

問題 19 浅水波 (津波) の速さと振幅

次の文中の に適切な数式を記入せよ。重力加速度の大きさを g とする。

(I)

定常的に流れる密度 ρ の非圧縮性流体がある。この流体には粘性がないので、流れている間に熱が発生することはない。流体中に微粒子をばら撒くと、図 1 のような曲線を描く。これを流線といい、流線で囲まれた管を流管という。細い流管の断面 A の面積を S_1 、そこでの流速を v_1 、圧力を p_1 とし、基準面からの高さを y_1 とする。同様に、別の断面 B では、 S_2 、 v_2 、 p_2 、 y_2 とする。断面 A と断面 B の間の流管を流管 AB と名付ける。

単位時間あたりに、断面 A で流管 AB に入ってくる流体の体積と、断面 B で流管 AB から出ていく流体の体積が等しいことから、 S_1 、 S_2 、 v_1 、 v_2 の間に関係式：

$$\boxed{\text{(ア)}} \quad (1)$$

が成り立つ。これを連続の式という。

次に、断面 A と断面 B で流管 AB 内の流体 L に接している流体が、単位時間あたりに流体 L にする仕事の和 W を、 p_1 、 p_2 、 S_1 、 S_2 、 v_1 、 v_2 を用いて表せば、 (イ) となる。また、流体 L の力学的エネルギーの単位時間あたりの変化 ΔE を、 ρ 、 g 、 S_1 、 S_2 、 v_1 、 v_2 、 y_1 、 y_2 を用いて表せば、 (ウ) となる。仕事とエネルギーの関係を表す式と式 (1) から、次の関係式：

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \boxed{\text{(エ)}} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \boxed{\text{(オ)}} \quad (2)$$

が導かれる。ただし、(エ) は ρ 、 g 、 y_1 、 p_1 を用いて、(オ) は ρ 、 g 、 y_2 、 p_2 を用いて表せ。式 (2) をベルヌーイの式という。

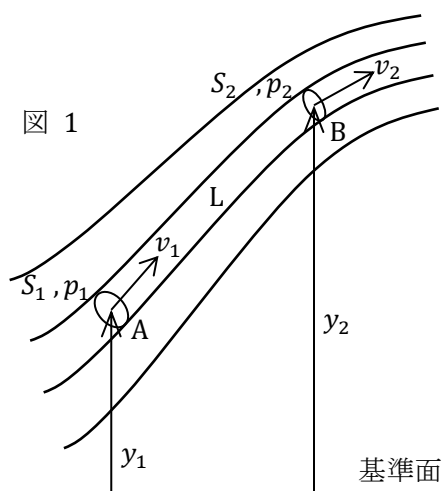


図 1

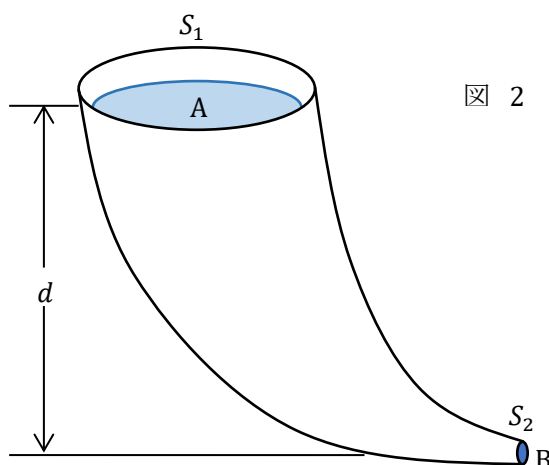


図 2

(II)

図 2 のような角笛形の容器に水を満たす。水の粘性は無視できる。水面 A は空気に接しており、断面 B には栓がしてある。水面 A の面積は S_1 、断面 B の面積は S_2 で、A B 間の高低差は d である。断面 B の口径は d に比べて十分小さいとする。このとき、栓を開いた直後に断面 B から噴出する水の速さは (カ) となる。ただし、容器と水の間の摩擦は無視でき、流線は容器の内面に沿っているとする。また、栓を開いた直後の断面 B での水圧は大気圧に等しいとする。

(III)

