} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

(II) (7) 空気塊 G の上面の面積を S とすれば、その状態方程式は、

$$P(S \Delta h) = \frac{(\rho S \Delta h)}{\mu} R T$$

と表される。これより次式を得る。

$$\rho = \boxed{\frac{\mu P}{R T}} \quad (\text{iii})$$

(8) 空気塊 G にはたらく力のつりあいの式は、

$$0 = (P + \Delta P) S - P S - \rho (S \Delta h) g$$

と表される。これより次式を得る。

$$\Delta P = \boxed{\rho g} \Delta h \quad (\text{iv})$$

(9) 空気塊 G の微小断熱変化に対して、式 (ii) を適用すれば、

$$T P^{-\frac{1}{c+1}} = (T + \Delta T) (P + \Delta P)^{-\frac{1}{c+1}}$$

が成り立つ。この式の両辺を $T P^{-\frac{1}{c+1}}$ で割り、近似計算をすれば、

$$\begin{aligned}
 1 &= \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \left(1 + \frac{\Delta P}{P} \right)^{-\frac{1}{c+1}} \\
 &\doteq \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \left(1 - \frac{1}{c+1} \frac{\Delta P}{P} \right) \\
 &\doteq 1 + \frac{\Delta T}{T} - \frac{1}{c+1} \frac{\Delta P}{P}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、微小量の積は無視した。これより次式を得る。

$$\Delta T = \left[\frac{1}{c+1} \frac{T}{P} \right] \times \Delta P \quad (\text{v})$$

(10) 式 (v) は、式 (iv) と式 (iii) を用いて、

$$\Delta T = \frac{1}{c+1} \frac{T}{P} \rho g \Delta h = \frac{1}{c+1} \frac{\mu}{R} g \Delta h$$

と書き換えられる。よって、

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = \left[\frac{\mu g}{(c+1) R} \right] \quad (\text{vi})$$

(11) 与えられた数値を式 (vi) に代入すれば、

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{0.029 \text{ kg mol}^{-1} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}}{\frac{7}{2} \times 8.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = \boxed{0.0098} \text{ K m}^{-1}$$

となる。

(12) $\Delta h = H = 1000 \text{ m}$ のときは、

$$\Delta T = \boxed{9.8} \text{ K}$$

である。

(補足) 湿潤断熱減率の導出

本問では空気塊の量を物質量 n で表したが、気象学では質量で表すことが多い。ここでは気象学の慣習に従って、単位質量あたりの体積、内部エネルギー、熱量、比熱を用いて論じる。簡単に言えば $n \text{ mol}$ ではなく、 1 kg の空気塊の状態変化を扱うと思えばよい。

単位物質量あたりの質量が μ 、定積モル比熱が C_v 、定圧モル比熱が C_p の理想気体の質量、体積、圧力、温度を、それぞれ m 、 V 、 p 、 T とする。その状態方程式は、

$$p V = n R T, \quad n = \frac{m}{\mu} \quad (1)$$

である。この気体が微小な熱量 ΔQ を吸収して、体積、圧力、温度がそれぞれ ΔV 、 Δp 、 ΔT だけ微小変化したとする。このとき熱力学第一法則は次のように表される。

$$\Delta Q = n C_v \Delta T + p \Delta V \quad (2)$$

ここで、以下のような単位質量あたりの物理量を導入する。

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}, \quad q = \frac{Q}{m}$$

$$r = \frac{R}{\mu}, \quad c_v = \frac{C_v}{\mu}, \quad c_p = \frac{C_p}{\mu} \quad (3)$$

ただし、 ρ は密度で、 v を比体積という。気体定数 R は普遍定数であるが、 r は気体の成分に依存する定数である。式 (1) と式 (2) の両辺を m で割れば、次式を得る。

$$p v = r T \quad \text{あるいは} \quad p = r \rho T \quad (4)$$

$$\Delta q = c_v \Delta T + p \Delta v \quad (5)$$

微小変化したあとの状態方程式：

$$(p + \Delta p)(v + \Delta v) = r(T + \Delta T)$$

と式④の差をとり、微小量の積を無視すれば、

$$p \Delta v = r \Delta T - v \Delta p \quad (6)$$

を得る。式⑥を式⑤に代入し、マイヤーの関係式 $c_p = c_v + r$ を用いれば、次式を得る。

$$\Delta q = c_p \Delta T - v \Delta p \quad (7)$$

湿度 0% の乾いた空気 (dry air) を理想気体と見なし、その物理量に添字 **d** をつける。この空気塊が断熱膨張しながらゆっくり Δz だけ上昇したとする。 Δz が微小であれば、本問の式 (iv)：