幅が一定の長い水路がある。水が静止しているときの水深はどこでも H である。水路に沿って x 軸、水路の底面を原点として鉛直上向きに y 軸、水路の幅方向に z 軸をとる。 x 軸の正の向きに伝わる水面波の波長を λ 、振幅を h_0 とする。水面の高さ y は位置座標 x と時刻に依存するが、位置座標 z には依存しない。水路は十分長いので反射波は考えない。 $\lambda \gg H$ が満たされているとき、この水面波を浅水波という。その波の速さ V を求める。

水面に軽い小物体を浮かべると、図 3 のように、小物体は楕円形の軌跡を描くので、水面を構成している流体粒子（水分子の小さな集団）も同じ運動をしていることがわかる。流体粒子が浅水波の山 A あるいは谷 B の位置を通過するとき、その速度は図の矢印の向きに速さが u_0 ($u_0 < V$) となる。速さとは速度ベクトルの大きさのことである。

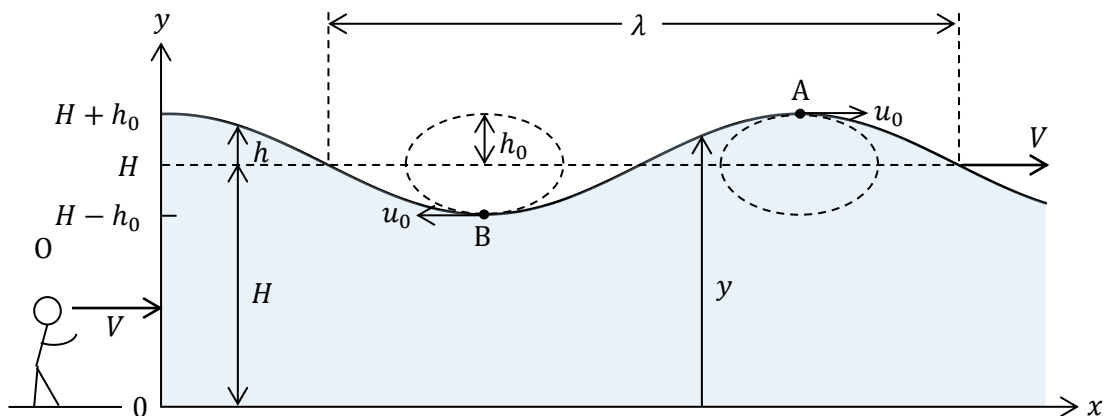
いま、観測者 O が x 軸の正の向きに速さ V で移動すれば、浅水波の波形は静止しているように見え、水面の流体粒子が、図 4 のように、水面に沿って動くように見える。その速さは、山 A で (キ)、谷 B で (ク) である。さらに、 $h_0 \ll H$ の場合には、水面の流体粒子だけでなく、山 A の位置座標 x_A にある薄い板状の水が (キ) の速さで動くと思わせる。同様に、谷 B の位置座標 x_B にある薄い板状の水は (ク) の速さで動くと思わせる。このとき、鉛直断面 A A' と B B' の間にある水の流れに対して、連続の式 (1) を適用すれば、 V 、 u_0 、 H 、 h_0 の間に関係式：

(ケ)

(3)

が成り立つ。また、山 A から谷 B まで水面に沿って流れる流体粒子に対して、ベルヌーイの式 (2) を適用すれば、 V 、 u_0 、 g 、 h_0 の間に関係式：

図 3

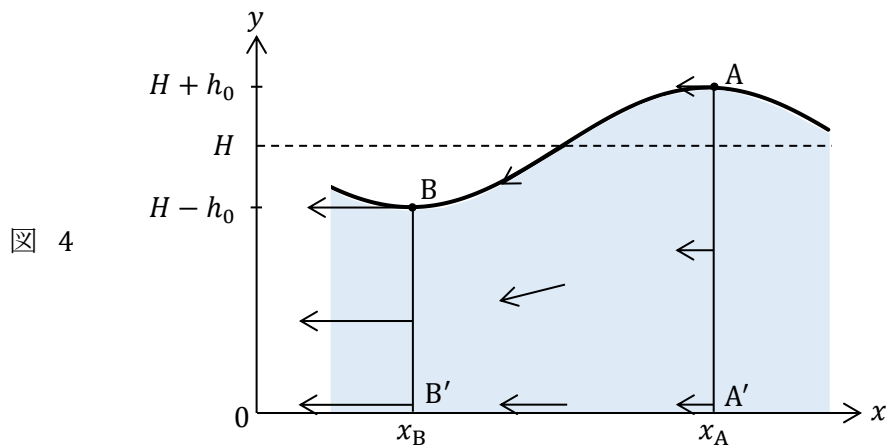


(コ)

(4)

が成り立つ。式(3)と式(4)から u_0/h_0 を消去すれば、振幅が小さい浅水波の速さ V が、

(サ) と表されることがわかる。



(IV)

前節の水路の水深が、図5のように、途中で変化する場合を考える。水深 H_1 の領域Ⅰを波長 λ_1 、振幅 h_1 の浅水波が x 軸の正の向きに進行している。ただし、 $h_1 \ll H_1 \ll \lambda_1$ が満たされているものとする。この場合、浅水波の周期は (シ) である。領域Ⅰと水深 H_2 ($H_2 < H_1$) の領域Ⅱとの接続領域に達した浅水波は、反射することなく接続領域を通過し、領域Ⅱを伝播するようになる。このとき、接続領域を通過するまえと比べて、周期は変化しないが、波の速さは (ス) 倍になり、波長は (セ) 倍になる。

浅水波のエネルギーを時間平均すれば、水面を上から見下したとき、単位面積あたりのエネルギーは振幅の2乗に比例する。このことから、接続領域を越えると、浅水波の振幅は (ソ) 倍になることがわかる。

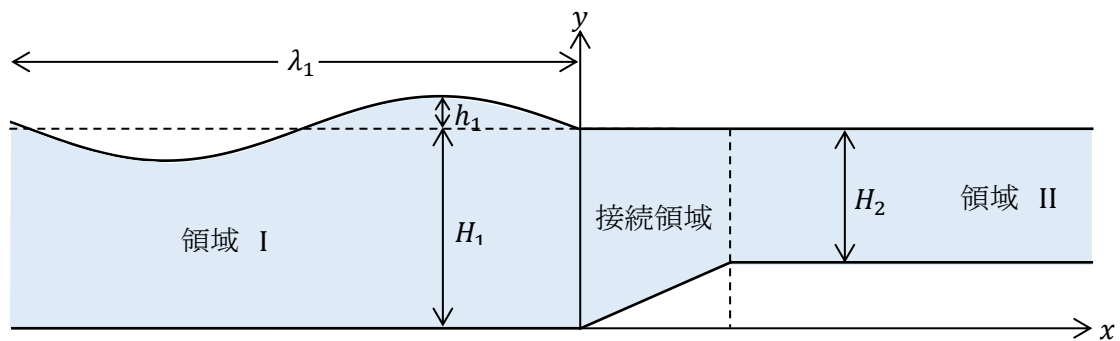


図 5

問題 19 の解答と解説

浅水波の速さをベルヌーイの式を用いて求める。ベルヌーイの式については、大阪大学の 2008 年度後期入学試験に出題されている。振幅が小さい浅水波の代表例は大洋を伝わる津波である。津波が沿岸に近づくと振幅が大きくなる。その理由についても考える。

(I)

(ア) 一般的に液体の膨張や収縮は無視できるほど小さいし、流管 AB 内に、流体の湧き出しや吸い込みもない。したがって、単位時間あたりに流管に入ってくる流体の体積 $S_1 v_1$ と出ていく流体の体積 $S_2 v_2$ は等しい。よって、

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

(1)

が成り立つ。これは湧き出しや吸い込みのない非圧縮性流体に対して成り立つ連続の式である。

(イ) 単位時間あたりに、流管 AB の外側にある流体が流体 L におよぼす仕事は、断面 A で $p_1 S_1 v_1$ 、断面 B で $-p_2 S_2 v_2$ である。(図 6 参照)。よって、その和 W は $p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2$ となる。