$$\Delta p_d = -\rho_d g \Delta z \quad (8)$$

が成り立つ。式⑧を式⑦に代入し、断熱条件 $\Delta q = 0$ に注意すれば、

$$0 = c_p \Delta T + v_d \rho_d g \Delta z = c_p \Delta T + g \Delta z$$

となる。これより乾燥断熱減率 Γ_d は、

$$\Gamma_d = \left[-\frac{\Delta T}{\Delta z} \right]_{\Delta q=0} = \frac{g}{c_p} \quad (9)$$

と表され、本問の式 (vi) と一致する。

次に、湿潤な空気を考える。空気中の水蒸気 (water vapor) も理想気体と見なし、その物理量に添字 **v** をつける。ただし、水蒸気の分圧 p_v は慣習に従って e (evaporation の e ?) で表す。

ここで、水蒸気とそれ以外の乾いた空気の密度比 w を導入する。すなわち、

$$w = \frac{\rho_v}{\rho_d} \quad (10)$$

とする。状態方程式④を用いて式⑩を書き換えれば、

$$w = \frac{e / r_v T}{p_d / r_d T} = \frac{r_d}{r_v} \frac{e}{p_d} = \frac{\varepsilon e}{p_d}$$

となる。ただし、

$$\varepsilon = \frac{r_d}{r_v} = \frac{\mu_v}{\mu_d} \doteq \frac{18 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{29 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} \doteq 0.62$$

である。湿潤な空気の全圧 $p = p_d + e$ は e に比べて十分大きいので、

$$w \doteq \frac{\varepsilon e}{p} \quad (11)$$

と近似する。実際、 $p \sim 1 \text{ atm} \sim 1000 \text{ hPa}$ で、気温が 20°C であれば、 $e \lesssim 23 \text{ hPa}$ (飽和水蒸気圧) である。

次に、水蒸気が飽和している場合を考える。飽和水蒸気密度を ρ_v^* 、飽和水蒸気圧を e^* とおけば、飽和しているときの密度比は、

$$w^* = \frac{\rho_v^*}{\rho_d} \doteq \frac{\varepsilon e^*}{p} \quad (12)$$

となる。 e^* は温度 T だけの関数であるが、 w^* は温度 T と圧力 p に依存する。

水蒸気が飽和状態にある湿潤な空気を飽和湿潤空気と呼ぶことにする。その空気塊が外部との熱の出入りを断って、ゆっくり Δz だけ上昇したとする。そして、その全圧、温度、飽和蒸気圧がそれぞれ Δp 、 ΔT 、 Δe^* だけ微小変化したとすると、密度比は、

$$\begin{aligned} w^* + \Delta w^* &= \frac{\varepsilon (e^* + \Delta e^*)}{p + \Delta p} = \frac{\varepsilon e^*}{p} \left(1 + \frac{\Delta e^*}{e^*} \right) \left(1 + \frac{\Delta p}{p} \right)^{-1} \\ &\doteq w^* \left(1 + \frac{\Delta e^*}{e^*} \right) \left(1 - \frac{\Delta p}{p} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 Δe^* を $\frac{d e^*}{d T} \Delta T$ に置き換えれば、密度比の変化量 Δw^* は、

$$\Delta w^* = \frac{\varepsilon}{p} \frac{d e^*}{d T} \Delta T - \frac{w^*}{p} \Delta p \quad (13)$$

と表される。

一方、 $\rho_v^* \ll \rho_d$ であるので、飽和湿潤空気の密度は、 $\rho = \rho_d + \rho_v^* \doteq \rho_d$ と近似できる。このとき、

$$w^* = \frac{\rho_v^*}{\rho_d} \doteq \frac{\rho_v^* v}{\rho v} = \rho_v^* v$$

であるから、 w^* は飽和湿潤空気に含まれている単位質量あたりの水蒸気の質量と見なせる。簡単に言えば、湿度 100 % の湿潤空気 1 kg に含まれている水蒸気の質量が w^* kg である。