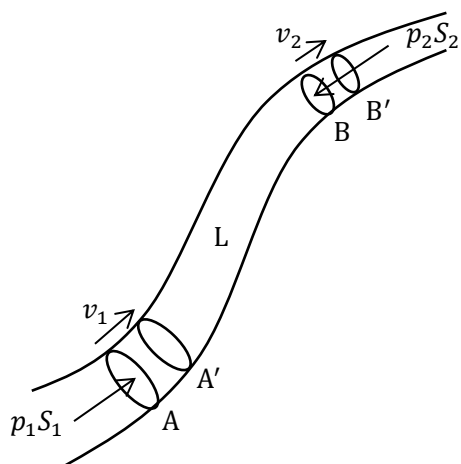


図 6

流体 L の断面 A, B にはたらく圧力による力 $p_1 S_1$, $p_2 S_2$ と単位時間あたりの変位 v_1 , v_2

(ウ) 断面 X と断面 Y の間にある流管内の流体の力学的エネルギーを $E(X, Y)$ と表せば、 ΔE は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(A', B') - E(A, B) = E(B, B') - E(A, A') \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2) v_2^2 + \rho (S_2 v_2) g y_2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} \rho (S_1 v_1) v_1^2 + \rho (S_1 v_1) g y_1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) + \rho (S_2 v_2 y_2 - S_1 v_1 y_1) g \end{aligned}$$

(エ)(オ) 一般的に、物体にされた仕事はなにかのエネルギーになる。問題文にあるように、流体 L からは熱が発生しないので、 $W = \Delta E$ が成り立つ。これに (イ) と (ウ) の式を代入して、両辺を $S_1 v_1 (= S_2 v_2)$ で割れば

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \boxed{\rho g y_1 + p_1} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \boxed{\rho g y_2 + p_2} \quad (2)$$

を得る。これをベルヌーイの式という。粘性と渦がなければ、非定常の圧縮性流体の場合でも一般化されたベルヌーイの式が成り立つが、それは大学の物理で扱う。

(II)

(カ) 栓を開けた直後、水面 A が下降する速さを v_1 ，断面 B で水が噴出する速さを v_2 とすれば、連続の式 (1) より、 $S_1 v_1 = S_2 v_2$ が成り立つ。また、水の密度を ρ ，大気圧を p_0 ，とすれば、ベルヌーイの式 (2) より、

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g d + p_0 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_0$$

が成り立つ。これら 2 式より v_1 を消去して v_2 を求めれば、

$$v_2 = \sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S_2} 2 g d}$$

を得る。 $S_1 \gg S_2$ であれば、 $v_2 \doteq \sqrt{2 g d}$ が成り立つ。これをトリチェリーの法則ということがある。水飴のような極端な場合を想像すればわかるように、粘性がある流体ではトリチェリーの法則は成り立たない。

(III)

(キ)(ク) 観測者 O に対する流体粒子の相対速度は、 x 軸方向に、山 A では $u_0 - V$ ，谷 B では $-u_0 - V$ である。よって、その速さは、山 A で $\boxed{V - u_0}$ ，谷 B で $\boxed{V + u_0}$ となる。

(ケ) 水路の幅を a とする。観測者 O から見たとき、断面 AA'，BB' の面積はそれぞれ、 $a(H + h_0)$ ， $a(H - h_0)$ であるから、連続の式 (1) より、

$$a(H + h_0)(V - u_0) = a(H - h_0)(V + u_0)$$

が成り立つ。これより次式を得る。

$$\boxed{V h_0 = H u_0} \quad (3)$$

(コ) 観測者 O から見たとき、水面の流体粒子の流れに対してベルヌーイの式 (2) を適用すれば、

$$\frac{1}{2} \rho (V - u_0)^2 + \rho g (H + h_0) + p_0 = \frac{1}{2} \rho (V + u_0)^2 + \rho g (H - h_0) + p_0$$

となる。ただし、水面の水圧は大気圧 p_0 に等しいことを用いている。これより次式を得る。

$$\boxed{V u_0 = g h_0} \quad (4)$$

(サ) 式 (3) と式 (4) より、 u_0 / h_0 を消去して V を求めれば、次のようになる。

$$V = \boxed{\sqrt{g H}} \quad (5)$$

(Ⅳ)

(シ) 領域Ⅰでの浅水波の速さ V_1 は、式(5)より、 $V_1 = \sqrt{g H_1}$ であるから、周期 T_1 は次のようになる。

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{V_1} = \boxed{\frac{\lambda_1}{\sqrt{g H_1}}}$$

(ス) 領域Ⅱでの浅水波の速さ V_2 は、式(5)より、 $V_2 = \sqrt{g H_2}$ であるから、

$$\frac{V_2}{V_1} = \boxed{\sqrt{\frac{H_2}{H_1}}}$$

(セ) 領域Ⅱでの周期 T_2 は、問題文にあるように、 T_1 に等しい。一般的に、媒質中を伝わる波の周期(振動数)は伝播中に変化しない。よって、領域Ⅱでの波長 λ_2 は次のようになる。

$$\lambda_2 = V_2 T_2 = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} V_1 T_1 = \boxed{\sqrt{\frac{H_2}{H_1}}} \lambda_1$$

(ソ) 問題文にあるように、小さい振幅の浅水波のエネルギー面密度 ε は、比例定数を c として、 $\varepsilon = c h^2$ と表される(補足2)。領域Ⅰ、Ⅱでのエネルギー面密度をそれぞれ ε_1 、 ε_2 とすると、領域Ⅰから接続領域に入ってくる単位時間あたりのエネルギー E_1 は、

$$E_1 = \varepsilon_1 a V_1 = c h_1^2 a V_1 \quad (6)$$

であり、接続領域から領域Ⅱへ出ていく単位時間あたりのエネルギー E_2 は、領域Ⅱでの浅水波の振幅を h_2 として、

$$E_2 = \varepsilon_2 a V_2 = c h_2^2 a V_2 \quad (7)$$

である。接続領域で波が反射することはないと仮定しているので、エネルギー保存則より、 $E_1 = E_2$ が成り立つ。これに式(6)と式(7)を代入すれば、次式を得る。

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{V_1}{V_2}} = \boxed{\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

(補足1)

津波は浅水波($h \ll H \ll \lambda$)の代表例である。

1960年5月にチリで発生した観測史上最大の地震(マグニチュード9.5)による津波が、太平洋を越えて日本に到達した。チリから日本までの距離 L は約 17000 km で、太平洋の平均水深 H_1 は約 4000 m である。震源地を波源とする津波は球面上を拡がっていくのだが、日本までの伝播経路を、水深一定の直線経路と仮定すると、津波の速さは、

$$V_1 = \sqrt{g H_1} \sim \sqrt{10 \text{ m s}^{-2} \times 4000 \text{ m}} = 200 \text{ m s}^{-1} = 720 \text{ km h}^{-1}$$

となり、日本までの伝播時間は $L / V_1 \sim 24 \text{ h}$ となる。実際の伝播時間は 22~25 h であった。日本では津波が 30~60 分の間隔でくり返し押し寄せたことが観測されている。津波の周期として 40 分を仮定すれば、その波長 λ_1 は 480 km 程度となり、 $\lambda_1 \gg H_1$ を満たしている。

日本に押し寄せた津波の波高は、観測点の地形に依るが、最大値は、三陸海岸で観測された 6.4 m である。仮に、海岸近くの水深 H_2 が 40 m のところで、津波の波高 h_2 が 1 m であったとすれば、伝播中の太平洋での振幅 h_1 は、

$$h_1 = h_2 \times \left(\frac{H_2}{H_1} \right)^{\frac{1}{4}} = 1 \text{ m} \times \left(\frac{40}{4000} \right)^{\frac{1}{4}} \sim 0.3 \text{ m}$$