したがって、上記の微小断熱変化の間に、質量 $-\Delta w^*$ の水蒸気が凝縮して水滴になる。その間に発生する熱量は、凝縮熱を L として、 $L (-\Delta w^*)$ で与えられる。この熱量がすべて飽和湿潤空気に吸収されるとすれば、式 ⑦ の熱力学第一法則は

$$-\frac{L \varepsilon}{p} \frac{d e^*}{d T} \Delta T + \frac{L w^*}{p} \Delta p = c_p \Delta T - v \Delta p \quad (14)$$

と表される。ここで次の諸式：

$$\Delta p = -\rho g \Delta z, \quad v \rho = 1, \quad p \doteq p_d = r_d \rho T$$

を用いて、式 ⑭ を書き換えれば、

$$\begin{aligned} \left(c_p + \frac{L \varepsilon}{p} \frac{d e^*}{d T} \right) \Delta T &= \left(v + \frac{L w^*}{p} \right) \Delta p \\ \rightarrow c_p \left(1 + \frac{\varepsilon L}{c_p p} \frac{d e^*}{d T} \right) \Delta T &= - \left(v \rho + L w^* \frac{\rho}{p} \right) g \Delta z \\ &= - \left(1 + \frac{L w^*}{r_d T} \right) g \Delta z \end{aligned} \quad (15)$$

となる。よって、飽和湿潤空気の断熱減率は、

$$\Gamma_m = \left[-\frac{\Delta T}{\Delta z} \right]_{\Delta q = -L \Delta w^*} = \frac{g}{c_p} \frac{1 + \frac{L w^*}{r_d T}}{1 + \frac{\varepsilon L}{c_p p} \frac{d e^*}{d T}} \quad (16)$$

と表される。添字の m は湿潤空気 (moist air) を表す。非飽和湿潤空気の断熱減率は Γ_d と見なせるので、湿潤断熱減率と言えば、飽和湿潤空気の断熱減率を指す。

ここで、大学の物理・化学で学習する式を用いる。

水と水蒸気が接していて平衡状態にあるとき、次のクラウジウス・クラペイロンの式が成り立つ。

$$\frac{d e^*}{d T} = \frac{L}{T (v_v - v_w)} \doteq \frac{L}{T v_v} \quad (17)$$

ただし、 v_v と v_w は水蒸気と水 (密度 ρ_w) の比体積で、 $v_v = \frac{1}{\rho_v} \gg \frac{1}{\rho_w} = v_w$ が成り立つ。

式 (17) を式 (16) に代入し、 $e^* v_v = r_v T$ 、 $w^* = \varepsilon e^* / p$ と $\Gamma_d = g / c_p$ を用いて、 Γ_m を書き換えれば、

$$\Gamma_m = \Gamma_d \frac{1 + \frac{L w^*}{r_d T}}{1 + \frac{L^2 w^*}{c_p r_v T^2}} \quad (18)$$

となる。

具体例で Γ_m の値を求めてみよう。

理科年表には、 $T = 298 \text{ K}$ (25°C) における水の蒸発熱 L の値 ($L = 2.44 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$) しか与えられていないので、この気温と $p = 1000 \text{ h Pa}$ を採用する。このとき、 $e^* = 31.7 \text{ h Pa}$ であるので、

$$w^* = \frac{\varepsilon e^*}{p} = 2.0 \times 10^{-2}$$

となる。物理定数は、

$$r_d = \frac{R}{\mu_d} = 2.9 \times 10^2 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$r_v = \frac{R}{\mu_v} = 4.6 \times 10^2 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

である。さらに、乾燥空気を二原子分子理想気体と見なせば、

$$c_p = \frac{7}{2} r_d = 1.0 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

となる。これらと $\Gamma_d = 9.8 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$ を式 (18) に代入すれば、

$$\Gamma_m = 4.0 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$$

を得る。気温がもう少し低い場合、あるいは山頂で気圧が低い場合には、 Γ_m の値はこれよりも大きくなり、中学の理科で学習する値 ($0.5 \sim 0.6$) $^\circ \text{C} / 100 \text{ m}$ に近くなる。

他の演習問題へ