となる。いずれにしても、 $h_1 < h_2 \ll H_1$ は満たされている。

チリ地震による津波が太平洋の全域に伝播する様子の再現計算が、

内閣府 > 防災情報のページ > 報告書 (1960 チリ地震津波) の第 2 章に載っている。興味がある人は読まれるとよい。

(補足 2) 振幅が小さい浅水波の平均エネルギー密度

ある瞬間において、浅水波の波形が振幅 h_0 、波長 λ の正弦波で表されるとする。波がない状態から図 7 のような波形に変形するのに要する仕事を計算する。

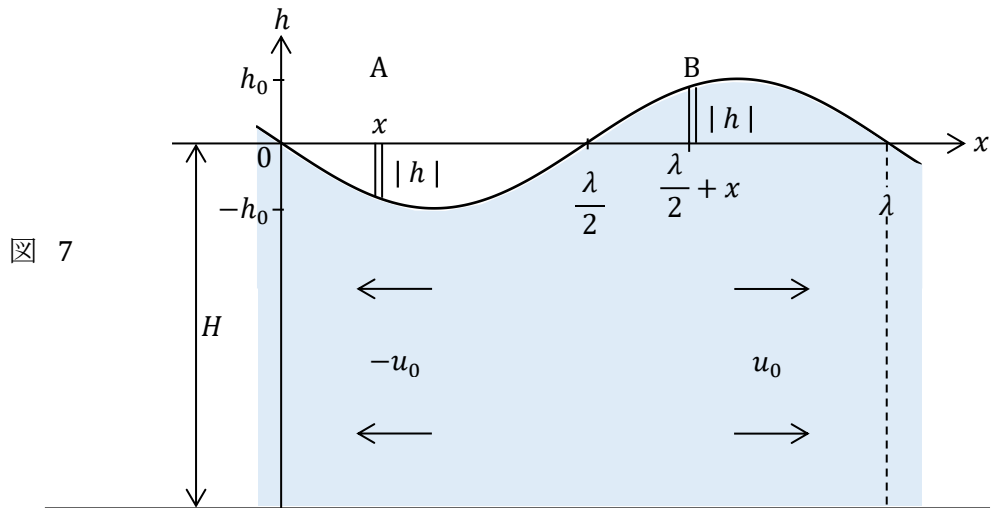


図 7

位置 x にある幅 dx 、高さ $|h|$ 、奥行 a の水を、位置 $\frac{\lambda}{2} + x$ へ高さ $|h|$ だけ持ち上げるのに要する仕事 dw は、

$$dw = \rho (a |h| dx) g |h|$$

である。よって、静水の状態から図 7 のような波形に変形するまでに要する仕事 W は、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\lambda/2} \rho a g h^2 dx \\ &= \rho a g \int_0^{\lambda/2} \left(-h_0 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \rho a g h_0^2 \lambda \equiv U \end{aligned}$$

となる。すなわち、1 波長 λ の間にこれだけの位置エネルギー U が蓄えられているのである。

振幅が小さい浅水波の場合、流体粒子は水面から水底まで、ほぼ水平方向に同じ単振動をしていると見なせる。その速度振幅は図 3 に示されている u_0 である。したがって、流体粒子の運動エネルギー密度 k は、

$$k = \frac{1}{2} \rho \left\{ u_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right\}^2$$

と表される。この時間平均値 $\overline{k}$ は、時間平均を $\overline{\quad}$ で表せば、

$$\begin{aligned} \overline{k} &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 \overline{\sin^2 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)} \\ &= \frac{1}{4} \rho u_0^2 \end{aligned}$$

となる。本文の式 (3) と式 (5) を用いれば、 u_0^2 は、

$$u_0^2 = \left(\frac{V}{H} h_0 \right)^2 = \frac{g}{H} h_0^2$$

と表される。よって、1 波長 λ の間にある水の運動エネルギーの時間平均値 K は、

$$K = \overline{k} \times (a H \lambda) = \frac{1}{4} \rho a g h_0^2 \lambda$$

となり、1 波長 λ の間にある位置エネルギー U に等しい。よって、1 波長 λ の間にある力学的エネルギーの時間平均値 E は、

$$E = K + U = \frac{1}{2} \rho a g h_0^2 \lambda$$

となり、上から見下したときのエネルギー面密度の時間平均値 ε は、

$$\varepsilon = \frac{E}{a \lambda} = \frac{1}{2} \rho g h_0^2 \equiv c h_0^2$$

となる。

[他の演習問題へ](#)